**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2009 Т. 1 № 1 С. 67–75**

Ки&М

МОДЕЛИ В ФИЗИКЕ И ТЕХНОЛОГИИ

Моделирование и исследование процесса затвердевания заготовок при дискретно-непрерывном литье металлов

Е. Е. Фомина[1,a], Н. К. Жиганов[1]

[1] Тверской государственный технический университет,
170026, г. Тверь, наб. Аф. Никитина, д. 22

E-mail: [a] fominaee@mail.ru

*Получено 27 февраля 2008 г.,
после доработки 18 июня 2008 г.*

Статья посвящена проблеме математического моделирования процесса дискретно-непрерывного литья цветных металлов. Разработана программа для моделирования процесса непрерывного вертикального литья цилиндрических заготовок. Исследовано влияние основных технологических параметров на процесс охлаждения непрерывнолитой медной заготовки.

Ключевые слова: литье металлов, дискретно-непрерывное литье, цветные металлы

Введение

При производстве отливок возникает проблема невозможности принятия эффективного решения из-за недостатка информации об особенностях физических процессов, протекающих внутри слитка: гидродинамических, теплопереноса, фазовых переходов и т. д. Они оказывают определяющее значение на его формирование, являются основой при проектировании и управлении процессом непрерывного литья, позволяют минимизировать брак, получать продукцию высокого качества и снизить ее себестоимость.

Экспериментальное изучение этих процессов является трудоемким, дорогостоящим, а зачастую и невозможным. Поэтому актуальной проблемой сегодня является математическое моделирование и разработка специализированных литейных пакетов, позволяющих с заданной точностью отразить данные физические процессы и с достаточной наглядностью визуализировать процесс непрерывного литья.

Для моделирования и визуализации процесса дискретно-непрерывного вертикального литья цилиндрических заготовок из цветных металлов и их сплавов, принципиальная схема которого приведена на рис. 1, был разработан программно-аналитический комплекс (свидетельство № 2007614353).

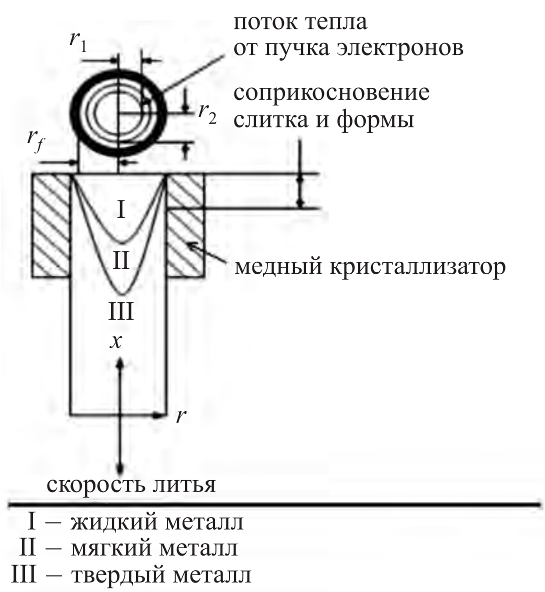

Рис. 1. Схема литья

Математическая модель

В основу программы положена математическая модель, включающая уравнение неразрывности (1), количества движения (2), (3), энергии (4), необходимые начальные и граничные условия (5)–(16). Для моделирования турбулентности использовалась RNG k–ε модель (17)–(20). Все уравнения системы записаны в цилиндрических координатах [1, 3]. Граничное условие по теплопередаче на границе отливка-кристаллизатор учитывает образование зазора вследствие развития объемной усадки сплава и изменение вследствие этого механизма переноса тепла.

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial r\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(r\rho(u+u_{лит}))+\frac{\partial}{\partial r}(r\rho v)=0, \tag{1}$$

где $u_{лит}$ — постоянная скорость литья (м/с), ρ — плотность металла (кг/м^3), u — скорость вдоль оси Ox (м/с), v — скорость вдоль оси Or (м/с), r — расстояние от оси Or до текущей точки слитка (м), x — расстояние от оси Ox до текущей точки слитка (м), t — время (с).

Уравнения движения

вдоль оси *Ox*:

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{r}[\frac{\partial}{\partial x}(r\rho(u+u_{лит})u)+\frac{\partial}{\partial r}(r\rho uv)]=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{r}[\frac{\partial}{\partial x}(r\mu\frac{\partial u}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial r}(r\mu\frac{\partial u}{\partial r})]+Au+\rho g, \quad (2)$$

вдоль оси *Or:*

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{1}{r}[\frac{\partial}{\partial x}(r\rho(u+u_{лит})v)+\frac{\partial}{\partial r}(r\rho v^2)]=-\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{1}{r}[\frac{\partial}{\partial x}(r\mu\frac{\partial v}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial r}(r\mu\frac{\partial v}{\partial r})]-\frac{2\mu v}{r^2}+Av, \quad (3)$$

где ρ — давление (кг/м·с^2), μ — эффективная вязкость (кг/м·с), $A=-C(1-\lambda)^2/\lambda^3$, с параметром λ, который равен 1 в жидкой, 0 в твердой и меняется линейно с температурой в мягкой зоне, C — коэффициент Дарси, равен 10^8 (1/с).

Уравнение энергии:

$$\begin{gathered}c\rho\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{1}{r}[\frac{\partial}{\partial x}(r\rho(u+u_{лит})\varphi)+\frac{\partial}{\partial r}(r\rho v\varphi)]=\frac{1}{r}[\frac{\partial}{\partial x}(rk\frac{\partial T}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial r}(rk\frac{\partial T}{\partial r})]-\\ -\frac{1}{r}[\frac{\partial}{\partial x}(r\rho(u+u_{лит})\Delta H)+\frac{\partial}{\partial r}(r\rho v\Delta H)],\end{gathered} \quad (4)$$

где c — теплоемкость (Дж/кг·К), t — время (с), φ — энтальпия (Дж·К/кг·с), T — температура (К), k — теплопроводность (Вт/м·К), $\Delta H=\lambda\Delta H_f$ и ΔH_f — общая скрытая теплота (Дж/кг).

Граничные условия по длине слитка задаются в виде следующих дифференциальных уравнений, описывающих тепловой поток на границе:

А) *На боковых стенках* ($r = R$)

Если $T<T_{сол}$:

$$-k\frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r=R}=\sigma\varepsilon_{тв}(T^4-T^4_{формы})\Big|_{r=R},\ x\ge(L-L_{формы}), \quad (5)$$

$$-k\frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r=R}=\sigma\varepsilon_{тв}(T^4-T^4_{окр})\Big|_{r=R},\ x<(L-L_{формы}), \quad (6)$$

$$u(x;R)=0, \quad v(x;R)=0, \quad (7)$$

где σ — константа Стефана–Больцмана ($5{,}667\cdot10^{-8}$ Вт/м^2·К^4), $\varepsilon_{тв}$, — излучение на твердой поверхности, $T_{формы}$ и $T_{окр}$ — температуры поверхности литейной формы и окружающей среды, L и $L_{формы}$ — длины поверхности слитка и литейной формы.

Если $T\ge T_{сол}$:

$$-k\frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r=R}=\alpha_c(T-T_{формы})\Big|_{r=R}, \quad (8)$$

$$u(x;R)=-u_{лит}, \quad v(x;R)=0, \quad (9)$$

где α_c — коэффициент теплообмена при соприкосновении формы и слитка (Вт/м^2·К).

Б) *Нижняя граница формы* $(x=0)$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \tag{10}$$

$$u(0;r)=0, \quad v(0;r)=0. \tag{11}$$

В) *Верхняя граница формы* $(x=L)$

Если $r_1 \le r \le r_2$,

$$k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=L} = q_{пучка} - \sigma\varepsilon_{жидк}\left.(T^4 - T_{окр}^4)\right|_{x=L}, \tag{12}$$

где $q_{пучка}$ — поток тепла от пучка электронов (Вт/м^2), $\varepsilon_{жидк}$ — излучение жидкости.

Если $r < r_1$ или $r_2 < r < r_f$, где r_f — внутренний радиус кольца для литья:

$$-k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=L} = \sigma\varepsilon_{жидк}\left.(T^4 - T_{окр}^4)\right|_{x=L}. \tag{13}$$

Если $r_f < r < R$,

$$T(L; r_f < r < R) = T_{расплава}, \tag{14}$$

$$\mu\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=L} = \frac{\partial \gamma}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial r}, \; 0 \le r \le R, \tag{15}$$

$$u(L,r)=0. \tag{16}$$

RNG $k-\varepsilon$ модель описывается следующими уравнениями:

Уравнение турбулентной вязкости

$$\mu_{турбулентная} = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon}. \tag{17}$$

Уравнение турбулентной кинетической энергии k (м^2/с^2)

$$\rho k \nabla \cdot v = \nabla \cdot \left(\frac{\mu_{турбулентная}}{\sigma_k}\nabla k\right) + \mu_{турбулентная}\Phi - \rho\varepsilon. \tag{18}$$

Уравнение скорости диссипации ε (м^2/с^3)

$$\rho\varepsilon\nabla \cdot v = \nabla \cdot \left(\frac{\mu_{турбулентная}}{\sigma_\varepsilon}\nabla\varepsilon\right) + C_{1\varepsilon}\mu_{турбулентная}\frac{\varepsilon}{k}\Phi - C_2\rho\frac{\varepsilon^2}{k}, \tag{19}$$

где $C_{1\varepsilon}$ = 1,44, C_2 = 1,92, C_μ = 0,09, σ_k = 1, σ_ε = 1,3, Φ — тензор вязкости, определяемый по формуле

$$\Phi = 2\left(1+\frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r}\right)^2. \tag{20}$$

Система дифференциальных уравнений дискретизировалась методом конечных объемов [2]. Расчетная область разбивалась на конечное число непересекающихся объемов так, что в каждом объеме содержится только один узел сетки.

Все дискретные аналоги были построены с использованием равномерной, фиксированной (вычислительные границы ячейки не изменяются при расчете фазового изменения), шахматной сетки, компоненты скорости на которой рассчитываются на гранях контрольных объемов, а значения давления и температуры — в узловых точках (рис. 2).

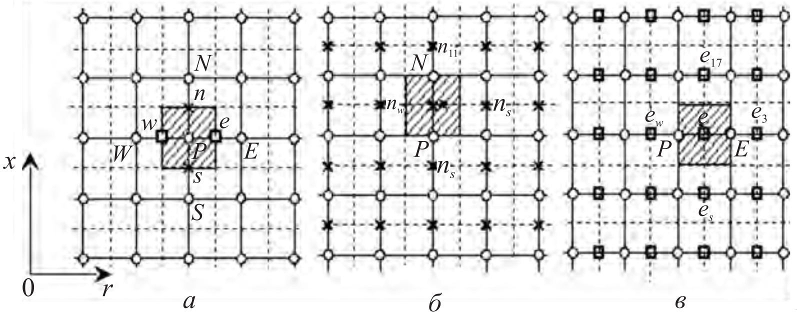

Рис. 2. Шахматная сетка: *а* — конечный объем для температуры и давления, *б* — конечный объем для скорости *u*, *в* — конечный объем для скорости *v*

Дискретные аналоги получены путем интегрирования соответствующих уравнений (1)–(20) по конечному объему. Интегралы вычислялись с использованием кусочных профилей, описывающих изменение функций между узловыми точками.

Для коррекции полей давления и скоростей применялся метод нижней релаксации [3].

В основу алгоритма для расчета поля течения положен алгоритм SIMPLER.

Адекватность результатов, полученных с помощью разработанного комплекса, устанавливалась путем сопоставления с результатами, полученными в коммерческом *CFD* пакете *FLOW-3D*®, программный код которого многократно тестировался на адекватность экспериментальным данным различных технологических процессов литья, включая непрерывное литье. Сопоставление результатов показало расхождение не более 1,2 % [4].