Дискретная математика

том 4 выпуск 3 * 1992

УДК 519.95

О ПОВЕДЕНИИ АВТОМАТОВ В ЛАБИРИНТАХ

В.Б. Кудрявцев, Ш. Ушчумлич, Г. Килибарда

Дается обзор более 80-ти работ, выполненных за последние 20 лет, по поведению систем автоматов в лабиринтах. Выделяются основные понятия, проблематика, достижения, методы решения задач и открытые проблемы. Основные утверждения в ряде случаев приводятся в более сильном виде по сравнению с формулировками авторов. Статья содержит также новые результаты по проблеме обхода лабиринтов автоматами.

Введение

В последние годы все большее внимание привлекает тематика, связанная с автоматным анализом изображений, графов, формальных языков и других дискретных систем. В общей сложности по этой тематике уже опубликовано свыше ста работ.

По-видимому, одной из первых статей этого направления следует считать работу К. Шеннона 1951 года [55], в которой фактически рассматривалась задача поиска автоматом-мышью определенной цели в лабиринте, что в значительной мере определило тематику направления на последующие годы. Другим источником направления можно считать рассмотрение вычислительных систем с внешней памятью в виде плоскости или пространства П. Фишера [23], хотя здесь они сравнительно быстро были вытеснены многоленточными вычислителями.

Идеи К. Шеннона довольно долго не получали развития. Возможно, это объясняется некоторыми особенностями основной модели исследования, рассматриваемой в то время в теории автоматов. Во-первых, внимание специалистов по теории автоматов было сосредоточено на изучении возможностей автоматов при переработке слов, за которыми не скрывались интерпретации. Такой подход был характерным при изучении всех основных видов поведений автоматов и прежде всего таких, как автоматы-преобразователи, автоматы-акцепторы и др. (Различные вопросы, связанные с этими типами поведений, по-прежнему остаются главными в теории автоматов.) Во-вторых, изучаемые автоматы по отношению к множеству входных слов, т.е. к "среде", воздействующей на них, рассматривались лишь как "получатели", никак не влияющие на среду. Эти особенности отсутствуют в модели "автомат в лабиринте", что существенно ограничивает перенос результатов для других типов поведений автоматов на эту модель.

Активное изучение поведения автоматов в лабиринтах и графах начинается после появления работ К. Деппа [19, 20]. В них была формализована модель Шеннона, и в качестве лабиринта рассмотрена подобная шахматной доске связная конфигурация клеток на плоскости или аналогичных кубиков в пространстве (шахматные лабиринты), а в качестве автоматов — конечные автоматы, которые, обозревая некоторую окрестность клетки, в которой находятся, могут перемещаться в соседнюю клетку в одном из координатных направлений. В работе получены некоторые результаты по задаче обхода таких лабиринтов автоматами и как актуальный выделен вопрос о существовании автомата, обходящего все такие лабиринты; приведены соображения в пользу того, что в случае пространственного лабиринта для автомата можно построить лабиринт-ловушку. Х. Мюлер [46] для заданного автомата построил плоскую ловушку в виде 3-графа, а Л. Будах [9] — шахматную ловушку, однако его обоснование оказалось слишком громоздким. А.С. Подколзин [78, 79] существенно упростил доказательство этого факта. Х. Антельман [2] оценил сложность такой ловушки по числу клеток в ней, а Х. Мюлер [47] указал, что всегда в качестве ловушки можно выбрать r-связный лабиринт, причем $r \leqslant 3$. Затем Х. Антельман, Л. Будах и Х.А. Ролльк [1] построили конечную ловушку для конечной системы автоматов и бесконечную ловушку сразу для всех допустимых автоматов. Характеризацию специальных типов графов-лабиринтов, "правильно" укладывающихся в плоскость, которые появляются в упомянутых выше работах, дали Ф. Хофман и К. Кригел [33], а также независимо от них подобную характеризацию получили Г. Вивян и А. Вигдерсон в работе [62].

Наряду с этими результатами, указывающими на ограниченность возможностей автоматов, были построены примеры классов лабиринтов, которые обходятся одним автоматом (Г. Ассер [3], Р. Данецки и М. Карпински [18], К. Депп [19, 20], Г. Килибарда [70] и др.). А.Н. Зыричев [66] установил, что класс всех плоских шахматных лабиринтов, имеющих дыры ограниченного диаметра, обходится одним автоматом. А.А. Золотых [66] расширил этот класс, показав, что можно рассматривать ограниченность дыр лишь по фиксированному направлению. В этих работах содержатся также оценки времени обхода лабиринтов и числа состояний для автоматов.

Невозможность обхода всех плоских шахматных лабиринтов одним автоматом выдвинула вопрос об изучении возможных усилений модели автомата, уже решающих задачу обхода.

Рассмотрены несколько вариантов таких усилений. Главным из них является система взаимодействующих автоматов, называемая коллективом. В отличие от системы независимых автоматов коллектив анализирует лабиринты с учетом положения его "членов" в лабиринте. Простейшим представителем коллектива является система автоматов с камнями: камни представляют собой автоматы без памяти и их перемещение определяется другими автоматами коллектива; таким образом, камни играют роль ограниченной внешней памяти. Установлено Ф. Хофманом [31, 32], что коллектив из одного автомата и одного камня не может обойти все конечные плоские мозаичные лабиринты; М. Блюм и Д. Козен [6] установили, что коллектив из одного автомата и двух камней решает эту задачу, отметив при этом, что коллектив из двух автоматов может решать ее тоже. Наряду с этим в работах А. Хемерлинга [27] и К. Кригела [40] показано, что класс указанных лабиринтов допускает естественное расслоение, такое, что для любого его слоя найдется коллектив из одного автомата с камнем, обходящий этот слой; в качестве параметра расслоения здесь выступает число дыр в лабиринте.

Аналогичный вопрос для класса всех конечных и бесконечных плоских мозаичных лабиринтов исследуется в работах М. Блюма и У. Саконы [5], З. Хабасинского и М. Карпинского [25], А. Шепитовского [57], Г. Килибарды [74] и др. В них установлены некоторые простейшие по числу автоматов и камней коллективы, обходящие все такие лабиринты. В работе [74] практически завершено описание всех таких коллективов (открытой проблемой остался только случай коллектива.

состоящего из одного автомата и 4 камней); в ней же приведено решение указанной задачи для лабиринтов, не содержащих бесконечные дыры.

Для лабиринтов более общего вида М. Блюмом, У. Сакодой [5] и А. Хемерлингом [30] показано наличие ловушки уже в трехмерном случае. Установлено наличие бесконечной трехмерной ловушки сразу для всех коллективов автоматов [77]. При этом коллективы остаются в шаре ограниченного радиуса в этой ловушке. Подобные результаты оказываются верными и в планарном случае, для лабиринтов имеющих вид кубического графа [50].

Специальными классами лабиринтов являются так называемые синтаксурные и лабиринты Савича. Для первого вида в работах Г.Л. Курганова [78] и Г. Килибарды [76] получены описания простейших коллективов автоматов с камнями, находящих специальную вершину в этих лабиринтах. Для второго вида установлено, что проблема выхода из них по специальным путям эквивалентна открытой проблеме совпадения языков, распознаваемых детерминированными и недетерминированными линейно ограниченными машинами Тьюринга, что свидетельствует о больших потенциальных трудностях тематики [51, 52].

Начато исследование задачи о встрече коллективов автоматов в лабиринтах. Одним из возможных толкований этой задачи может быть описание для заданного класса лабиринтов всех тех пар коллективов, которые встречаются в любом лабиринте из этого класса. Шультр и Улехла [61] показали, что два коллектива из одного автомата и двух камней могут решить задачу о встрече на плоскости, в работе А.В. Анджанса [65] указаны простейшие типы коллективов автоматов, решающих задачу о встрече на прямой и в плоскости.

В.И. Грунской [67, 68] рассмотрен вариант задачи о встрече двух автоматов, находящихся в отношении "хищник — жертва", где автомат-"хищник" пытается догнать жертву, а та убежать от него; взаимодействие происходит в квадратном лабиринте. Приводятся условия, при которых указанная встреча происходит. В работах У. Кона [17], М. Була и А. Хемерлинга [15], А.В. Анджанса [65] и других авторов рассматривались возможности более общих моделей автоматов в лабиринтах. Так, например, в работе [17] показано, что автомат с магазинной памятью не может обойти все лабиринты, имеющие вид 3-графов, а в [65] приведены примеры автоматов со счетчиками, со стеками и магазинами, обходящие плоскость. Установлено также, что существует автомат с магазином, который обходит любой конечный плоский односвязный шахматный лабиринт и останавливается после его обхода [15].

Задача анализа для автоматов и лабиринтов изучалась в работах многих авторов: М. Блюм и К. Хьюит [4], М. Бёсмонт [22], К. Иноуэ, И. Таканами и А. Накамура [34], К. Иноуэ и А. Накамура [35], К. Иноуэ и И. Таканами [36], Е.Н. Кинбер [39], Д.Л. Милгрэм и А. Розенфельд [44], Д.Л. Милгрэм [45], Н. Милопулос [48], У. Савич [51, 52] и др. Она состоит для заданного коллектива автоматов в описании всех лабиринтов, которые обходятся этим коллективом при возможных дополнительных соглашениях типа требования остановки после обхода. Попытки описать эти лабиринты в виде алгебры Клини встретили затруднения [34]; аналогично обстоит дело с выяснением отношений между классами лабиринтов, представляющих решение задачи анализа для заданных коллективов автоматов [36]. В работе [4] показано, что классы лабиринтов, обходимые автоматами с камнями, неограниченно возрастают с увеличением числа камней. Анализу свойств нагруженных графов посвящена работа Г.Ю. Кудрявцева [87], которая устанавливает, с какой сложностью может быть решена задача эквивалентности поведения автоматов в таких графах. В работах [44, 49] устанавливается связь между классами лабиринтов и формальными языками, что приводит к смещению проблематики и переходу к решению задач для автоматов и лабиринтов в языках.

§ 1. Основные понятия и задачи

Пусть $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — некоторое индексированное семейство множеств X_α. Тогда для любого $\alpha \in A$ через $\Pr_\alpha$ обозначим отображение проектирования произведения $\prod_{\beta \in A} X_\beta$ на α-й сомножитель X_α. Если множество индексов A — конечное множество, то всегда в дальнейшем будем предполагать, что $A = \{1, \ldots, |A|\}$.

Пусть пара $L = (V, \Gamma)$ — конечный ориентированный граф, не имеющий петель и кратных дуг, где V — множество вершин v и Γ — множество дуг γ. Часто в последующем будем обозначать множество вершин и множество дуг графа L через $V(L)$ и $\Gamma(L)$.

Если в графе $L = (V, \Gamma)$ вместе с дугой (v_1, v_2) содержится дуга (v_2, v_1), то называем эту пару *ребром* и обозначаем $\{v_1, v_2\}$. Граф называется *симметрическим*, если для любой $(v_1, v_2) \in \Gamma$ имеет место $(v_2, v_1) \in \Gamma$. Граф называется *планарным*, если существует его плоская реализация, конкретный вид ее называется *укладкой*, а также *плоским графом*.

Пусть $L = (V, \Gamma)$ — некоторый симметрический граф и $v \in V$. Обозначим $\Gamma_v = \{\gamma \in \Gamma \mid \Pr_1(\gamma) = v\}$. *Система вращения* η графа L есть множество $\{\eta_v \mid v \in V\}$, где каждое η_v есть циклическая подстановка множества Γ_v.

Пусть (L, η) — некоторый симметрический граф L вместе с системой вращения η. Для любой $\gamma = (u, v) \in \Gamma(L)$ через γ^{-1} обозначим дугу (v, u). Пусть $F = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, где $\gamma_i = (u_i, v_i) \in \Gamma(L)$ для всех i, $1 \leqslant i \leqslant n$, — циклическая перестановка некоторых дуг графа L. F называется *стороной* графа (L, η), если

а) $u_k = v_{k-1}$ для всех k, $2 \leqslant k \leqslant n$, и $u_1 = v_n$;

б) $\gamma_k = \eta_{u_k}(\gamma_{k-1}^{-1})$ для всех k, $2 \leqslant k \leqslant n$, и $\gamma_1 = \eta_{u_1}(\gamma_n^{-1})$;

в) дуги $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ взаимно различные.

Эйлеровой характеристикой графа (L, η) назовем число $\chi(L, \eta) = |V| - |E| + |F|$, где F — множество всех сторон графа (L, η) и E — множество ребер симметрического графа L. Известно [56], что граф является планарным тогда и только тогда, когда $\chi(L, \eta) = 2$.

Пусть Ω и Σ — непересекающиеся алфавиты букв ω и σ, которые берутся для отметок вершин и дуг соответственно, причем $\Omega \setminus \Sigma$ содержит пустой символ Λ. Если всем вершинам и дугам графа $L = (V, \Gamma)$ приписаны отметки из этих алфавитов так, что по разным дугам, исходящим из одной и той же вершины, приписаны разные отметки, то этот нагруженный граф L называем *лабиринтом*. Отметки любых $v \in V$ и $\gamma \in \Gamma$ обозначаем соответственно через $[v]$ и $[\gamma]$. Лабиринт L с выделенными вершинами $v_1, \ldots, v_n$, называемыми начальными, считаем инициальным и обозначаем $L_{v_1, \ldots, v_n}$. Обозначим через $\mathfrak{L}(\Omega, \Sigma)$ класс всех лабиринтов с множеством отметок вершин Ω и множеством отметок дуг Σ.

Обозначим через E^n множество $\{e_1, \ldots, e_n\}$ базисных единичных векторов n-мерного евклидова пространства $\mathbf{R}^n$, а через $\bar{E}^n$ обозначим множество $\{e_1, \ldots, e_n, \bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$, где $\bar{e}_i = e_i^{-1} = -e_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. В случае $n = 2$ вместо обозначений базисных векторов i, j и векторов $-i$, $-j$ будем соответственно пользоваться обозначениями e, n, w и s.

Лабиринт $\mathfrak{L} \in L(\Omega, \Sigma)$, являющийся симметрическим графом, называется *n-мерным лабиринтом*, $n \geqslant 2$, если:

1) $\Sigma = \bar{E}^n$ и $\Omega = \{\Lambda\}$;

2) для любых $u, v \in V$, если $(u, v) \in \Gamma(L)$, то $[(v, u)] = [(u, v)]^{-1}$.

Пусть $\mathbf{M}, \mathbf{N} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{M} \neq \mathbf{N}$ и $\overline{\mathbf{MN}} = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$. Говорим, что отрезок $\overline{\mathbf{MN}}$ идет в направлении e_i, если $\alpha_i > 0$ и $\alpha_j = 0$, и в направлении $\bar{e}_i$, если $\alpha_i < 0$ и $\alpha_j = 0$ для всех $j \neq i$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Множество $\mathbf{T}$ отрезков в $\mathbf{R}^n$ называется *n-конфигурацией*, если любые два разных отрезка из этого множества могут иметь не более одной общей точки, причем, если она есть, то обязательно является концевой для обоих отрезков.

n-мерный лабиринт $L = (V, \Gamma)$, где $V \subseteq \mathbf{R}^n$, назовем *n-мерным прямоугольным лабиринтом*, если

1) для любых $u, v \in V$ из $(u, v) \in \Gamma$ следует, что отрезок $\overline{uv}$ идет в направлении $|(u, v)|$;

2) множество отрезков $\mathbf{T} = \{ \overline{uv} \mid (u, v) \in \Gamma \}$ является n-конфигурацией.

n-мерный лабиринт L, изоморфный некоторому n-мерному прямоугольному лабиринту, называется *квазипрямоугольным*.

Пусть L — некоторый n-мерный прямоугольный лабиринт. Фигура $\hat{L} = \bigcup_{(u,v) \in \Gamma(L)} \overline{uv}$ в $\mathbf{R}^n$ называется *реализацией* n-мерного прямоугольного лабиринта L.

Пусть $\mathbf{Z}^n$ — целочисленная решетка в $\mathbf{R}^n$. Если $V \subseteq \mathbf{Z}^n$, то n-мерный прямоугольный лабиринт $L = (V, \Gamma)$ назовем *n-мерным целочисленным лабиринтом*, а n-мерный целочисленный лабиринт $L = (V, \Gamma)$ назовем *n-мерным мозаичным лабиринтом*, если $\mathbf{T} = \{ \overline{uv} \mid (u, v) \in \Gamma \}$ — множество отрезков длины 1.

Про вершину v n-мерного мозаичного лабиринта L говорим, что она *открыта в* L, если существует бесконечный n-мерный мозаичный лабиринт L_1 такой, что $L \cap L_1 = \{ v \}$ и $v \in V(L_1)$. Если v_1 открыта в L, то n-мерный мозаичный лабиринт L_{v_0, v_1} называется *n-мерным правильным* лабиринтом.

В дальнейшем вместо "2-мерный прямоугольный" ("мозаичный", "целочисленный", "правильный") лабиринт будем писать "плоский прямоугольный" ("мозаичный", "целочисленный", "правильный") лабиринт.

Проведем через вершины $\mathbf{Z}^n$ все возможные прямые, параллельные осям координат. Полученная фигура является реализацией n-мерного прямоугольного лабиринта, который обозначим через $\mathbf{Z}^n$. Множество вершин этого лабиринта есть $\mathbf{Z}^n$. Очевидно, что n-мерный мозаичный лабиринт можно определить и как связную часть (нагруженную) лабиринта Z^n. Под n-мерным шахматным лабиринтом будем понимать любой подграф (нагруженный) лабиринта Z^n, при этом мы считаем, что в подграфе вместе с любой парой вершин содержится и ребро, соединяющее их.

Конечный плоский мозаичный лабиринт, у которого дуги могут быть дополнительно нагружены символами из множества $\mathbf{E}_r = \{1, 2, \ldots, r\}$, назовем *r-лабиринтом*. Обозначим через $\mathfrak{L}(r)$ класс всех r-лабиринтов. Назовем *0-лабиринтом* r-лабиринт, который полностью дополнительно ненагружен. Если все пары противоположных дуг в лабиринте L заменим соответствующими ребрами, то получаем неориентированный граф, который обозначим через $G(L)$. Если граф $G(L)$ является деревом, то r-лабиринт (0-лабиринт) L называется *r-деревом* (0-деревом).

Пусть $L = (V, \Gamma)$ — некоторый плоский прямоугольный лабиринт. Множество $\mathbf{R}^n \setminus \hat{L}$ является открытым и в общем случае (если $G(L)$ не является деревом) несвязным. Лабиринт L назовем *(r + 1)-связным*, если множество $\mathbf{R}^n \setminus \hat{L}$ имеет r ограниченных компонентов связности. Пусть $L = (V, \Gamma)$ - некоторый плоский шахматный лабиринт. Пусть $U_1, \ldots, U_r$ - все компоненты связности множества $\mathbf{R}^n \setminus \hat{L}$. *Дырой* лабиринта L назовем любое непустое множество D вида $U_i \cap Z^2$, $1 \leqslant i \leqslant r$.

В случае, когда D конечно, дыру называем конечной; в противном случае бесконечной. Плоский шахматный лабиринт L называем *(k + 1)-связным*, если в нем точно k конечных дыр, $k \in \mathbf{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$; при $k = 0$ лабиринт называем *односвязным*. В дальнейшем, когда речь идет о связности плоских шахматных лабиринтов, мы имеем в виду число конечных дыр, если не оговорено иное.

Введем некоторые обозначения. Класс всех плоских мозаичных лабиринтов обозначим через $\mathfrak{L}_2$, класс всех конечных лабиринтов из $\mathfrak{L}_2$ — через $\mathfrak{L}_0$, а класс всех бесконечных лабиринтов из $\mathfrak{L}_2$ — через $\mathfrak{L}_1$.

Под автоматом $\mathfrak{A}$ понимаем пятерку (A, Q, B, φ, ψ), где A, B и Q суть конечные алфавиты входной, выходной и состояний соответственно, $\varphi: Q \times A \to Q$ и $\psi: Q \times A \to B$ суть функции переходов и выходов соответственно. При фиксации начального состояния $q_0 \in Q$ имеем инициальный автомат $\mathfrak{A}_{q_0}$. Пусть A^* и B^* — множества всех слов $\alpha = \alpha(1) \ldots \alpha(n)$ и $\beta = \beta(1) \ldots \beta(n)$ над алфавитами A и B соответственно. Под функционированием автомата $\mathfrak{A}_{q_0}$ понимаем отображение $f_{\mathfrak{A}_{q_0}}: A^* \to B^*$, определяемое рекуррентно:

$$\begin{cases} q(1) = q_0, \\ q(t+1) = \varphi(q(t), \alpha(t)), \\ \beta(t) = \psi(q(t), \alpha(t)). \end{cases}$$

Такие автоматы называют также *конечными автоматами*. Часто в дальнейшем множество входов, множество выходов, множество состояний, функцию перехода и функцию выхода для автомата $\mathfrak{A}$ будем обозначать соответственно через $A_{\mathfrak{A}}$, $B_{\mathfrak{A}}$, $Q_{\mathfrak{A}}$, $\varphi_{\mathfrak{A}}$ и $\psi_{\mathfrak{A}}$.

Объектом нашего исследования является изучение поведения автоматов в лабиринтах. Автомат $\mathfrak{A}$ назовем *допустимым* для класса лабиринтов $\mathfrak{L}(\Omega, \Sigma)$, если его входной алфавит состоит из букв а вида $(\omega, \{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\})$, где $\omega \in \Omega$ и $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\} \subseteq \Sigma$, и выходной алфавит есть $\Sigma \cup \{\kappa\}$, $\kappa \notin \Sigma$, при этом всегда $\psi(q, a) \in \mathrm{Пр}_2(a) \cup \{\kappa\}$. Обозначим класс всех таких автоматов через $\mathrm{At}(\Omega, \Sigma)$. Пусть $\mathfrak{A}_{q_0}$ — некоторый инициальный автомат из $\mathfrak{L}(\Omega, \Sigma)$ и L_{v_0} — некоторый инициальный лабиринт из $\mathfrak{L}(\Omega, \Sigma)$. Интерпретируем функционирование автомата $\mathfrak{A}_{q_0}$ в лабиринте L_{v_0} следующим образом. Автомат $\mathfrak{A}_{q_0}$ помещается в начальный момент в вершину v_0 лабиринта L_{v_0}. Предположим, что в какой-то момент автомат $\mathfrak{A}_{q_0}$ оказался в вершине v лабиринта L_{v_0} и в состоянии q. Считаем, что он обозревает нагруженную звезду, образованную исходящими из этой вершины дугами. Его входной буквой в этот момент является пара, образованная отметкой вершины и множеством отметок звезды. В следующий момент, если $\psi(q, a) \neq \kappa$, то автомат перемещается в вершину, в которую ведет дуга с отметкой $\psi(q, a)$, а если $\psi(q, a) = \kappa$, то остается на месте, и всегда переходит в состояние $\varphi(q, a)$. Таким образом автомат осуществляет движение по лабиринту, последовательно проходя некоторый путь. На самом деле функционирование автомата $\mathfrak{A}_{q_0}$ в лабиринте L_{v_0} можно определить как поведение автомата $\mathfrak{A}_{q_0}$ в лабиринте L_{v_0}. Последовательность пар $\pi(\mathfrak{A}_{q_0}; L_{v_0}) = (q_0, v_0), (q_1, v_1), \ldots$ называем *поведением автомата* $\mathfrak{A}_{q_0}$ *в лабиринте* L_{v_0}, если v_{t+1} есть вершина лабиринта L_{v_0}, в которую автомат, находясь в состоянии q_t, переходит из вершины v_t, а q_{t+1} — состояние, в которое при этом перейдет $\mathfrak{A}_{q_0}$. Последовательность $\{(v_0, v_1)\}, \{(v_1, v_2)\}, \ldots$ обозначим через $\mathrm{Tr}(\mathfrak{A}_{q_0}, L_{v_0})$, а начальный отрезок длины s последовательности $\mathrm{Tr}(\mathfrak{A}_{q_0}, L_{v_0})$ через $\mathrm{Tr}(\mathfrak{A}_{q_0}, L_{v_0}; s)$. Если для некоторого $v \in V(L_{v_0})$ существует $q \in Q_{\mathfrak{A}_{q_0}}$ такое, что пара (q, v) принадлежит $\pi(\mathfrak{A}_{q_0}; L_{v_0})$, то говорим, что $\mathfrak{A}_{q_0}$ обходит вершину v лабиринта L_{v_0}. Обозначим множество всех вершин, которые обходит $\mathfrak{A}_{q_0}$ в лабиринте L_{v_0}, через $\mathrm{Int}(\mathfrak{A}_{q_0}, L_{v_0})$. Очевидно, $\mathrm{Int}(\mathfrak{A}_{q_0}, L_{v_0}) = \bigcup_{t=1}^{\infty} \{v_t\}$.

Пусть $L_{v_0} \in \mathfrak{L}(\Omega, \Sigma)$ и $\mathfrak{A}_{q_0} \in \mathrm{At}(\Omega, \Sigma)$. Если $\mathrm{Int}(\mathfrak{A}_{q_0}, L_{v_0}) = V(L_{v_0})$, то говорим, что $\mathfrak{A}_{q_0}$ обходит L_{v_0}, в противном случае L_{v_0} является ловушкой для $\mathfrak{A}_{q_0}$. Эти понятия можно расширить до любых сочетаний инициальных или неинициальных автоматов и лабиринтов. Пусть $L \in \mathfrak{L}(\Omega, \Sigma)$ и $\mathfrak{A} \in \mathrm{At}(\Omega, \Sigma)$, причем и L и $\mathfrak{A}$ могут быть как инициальными, так и неинициальными. Рассмотрим понятия "αβ-обходит" и "βα-ловушка", где $\alpha, \beta \in \{\mathrm{I}, \mathrm{A}, \mathrm{E}\}$. Если $\alpha = \mathrm{I}$ ($\alpha \neq \mathrm{I}$), то $\mathfrak{A}$ является инициальным (неинициальным) автоматом, а если $\beta = \mathrm{I}$ ($\beta \neq \mathrm{I}$), то L является инициальным (неинициальным) лабиринтом. Слово **A** указывает на то, что при этом берутся все вершины данного неинициального лабиринта L или все состояния данного неинициального автомата $\mathfrak{A}$, а слово **E** – на то, что берем только некоторую вершину данного неинициального лабиринта L или некоторое состояние данного автомата $\mathfrak{A}$. Так, например, $L_{v_0} \in \mathfrak{L}^I(\Omega, \Sigma)$ является IA-ловушкой для $\mathfrak{A} \in \mathrm{At}(\Omega, \Sigma)$, если для всех $q \in Q_{\mathfrak{A}}$ лабиринт L_{v_0} является ловушкой для $\mathfrak{A}_q$. Автомат $\mathfrak{A} \in \mathrm{At}(\Omega, \Sigma)$ AA-*обходит* лабиринт $L \in \mathfrak{L}(\Omega, \Sigma)$, если для всех $q \in Q_{\mathfrak{A}}$ и всех $v \in V(L)$ автомат $\mathfrak{A}_q$ обходит лабиринт L_v. Если $\alpha, \beta \in \{\mathrm{I}, \mathrm{E}\}$, то вместо "αβ-обходит" и "βα-ловушка" говорим "обходит" и "ловушка". Если $\alpha, \beta \in \{\mathrm{I}, \mathrm{A}\}$, то вместо "αβ-обходит" и "βα-ловушка" говорим "сильно обходит" и "сильная ловушка".

Наряду с поведением автомата в лабиринте можно также рассмотреть поведение системы автоматов в лабиринте. Пусть $L_{v_1, \dots, v_n} \in \mathfrak{L}(\Omega, \Sigma)$ и задана система допустимых автоматов $\mathcal{A} = (\mathfrak{A}^1_{q_1}, \dots, \mathfrak{A}^n_{q_n})$. Если под поведением этой системы в $L_{v_1, \dots, v_n}$ понимать упорядоченный набор поведений $(\pi(\mathfrak{A}^1_{q_1}, L_{v_1}), \dots, \pi(\mathfrak{A}^n_{q_n}, L_{v_n}))$, то эту систему называем *независимой*, а само поведение – *поведением независимой системы*. Если для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $\mathrm{Int}(\mathfrak{A}^i_{q_i}, L_{v_i}) = V$, то говорим, что $\mathcal{A}$ обходит $L_{v_1, \dots, v_n}$, а если $\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Int}(\mathfrak{A}^i_{q_i}, L_{v_i}) = V$, то говорим, что $\mathcal{A}$ A-обходит $L_{v_1, \dots, v_n}$; в противном случае говорим, что $L_{v_1, \dots, v_n}$ является ловушкой и соответственно A-ловушкой для независимой системы $\mathcal{A}$. Как и в случае одного автомата мы можем ввести аналогичным способом понятия "αβ-обходит" и "βα-ловушка" ("αβ-A-обходит" и "βα-A-ловушка"), где $\alpha, \beta \in \{\mathrm{I}, \mathrm{A}, \mathrm{E}\}$. Также, если в лабиринте $L_{v_1, \dots, v_n}$ выполнено $v = v_1 = \dots = v_n$, то вместо $L_{v_1, \dots, v_n}$ пишем L_v.

Рассмотрим теперь более сильный вариант поведения системы автоматов $\mathcal{A}$ в лабиринте $L_{v_1, \dots, v_n} \in \mathfrak{L}(\Omega, \Sigma)$. Закодируем наши автоматы с помощью букв $a_1, \dots, a_n$, считая, что a_i принимает в качестве значения то состояние, в котором находится $\mathfrak{A}^i_{q_i}$, или Λ. Если входной алфавит для автомата $\mathfrak{A}^i_{q_i}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, состоит из букв вида $(\omega, \{a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n\}, \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\})$, где $\omega \in \Omega$ и $\{\sigma_1, \dots, \sigma_m\} \subseteq \Sigma$, а выходной алфавит есть множество $\Sigma \cup \{\kappa\}$, $\kappa \notin \Sigma$, и при этом всегда $\psi_i(q, a) \in \mathrm{Pr}_3(a) \cup \{\kappa\}$, $q \in Q_{\mathfrak{A}^i_{q_i}}$, то систему $\mathcal{A}$ назовем *коллективом*. Интерпретируем функционирование коллектива $\mathcal{A} = (\mathfrak{A}^1_{q_1}, \dots, \mathfrak{A}^n_{q_n})$ в $L_{v_1, \dots, v_n}$ его движением в лабиринте $L_{v_1, \dots, v_n}$ следующим образом. Автомат $\mathfrak{A}^i_{q_i}$ в начальный момент помещаем в вершину v_i лабиринта L, $1 \leqslant i \leqslant n$. Предположим, что в некоторый момент t автомат $\mathfrak{A}^i_{q_i}$ оказался в вершине v^t_i и в состоянии q^t_i. Считаем, что он обозревает окружающую звезду, образованную исходящими из этой вершины дугами. Его входной буквой a^t_i в этот момент является тройка, образованная отметкой вершины, множеством кодов всех автоматов коллектива, находящихся в вершине v^t_i, кроме кода самого автомата $\mathfrak{A}^i_{q_i}$, и множеством отметок звезды. В следующий момент, если $\psi_i(q^t_i, a^t_i) \neq \kappa$, то автомат перемещается в вершину, в которую ведет дуга с отметкой $\psi_i(q^t_i, a^t_i)$, а если $\psi_i(q^t_i, a^t_i) = \kappa$, то остается на месте, и переходит в состояние $\varphi_i(q^t_i, a^t_i)$. Таким образом автомат $\mathfrak{A}^i_{q_i}$ осуществляет движение по лабиринту, последовательно проходя некоторый путь. Последовательность пар $(q^0_i, v^0_i), (q^1_i, v^1_i), \dots$ называем *поведением автома-*

та $\mathfrak{A}^i_{q_i}$ из коллектива $\mathcal{A}$ в лабиринте $L_{v_1,\ldots,v_n}$, если $(q_i^0, v_i^0) = (q_i, v_i)$, v_i^{t+1} есть вершина, в которую переходит автомат $\mathfrak{A}^i_{q_i}$ из вершины v_i^t, находясь в состоянии q_i^t, а q_i^{t+1} есть новое состояние, в которое переходит этот автомат; при этом говорим, что $\mathfrak{A}^i_{q_i}$ обходит вершины $v_i^0, v_i^1, \ldots$ и обозначаем их множество через $\mathrm{Int}(\mathcal{A}, L_{v_1,\ldots,v_n}; i)$. Последовательность $\pi(\mathcal{A}, L_{v_1,\ldots,v_n}) = (q_1^0, \ldots, q_n^0, v_1^0, \ldots, v_n^0), (q_1^1, \ldots, q_n^1, v_1^1, \ldots, v_n^1), \ldots$ такая, что последовательность (q_i^0, v_i^0), $(q_i^1, v_i^1), \ldots$ является поведением автомата $\mathfrak{A}^i_{q_i}$ коллектива $\mathcal{A}$ в лабиринте $L_{v_1,\ldots,v_n}$, называется *поведением коллектива* $\mathcal{A}$ *в лабиринте* $L_{v_1,\ldots,v_n}$. Пусть $\mathrm{Int}(\mathcal{A}, L_{v_1,\ldots,v_n}) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Int}(\mathfrak{A}_{q_i}, L_{v_i}; i)$. Если $\mathrm{Int}(\mathcal{A}, L_{v_1,\ldots,v_n}) = V$, то говорим, что $\mathcal{A}$ обходит $L_{v_1,\ldots,v_n}$; в противном случае $L_{v_1,\ldots,v_n}$ является ловушкой для $\mathcal{A}$. Лабиринт L называем *сильной ловушкой* для $\mathcal{A}$, если для любых $v_1, \ldots, v_n \in V(L)$ лабиринт $L_{v_1,\ldots,v_n}$ является ловушкой для $\mathcal{A}$. Коллектив $\mathcal{A}$ сильно обходит лабиринт L, если для любых $v_1, \ldots, v_n \in V(L)$ коллектив $\mathcal{A}$ обходит лабиринт $L_{v_1,\ldots,v_n}$.

Отметим некоторые автоматы $\mathfrak{A}^{i_1}_{q_{i_1}}, \ldots, \mathfrak{A}^{i_m}_{q_{i_m}}$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m \leqslant n$, коллектива $\mathcal{A} = (\mathfrak{A}^1_{q_1}, \ldots, \mathfrak{A}^n_{q_n})$. Автоматы $\mathfrak{A}^{i_1}_{q_{i_1}}, \ldots, \mathfrak{A}^{i_m}_{q_{i_m}}$ называются *камнями в коллективе* $\mathcal{A}$, если выполняются следующие условия:

а) у автомата $\mathfrak{A}^{i_j}_{q_{i_j}}$, $1 \leqslant j \leqslant m$, только одно состояние — q_{i_j};

б) если для некоторого входа $a = (\omega, \{u_1, \ldots, u_{i_j - 1}, u_{i_j + 1}, \ldots, u_n\}, \{o_1, \ldots, o_m\})$ автомата $\mathfrak{A}^{i_j}_{q_{i_j}}$, $1 \leqslant j \leqslant m$, имеет место $\psi_j(q, a) = o_k$, $1 \leqslant k \leqslant m$, то существует $l \neq i_j$, $1 \leqslant l \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$, такие, что $u_l \notin K$ и $\psi_j(q, a') = o_k$, где $a' = (\omega, \{u'_1, \ldots, u'_{i_j-1}, u'_{i_j+1}, \ldots, u'_n\}, \{o_1, \ldots, o_m\})$, причем $u'_l = u_l$ для всех $l \neq j$, i_l, $1 \leqslant l \leqslant n$, а u'_{i_l} является кодом состояния q_l.

Коллектив $\mathcal{A}$ с m отмеченными автоматами $\mathfrak{A}^{i_1}_{q_{i_1}}, \ldots, \mathfrak{A}^{i_m}_{q_{i_m}}$, которые являются камнями, называется *коллективом из* $n - m$ *автоматов и* m *камней* (*коллективом типа* $(n - m, m)$).

Основная проблематика для автоматов в лабиринтах группируется вокруг задач, условно называемых задачами синтеза и анализа.

Задача синтеза состоит в описании тех автоматов и коллективов автоматов, которые обходят лабиринты из заданного класса. Главными объектами здесь выступают конечные автоматы с камнями, коллективы автоматов, автоматы с магазинной памятью и другие, а также конечные или бесконечные плоские мозаичные лабиринты, различные классы таких лабиринтов (как, например, лабиринты ограниченной связности, специальной геометрической формы), плоские, но немозаичные, мозаичные в пространстве, конечные и бесконечные лабиринты, и их подклассы и обобщения. В случае, когда для класса лабиринтов отсутствуют автоматы заданного типа, обходящие эти лабиринты, возникают такие задачи, как выделение тех лабиринтов, в которых автоматы не решают задачу обхода, т.е. ловушек, и нахождение среди них таких, которые обладают некоторыми свойствами, как, например, нахождение простейших лабиринтов-ловушек.

Задача анализа состоит в описании по заданному автомату или коллективу автоматов всех тех лабиринтов, или лабиринтов определенного вида, которые обходятся этими автоматами. В качестве автоматов и лабиринтов выступают объекты, указанные в задаче синтеза. Продвижение в решении этой задачи в сравнении с задачей синтеза значительно скромнее и состоит по-существу в построении различных позитивных и негативных примеров возможных соответствий между конкретными множествами лабиринтов и автоматов, обходящих в точности эти лабиринты, или же отсутствие таковых и т.п.

К числу задач, примыкающих к указанным задачам синтеза и анализа, относятся поиск конкретных целей в лабиринтах, например, специальных областей или других автоматов, установление определенных свойств лабиринтов, например, наличие специальных циклов, связной сложности и проч. Сюда же могут быть отнесены и вопросы распознавания свойств геометрических изображений, допускающих описание с помощью формальных языков, и др.

В качестве главной модели выступают конечные автоматы в конечных плоских мозаичных и бесконечных плоских мозаичных лабиринтах.

Сначала будут изложены результаты для случая независимых систем конечных автоматов в этих лабиринтах и в некоторых их обобщениях, затем результаты по поведению коллективов автоматов в указанных лабиринтах. Задачи анализа будут изложены отдельно.

§ 2. Поведение независимой системы автоматов в лабиринте

Рассмотрим задачу синтеза для независимых систем автоматов в плоских мозаичных лабиринтах; слово "независимый" в этом параграфе для краткости будем иногда опускать. Также будем предполагать в дальнейшем, что все автоматы будут допустимыми.

Т е о р е м а 2.1. *Не существует конечного допустимого автомата, который сильно обходит все конечные плоские мозаичные лабиринты.*

Это утверждение для конечных плоских шахматных лабиринтов фактически установлено в работе [9] с весьма громоздким обоснованием, использующим среди прочего и язык теории категорий. Элементарное и короткое доказательство теоремы 2.1 дается в работе [78, 79] (формальное отличие мозаичных и шахматных лабиринтов не является здесь существенным). Методически более наглядное доказательство этой теоремы содержится в [72], техника которого позволила решить некоторые другие и упростить уже решенные задачи типа задач обхода [74, 75], о чем будет сказано ниже. Справедлива следующая

Т е о р е м а 2.2. *Не существует конечной независимой системы $\mathfrak{A}$ допустимых автоматов, обходящей любой лабиринт $L_p \in \mathfrak{L}_n$.*

Эта теорема формально обобщает теорему 2.1. Однако при доказательстве утверждения теоремы 2.2 ключевым фактом является справедливость теоремы 2.1 [1, 32, 70]. Основной идеей доказательства этих двух теорем является построение соответствующих ловушек. В работах [9, 78, 79] осуществлена редукция построения плоских мозаичных ловушек к 2-мерным квазипрямоугольным ловушкам. В связи с этим возникает проблема точной характеризации 2-мерных квазипрямоугольных лабиринтов. Приведем одну такую характеризацию, установленную в работе [33].

Пусть τ — циклическая подстановка (e, n, w, s) множества $D = \{e, n, w, s\}$. Определим функцию $\nu: D^+ \to N$, $D^+ = D^*\setminus\{\Lambda\}$, следующим способом:

а) $\nu(\omega) = 0$, если $\omega \in D$;

б) $\nu(\omega\omega') = i \in \{1, 0, -1, -2\}$, где i такое, что $\omega' = \tau^i(\omega)$;

в) $\nu(\alpha) = \sum_{i=1}^{k-1} \nu(\omega_i\omega_{i+1})$ для любого $\alpha = \omega_1 \ldots \omega_k \in D^+$, где $k \geq 2$.

Пусть L — некоторый 2-мерный лабиринт. Определим каноническое вращение π_L лабиринта L следующим образом. Пусть $D_0 \subset D$. Обозначим для любого $\omega \in D$ через $\tau_D(\omega)$ значение $\tau^k(\omega)$, где $k = \min\{n \in N\setminus\{0\} \mid \tau^n(\omega) \in D_0\}$. Для

$v \in V(L)$, определим $(\pi_L)_v$ таким образом, что $((\pi_L)_v)(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma_v$, есть дуга из Γ_v с отметкой $\tau_{l,r}(l_\gamma)$. Пусть $f = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ — некоторая сторона лабиринта (L, π_L). Пусть $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ отметки дуг $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ соответственно. Можно показать, что $\nu(\sigma_1 \dots \sigma_n \sigma_1) = \nu(\sigma_{1+_n k} \dots \sigma_{n+_n k} \sigma_{1+_n k})$ для любого $k \in \mathbf{N}$, где через $i +_n k$, $1 \leqslant i \leqslant n$, обозначена сумма $i + k$ по модулю n. Обозначим через $\nu(f)$ значение $\nu(\sigma_1 \dots \sigma_n \sigma_1)$. Имеет место следующая

Т е о р е м а 2.3. [33] *Пусть (L, π_L) — конечный 2-мерный лабиринт с канонической системой вращения π_L и пусть $f_1, \dots, f_n$ — стороны лабиринта (L, π_L). Лабиринт L является квазипрямоугольным тогда и только тогда, если:*

1) $\epsilon(L, \pi_L) = 2$,

2) *существует только одна сторона лабиринта L, например f_1, для которой $\nu(f_1) = -4$, а для всех других $\nu(f_i) = 4$, $1 < i \leqslant n$.*

Достаточно близкая характеризация к описанной получена в работе [62], в которой отправной задачей являлась проблема описания плоских графов, возникающих при проектировании интегральных схем; в ней предложен алгоритм, проверяющий за $O(n)$ шагов свойство квазипрямоугольности 2-мерного лабиринта, у которого n вершин, а также алгоритм для прямоугольной укладки такого лабиринта за $O(n^2)$ шагов.

Отметим, что при доказательстве теорем 2.1 и 2.2 в работах [9, 78, 79] строились соответствующие конечные плоские правильные ловушки (n-мерный правильный лабиринт L_{v_0, l_0} называется *n-мерной правильной ловушкой для системы $\mathcal{A}$*, если ни один автомат системы $\mathcal{A}$ не обходит вершину v_0). Некоторые свойства этих ловушек описываются следующими утверждениями.

Т е о р е м а 2.4. [2] *Для любого инициального автомата $\mathfrak{A}$ с n состояниями существует конечная плоская правильная ловушка с не более, чем $C \cdot \exp[12n \log_2 2n]^{1/2}$ вершинами.*

Т е о р е м а 2.5. [47] *Для любого инициального автомата существует конечная плоская правильная r-связная ловушка, такая, что $r \leqslant 3$.*

Справедлива следующая теорема (см., например, [80]).

Т е о р е м а 2.6. *Для любой независимой системы $\mathfrak{B}$ из n инициальных автоматов существует конечная плоская правильная r-связная ловушка, такая, что $r \leqslant (\lfloor n/2 \rfloor + 1)/2$.*

Эти утверждения могут быть усилены с грубыми оценками для нерегулярных ловушек и систем автоматов. Остается открытым вопрос о понижении указанных оценок и получении соответствующих нижних оценок.

Так, например, известно, что множество всех односвязных конечных плоских шахматных лабиринтов может быть обойдено одним инициальным автоматом с некоторым фиксированным числом состояний ([6], [19], [20] и др.), что с учетом теоремы 2.5 оставляет открытым вопрос о понижении оценки в ней до двух.

Построение бесконечных плоских мозаичных ловушек для всех конечных независимых систем автоматов изучалось в [1, 75]. Достаточно общий результат здесь может быть сформулирован следующим образом.

Т е о р е м а 2.7. [75] *Существует бесконечная плоская мозаичная ловушка L такая, что для любой конечной независимой системы $\mathfrak{M}$ инициальных автоматов и для любых $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}$ и l_v, $v \in V(L)$, существует шар в $\mathbf{Z}^2$, в котором лежит множество $\operatorname{Int}(\mathfrak{A}, l_v)$.*

Сначала была построена инициальная бесконечная плоская мозаичная ловушка, в которой каждый автомат, стартуя из начальной вершины (одной и той же для всех автоматов), не выйдет из шара радиуса, зависящего от этого автомата [1]. Отсюда следует и существование бесконечной инициальной плоской мозаичной ловушки для всех конечных систем автоматов. Затем была построена неинициальная бесконечная плоская мозаичная ловушка, в которой радиус шара, из которого не выходит любая конечная система автоматов, зависит от этой системы и стартовых вершин [75].

Указанные теоремы могут быть обобщены на случай других типов плоских мозаичных ловушек. С учетом результатов работы [70] в [75] установлены следующие теоремы.

Теорема 2.8. *Для любой конечной независимой системы автоматов существует конечная плоская мозаичная $\alpha\beta$-ловушка и $\alpha\beta$-A-ловушка, $\alpha, \beta \in \{\mathrm{I}, \mathrm{A}, \mathrm{E}\}$.*

Теорема 2.9. *Существует бесконечная плоская мозаичная $\alpha\beta$-ловушка и $\alpha\beta$-A-ловушка, $\alpha, \beta \in \{\mathrm{I}, \mathrm{A}, \mathrm{E}\}$, для всех конечных независимых систем автоматов.*

В связи с теоремой 2.7 возникает вопрос о существовании бесконечной ловушки следующего типа. Для любого $v_0 \in \mathbf{Z}^n$, $r \in \mathbf{R}^+$ и $V \subset \mathbf{Z}^n$ обозначим

$$\mathrm{Bl}_n(v_0, r) = \{v \in Z^n : (\sum_{i=1}^{n} (\Pi p_i(v) - \Pi p_i(v_0))^2)^{1/2} \leqslant r\}$$

и $\operatorname{diam} V = \max\{d(u, v) \mid u, v \in V\}$. Бесконечный плоский мозаичный лабиринт L назовем *плоской однородной ловушкой для класса* $\mathcal{A}$ автоматов, если для любого $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}$ существует $r = r(\mathfrak{A})$ такое, что для любого $v \in V(L)$, выполнено $\mathrm{Int}(\mathfrak{A}, L, v) \subseteq \mathrm{Bl}_2(v, r)$. Можно показать, что если $\mathcal{A}$ класс всех автоматов, то такая ловушка не существует, а если $\mathcal{A}$ конечен, то она существует [75].

Изложенные результаты показывают ограниченность аналитических возможностей автоматов, т.е. в определенном смысле характеризуют их негативно. Вместе с тем интересно выяснить, какие вопросы могут быть решены с их помощью, точнее для каких содержательно интересных классов лабиринтов существуют автоматы или системы, обходящие их. Случай, когда в качестве независимой системы выступает только один автомат, рассматривался в работах [3, 66, 73].

Пусть L — некоторый конечный плоский мозаичный лабиринт. Для любой стороны $f = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ (стороны берутся по отношению к каноническому вращению) лабиринта L обозначим через $[f]$ множество вершин $\{\Pi p_i(\gamma_j) \mid 1 \leqslant i \leqslant 2, 1 \leqslant j \leqslant n\}$. Через $F(L)$ обозначим класс всех сторон данного лабиринта L, очерчивающих конечные области. Число $\max\{\operatorname{diam}[f] \mid f \in F(L)\}$ назовем *циклическим диаметром* лабиринта L. Пусть L — некоторый конечный плоский шахматный лабиринт. Через $\mathbf{D}(L)$ обозначим множество всех конечных дыр лабиринта L. Число $\max\{\operatorname{diam} D \mid D \in \mathbf{D}(L)\}$ называется *дырочным диаметром* лабиринта L.

Теорема 2.10. *Для любого $d \in \mathbf{N}$ существует инициальный автомат $\mathfrak{A}$, сильно обходящий класс всех конечных плоских мозаичных лабиринтов, циклический диаметр которых ограничен константой d, при этом число состояний $\mathfrak{A}$ равно Cd, а время обхода лабиринта с n вершинами из этого класса равно Cn.*

Первоначально подобный результат был получен в [66], где оценка для числа состояний была Cd^2 и где рассматривались конечные плоские шахматные лабиринты (изучался на самом деле дырочный диаметр, но, как легко показать, это не является существенным). Этот результат был усилен в работе [73] и приводится здесь в том виде, в каком он там сформулирован. Следующий результат в определенном смысле усиливает теорему 2.10. Обозначим через $\mathrm{Kv}(i, j)$ квадрат в $\mathbf{R}^2$ с центром в точке $(i, j) \in \mathbf{Z}^2$. Пусть D — некоторая дыра плоского шахматного лабиринта L. Пусть l и m целые числа, $m \neq 0$, и $d \in \mathbf{R}$. Назовем конечный плоский шахматный лабиринт L (d, l, m)-ограниченным, если для любой его конечной дыры D множество $\cup\{\mathrm{Kv}(i, j) \mid (i, j) \in D\}$ лежит в некоторой полосе ширины d, тангенс угла наклона которой равен l/m.

Теорема 2.11. [66] *Для любых $d \in \mathbf{R}$ и $l, m \in \mathbf{Z}$, $m \neq 0$, существует ини-*

найдется автомат с числом состояний не более $C \cdot d$, который обходит класс всех линеаризованных (d, k, m)-ограниченных конечных плоских шахматных лабиринтов.

Остаются открытыми вопросы понижения оценок в этих теоремах. Отметим, что автоматы в них, обходя соответствующие лабиринты, не фиксируют факт обхода их переходом в состояние остановки. Как показывает следующее утверждение, этот факт не является случайным.

Теорема 2.12. [15] *Не существует конечного автомата, который обходит и останавливается после обхода каждого лабиринта из:*

1) класса всех конечных плоских прямоугольных лабиринтов, являющихся деревьями;

2) класса всех конечных плоских мозаичных лабиринтов, являющихся деревьями;

3) класса всех односвязных конечных плоских шахматных лабиринтов.

Ранее в работе [48] показано, что не существует автомат, который обходит и останавливается после обхода любого лабиринта из класса всех конечных плоских 2-связных мозаичных (шахматных) лабиринтов.

В алгоритмическом плане интерес представляет задача синтеза, когда по заданному классу лабиринтов требуется установить существует ли алгоритм, который по произвольному автомату устанавливает, обходит ли автомат все лабиринты из этого класса. Здесь нет достаточно общих результатов, имеются лишь отдельные примеры разрешимых и неразрешимых случаев. Укажем их.

Пусть $k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим класс $\mathfrak{L}^k_1$ всех конечных плоских шахматных лабиринтов, лежащих в полосе ширины k, параллельной оси x-ов. Пусть $\mathfrak{L}^k_2$ — подкласс всех древовидных, $\mathfrak{L}^k_3$ — подкласс всех петель (лабиринты, не являющиеся древовидными), $\mathfrak{L}^k_4$ — подкласс всех змеевых конечных плоских мозаичных лабиринтов из $\mathfrak{L}^k_1$ соответственно. (У змеевого лабиринта все вершины имеют степень не более двух.)

Теорема 2.13. [18] а) *Для любых $i, k \in \mathbb{N}$, $1 \le i \le 4$, существует алгоритм, который по любому автомату устанавливает, сильно ли обходит автомат все лабиринты из класса $\mathfrak{L}^k_i$;*

б) существует алгоритм, устанавливающий по заданному автомату, сильно обходит он или нет любой (древовидный) змеевой лабиринт из класса всех конечных плоских прямоугольных лабиринтов;

в) не существует алгоритма, устанавливающего по заданному автомату, сильно обходит он или нет любой (змеевой) древовидный лабиринт из класса всех конечных плоских шахматных лабиринтов.

Имеет место и следующее предложение (см., например, [80]).

Предложение 2.1. *Не существует алгоритма, устанавливающего по заданному автомату, сильно ли он обходит любой односвязный лабиринт из класса всех конечных плоских шахматных лабиринтов.*

В работе [61] исследуется специальный лабиринт, который строится следующим образом. Берется лабиринт, образованный первым октантом лабиринта $\mathfrak{B}^2$. Затем склеиваются его вершины вида $(x, 0)$ и (x, x); получается как бы коническая поверхность с соответствующей координатной сеткой; линия склейки считается выделенной. Рассматриваются автоматы, которые при помещении их в заданную вершину этого лабиринта движутся только вправо или вверх. Задача состоит в том, чтобы выяснить, существует ли алгоритм, который для любого такого автомата устанавливает возможность выхода его в выделенном состоянии на линию склейки. Эта задача решена лишь в частных случаях.

Отметим здесь, что первое построение шахматной ловушки для конечного автомата было осуществлено в работе [19, 20], где допускалось рассмотрение трехмерных лабиринтов. Условие трехмерности было существенным для простоты построения такой ловушки. Более трудной оказалась задача построения ловушки для автомата на плоскости. В работе [46] строится такая ловушка, которая не является мозаичным графом, но оказывается планарной. Построить такую ловушку было существенно проще, чем доказать теорему 2.1, которая была установлена позже.

§ 3. Поведение коллектива автоматов в лабиринте

Рассмотрим задачу синтеза для коллективов автоматов в лабиринтах. Сначала рассмотрим случай плоских мозаичных лабиринтов. Выясним, какие минимальные по числу автоматов коллективы могут обходить все такие лабиринты.

Пусть $\mathfrak{L}$ — некоторый класс плоских мозаичных лабиринтов. На множестве всех пар $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ определим частичный порядок $\leq$, полагая $(a, b) \leq (c, d)$ тогда, когда $a \leq c$ и $b \leq d$. Предикат $P_{\mathfrak{L}}(i, j)$ определим таким образом, что $P_{\mathfrak{L}}(a, b) = 1$, если существует коллектив типа (a, b), обходящий все лабиринты из $\mathfrak{L}$, и $P_{\mathfrak{L}}(a, b) = 0$, если такой коллектив не существует. Нетрудно видеть, что предикат $P_{\mathfrak{L}}$ является монотонной функцией относительно этого частичного порядка. Точнее, пусть $(a, b) \leq (c, d)$. Тогда, если $P_{\mathfrak{L}}(a, b) = 1$, то $P_{\mathfrak{L}}(c, d) = 1$, и если $P_{\mathfrak{L}}(c, d) = 0$, то $P_{\mathfrak{L}}(a, b) = 0$. Пару (a, b) назовем *нижней единицей* для $P_{\mathfrak{L}}$, если $P_{\mathfrak{L}}(a, b) = 1$ и $P_{\mathfrak{L}}(c, d) = 0$ для любого (c, d), такого, что $(c, d) \leq (a, b)$ и $(c, d) \neq (a, b)$. Пусть $T[P_{\mathfrak{L}}]$ — множество всех нижних единиц для $P_{\mathfrak{L}}$. Ясно, что задание $P_{\mathfrak{L}}$ однозначно определяется указанием $T[P_{\mathfrak{L}}]$. Удобно изображать $T[P_{\mathfrak{L}}]$ с помощью графика, называемого характеристическим для $P_{\mathfrak{L}}$, следующего вида: берем целочисленные точки в первом квадранте системы координат i и j, и выделяем в нем $T[P_{\mathfrak{L}}]$, помечая его вершины символом +.

Теорема 3.1. *Для класса $\mathfrak{L}_0$ и предиката $P_{\mathfrak{L}_0}$ имеет место равенство $T[P_{\mathfrak{L}_0}] = \{(1,2), (2,0)\}$, при этом некоторые коллективы типа (1,2) обходят лабиринты из класса $\mathfrak{L}_0$ за время $O(n^3)$, а типа (2,0) — за время $O(n^2)$, и останавливаются после обхода.*

Характеристический график для $T[P_{\mathfrak{L}_0}]$ приведен на рис. 1. В работе [54] показано, что $P_{\mathfrak{L}_0}(1,5) = 1$, причем существуют некоторые коллективы типа (1,5), которые обходят и останавливаются после обхода любого лабиринта из $\mathfrak{L}_0$. В работе [6] дан эскиз доказательства того, что $P_{\mathfrak{L}_0}(1,2) = P_{\mathfrak{L}_0}(2,0) = 1$ (полное доказательство можно найти, например, в работе [71]). И наконец, в работе [32] был приведен эскиз доказательства того, что $P_{\mathfrak{L}_0}(1,1) = 0$, а полное доказательство этого факта было дано в работе [12].

В работе [6] показано, что автомат со счетчиком обходит класс $\mathfrak{L}_0$, но за время $O(n^2)$. В работе [28] теорема 3.1 обобщается на случай плоских прямоугольных лабиринтов с соответствующими оценками времени обхода вида $O(n^2)$ и $O(n^3)$, а для автомата со счетчиком и одним камнем это время равно $O(n^2)$. Не известно, обходит ли автомат со счетчиком все прямоугольные лабиринты.

Следует заметить, что, как и в параграфе 2, возможно "неожиданное" расширение класса $\mathfrak{L}_0$, такое, что для каждого его уже найдется автомат с одним камнем, обходящий его.

Теорема 3.2. *Для любого $k \in \mathbb{N}$ существует коллектив типа (1,1), сильно обходящий все конечные плоские (связные) мозаичные лабиринты, у которых не более k (компонент связности) дыр, при этом автомат имеет не более C^k состояний.*

В работе [58] было установлено, что существует коллектив типа (1,1), который сильно обходит все конечные плоские мозаичные лабиринты, имеющие не более двух дыр. В работе [59] показано то же самое, но в случае, когда у лабиринта не больше трех дыр. Затем в [40] была показана первая часть теоремы 3.2 для случая конечных плоских шахматных лабиринтов, а позже в [27] была установлена оценка для числа состояний автомата и упрощено доказательство первой части теоремы.

Возможности коллективов автоматов при обходе лабиринтов много шире, чем возможности независимых систем автоматов. Об этом свидетельствуют следующие утверждения, в которых речь идет о конечных и бесконечных плоских мозаичных лабиринтах.

Т е о р е м а 3.3. [74] *Для класса $\mathfrak{L}_2$ и предиката $P_{\mathfrak{L}_2}$ имеет место равенство* $\{(2,3),(3,2),(4,1),(5,0)\} \subset T[P_{\mathfrak{L}_2}]$.

Неполный характеристический график для $T[P_{\mathfrak{L}_2}]$ приведен на рис. 2.

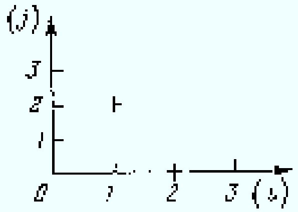

Рис. 1

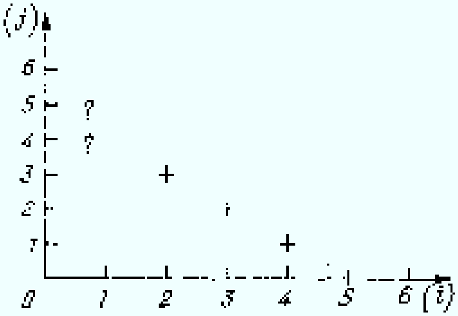

Рис. 2

В работах [8, 28] было установлено, что $P_{\mathfrak{L}_2}(1,7) = 1$, а в работе [57] — что $P_{\mathfrak{L}_2}(1,5) = 1$; наконец, с помощью достаточно общей конструкции была доказана теорема 3.3 [74] (очевидно, $P_{\mathfrak{L}_2}(0,j) = 0$). Доказательство теоремы 3.3 проводилось посредством конструирования соответствующей ловушки для коллективов автоматов типов (2,2), (3,1) и (4,0). Затем строились примеры коллективов всех типов $(i,j) \in T[P_{\mathfrak{L}_2}]$, которые обходят все плоские мозаичные лабиринты. Так же, как и для систем автоматов, интересно выяснить, какие достаточно широкие классы лабиринтов могут быть обойдены коллективами простых типов. Заметим, что если перейти к классу $\mathfrak{L}_2'$ всех плоских мозаичных лабиринтов, не содержащих бесконечных дыр, то остается справедливым утверждение, аналогичное теореме 3.3.

Т е о р е м а 3.4. [74] *Для класса $\mathfrak{L}_2'$ и предиката $P'_{\mathfrak{L}_2}$ имеет место равенство* $\{(2,3),(3,2),(4,1),(5,0)\} \subset T[P_{\mathfrak{L}_2'}]$.

В [74] показано, что $P_{\mathfrak{L}_2}(1,3) = 0$. Отсюда следует, что $T[P_{\mathfrak{L}_2}]$, а также $T[P_{\mathfrak{L}_2'}]$, равно или $\{(1,5),(2,3),(3,2),(4,1),(5,0)\}$, или $\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1),(5,0)\}$. Существует гипотеза, что $T[P_{\mathfrak{L}_2}] = T[P_{\mathfrak{L}_2'}] = \{(1,5),(2,3),(3,2),(4,1),(5,0)\}$. Остается открытым и вопрос о характеристическом графике коллективов автоматов для класса всех плоских шахматных лабиринтов, имеющих конечное число конечных дыр.

В случае, когда класс $\mathfrak{L}$ состоит только из одного лабиринта $\mathbf{Z}^2$, можно показать, что характеристический график предиката $P_{\mathbf{Z}^2}$ имеет вид, указанный на рис. 3 (см., например, [65]).

Интересно отметить, что уже для плоского дерева L с двумя бесконечными ветвями выполнено $P_L(1,1) = 0$, а также, что для полуплоскости $\dot{\mathbf{Z}}^2$ $P_{\dot{\mathbf{Z}}^2}(1,1) = 1$, но $P_{\dot{\mathbf{Z}}^2}(1,0) = 0$ [58].

Перейдем к рассмотрению лабиринтов более общего вида. Имеет место следующая

Теорема 3.5. *Не существует коллектива автоматов, обходящего все 3-мерные инициальные конечные мозаичные лабиринты.*

Доказательство этой теоремы проводится посредством построения ловушки для заданного коллектива автоматов. Это утверждение было впервые сформулировано и частично обосновано в [5] для случая, когда все автоматы стартуют из одной вершины. Доказательство этого утверждения для случая старта из любого набора вершин дается в работе [30], где показано, что для любого коллектива существует

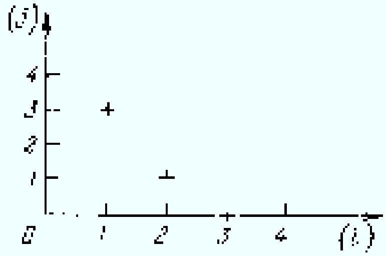

Рис. 3

ловушка ограниченной "толщины", лежащая в двух плоскостях. Можно показать, что так же, как и в случае систем автоматов в плоскости, существует бесконечная 3-мерная ловушка сразу для всех коллективов автоматов [77].

Назовем бесконечный n-мерный мозаичный лабиринт n-мерной универсальной ловушкой, если любой коллектив инициальных автоматов, стартуя из любого множества вершин этого лабиринта, не обходит его. Назовем однородной n-мерную универсальную ловушку, если для любого коллектива $\mathcal{A}$ автоматов существует $r = r(\mathcal{A})$ такое, что при любых $v_1, \dots, v_n \in V(L)$ имеет место $\mathrm{Int}(\mathcal{A}, L_{v_1,\dots,v_n}) \subseteq$ $\subseteq \mathrm{Bl}_a(v, r + \mathrm{diam}\{v_1, \dots, v_n\})$, где a — некоторая точка множества $\mathbf{Z}^n$.

Теорема 3.6. [77] *Существуют 3-мерные однородные ловушки.*

Из теоремы 3.1 следует, что для коллектива автоматов в 2-мерных плоских конечных мозаичных лабиринтах в общем случае не существует ловушка. Для 3-мерных конечных плоских мозаичных лабиринтов, как следует из теоремы 3.6, такие ловушки существуют всегда. Тем самым возникает вопрос, нельзя ли, находясь еще в классе планарных лабиринтов, строить конечные ловушки для произвольных коллективов автоматов.

Теорема 3.7. [58] *Для любого коллектива автоматов существует конечная планарная ловушка, имеющая вид кубического графа.*

Можно показать, что справедлива

Теорема 3.8. *Существует планарная однородная ловушка, имеющая вид кубического графа.*

Аналогичный вопрос может быть поставлен по отношению к плоским лабиринтам. Установлено, что коллектив инициальных автоматов типа (4,0) не может обойти все плоские кубические лабиринты [41], ранее в [6] это установлено для случая (3,0); для типов (i, j), где $i + j > 4$, вопрос остается открытым; существует гипотеза, что он имеет отрицательный ответ. Заметим, что в этом случае возникает определенная техническая специфика. Считается, что автомат может при прохождении дуги графа с вращением помечать ее (автомат с указателем); эта пометка определяет положение каждой дуги в звезде с центром, куда он перешел. Дальнейшие действия автомата состоят в выборе дуги движения, стирания старой пометки и пометки дуги явного движения. Считается что в стартовой звезде пометка дуги сделана. В случае коллектива автоматов действия автомата в вершине зависят также от состояний всех автоматов, находящихся в ней.

В работе [27] установлено также, что для любых $d, k \in \mathbb{N}$, класс $\mathfrak{L}_{k,d}$ плоских лабиринтов с вращением, у которых степень любой вершины не более d и число вершин, имеющих порядок больше трех (т.е. число вершин, которые принадлежат границам более чем трех областей), не превышает k, может быть обойден одним автоматом с указателем, имеющим не более c^k состояний.

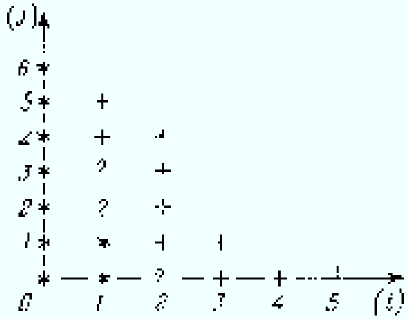

Рис. 4

Одним из примеров класса специальных лабиринтов является лабиринт условно называемый сигнатурным. Он представляет собой п.м. лабиринт, в котором каждой вершине приписан набор знаков координат этой вершины и содержащий точку (0,0). В работах [88, 76] рассмотрена задача поиска коллективом автоматов вершины такого лабиринта с координатами (0,0); при этом для автоматов этого коллектива функции переходов и выходов уточняются с учетом указанных отметок вершин. На множестве пар (i, j) также вводим предикат P, характеризующий наличие или отсутствие коллектива элементов типа (i, j), находящего начало координат; он очевидно монотонен, и множество Тр его нижних единиц определяет P. Аналогичным образом, как и выше, можно определить характеристический график.

Т е о р е м а 3.9. [88, 76] *Для предиката* P *поиска начала координат в сигнатурном п.м. лабиринте имеют место равенства* $P(1,0) = 0$, $P(1,1) = 0$, $P(1,4) = 1$, $P(2,1) = 1$ *и* $P(3,0) = 1$.

В [88] доказано, что $P(1,0) = 0$ и $P(4,0) = 1$, а в работе [76] доказаны остальные равенства из теоремы 3.9. (На рис. 4 коллективы, отмеченные знаком +, решают проблему поиска, знаком * не решают эту проблему, а знаком ? отмечены те, про которые неизвестно, решают они эту проблему или нет.)

Пусть $\mathfrak{L}$ — класс лабиринтов, $\mathfrak{M}$ — класс коллективов $\mathcal{A}$ допустимых автоматов для $\mathfrak{L}$ и предикат $P(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = 1$, если коллективы $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$, помещенные в любые вершины любого лабиринта из $\mathfrak{L}$, встречаются, и $P(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = 0$ в противном случае. Задача нахождения значения P по $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ называется *задачей о встрече*. Изучение этого предиката ведется при разных допущениях. Приведем некоторые из них.

Пусть задан класс лабиринтов $\mathfrak{L}$ и два типа коллективов автоматов (i_1, j_1) и (i_2, j_2). Задача о типовой встрече для них состоит в выяснении следующего: существуют ли коллективы автоматов указанных типов, которые при помещении каждого из них в произвольные стартовые вершины любого лабиринта указанного класса через некоторое время окажутся в ситуации, когда в некоторой вершине будут находиться представители каждого из коллективов, которые не являются камнями;

эту задачу мы назовем $(i_1, j_1; i_2, j_2)$-задачей о типовой встрече в $\mathfrak{L}$, а при $i_1 = i_2$ и $j_1 = j_2$ соответственно (i_1, j_1)-задачей о типовой встрече в $\mathfrak{L}$. В случае, когда речь идет о (i, j)-задаче и при этом требуется, чтобы представители этого типа, которые должны встречаться при любом стартовом положении в любом лабиринте из $\mathfrak{L}$, совпадали, мы говорим о сильной (i, j)-задаче о типовой встрече в $\mathfrak{L}$. Для четверки $(i_1, j_1; i_2, j_2)$ определяем предикат $\mathbf{P}^0_{\mathfrak{L}}(i_1, j_1; i_2, j_2)$, равный 1, если имеется положительное решение соответствующей $(i_1, j_1; i_2, j_2)$-задачи о типовой встрече, и равный 0 в противном случае. Для (i, j)-задачи и сильной (i, j)-задачи о типовой встрече в $\mathfrak{L}$ аналогичным образом определяем соответственно предикаты $\mathbf{P}^1_{\mathfrak{L}}$ и $\mathbf{P}^2_{\mathfrak{L}}$. Определим частичный порядок $\leqslant$ для четверок: $(a_1, a_2, a_3, a_4) \leqslant (b_1, b_2, b_3, b_4)$, если $a_i \leqslant b_i$, $1 \leqslant i \leqslant 4$. Ясно, что предикаты $\mathbf{P}^0_{\mathfrak{L}}, \mathbf{P}^1_{\mathfrak{L}}$ и $\mathbf{P}^2_{\mathfrak{L}}$ являются монотонными и потому их описание сводится к указанию нижних единиц, множество которых обозначаем соответственно через $\mathbf{T}[\mathbf{P}^0_{\mathfrak{L}}]$, $\mathbf{T}[\mathbf{P}^1_{\mathfrak{L}}]$ и $\mathbf{T}[\mathbf{P}^2_{\mathfrak{L}}]$.

Как следует из теоремы 3.8, в случае, когда $\mathfrak{L}$ является классом всех трехмерных конечных мозаичных лабиринтов, $\mathbf{T}[\mathbf{P}^0_{\mathfrak{L}}] = \mathbf{T}[\mathbf{P}^1_{\mathfrak{L}}] = \mathbf{T}[\mathbf{P}^2_{\mathfrak{L}}] = \varnothing$, т.е. $\mathbf{P}^0_{\mathfrak{L}} = \mathbf{P}^1_{\mathfrak{L}} \equiv \mathbf{P}^2_{\mathfrak{L}} \equiv 0$. Для других классов 3-мерных мозаичных лабиринтов задача не рассматривалась. Для классов $\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ задачу о встрече можно решать так. Для предикатов $\mathbf{P}^0_{\mathfrak{L}}$ и $\mathbf{P}^1_{\mathfrak{L}}$ в качестве второго коллектива выбираем неподвижные автоматы, а в качестве коллектива первого типа берем тот, который обходит указанный класс лабиринтов. Ясно, что в этом случае встреча коллективов произойдет. Логически возможна и ситуация, когда выбранные коллективы, каждый из которых не обходит рассматриваемый класс лабиринтов, тем не менее встречаются. Как следует из [31, 32], для класса $\mathfrak{L}_0$ это невозможно, и тем самым вычисление предикатов $\mathbf{P}^0_{\mathfrak{L}_0}$ и $\mathbf{P}^1_{\mathfrak{L}_0}$ сводится к исследованию взаимодействия пары коллективов, один из которых обходит все указанные лабиринты, а другой в нем неподвижен. Также ясно, что в случае класса $\mathfrak{L}_0$ предикат $\mathbf{P}^2_{\mathfrak{L}_0}$ равен предикату $\mathbf{P}^1_{\mathfrak{L}_0}$ (например, [80]). Значит, справедливы следующие утверждения.

Т е о р е м а 3.13. *Для предикатов* $\mathbf{P}^2_{\mathfrak{L}_0}$ *и* $\mathbf{P}^1_{\mathfrak{L}_0}$ *имеет место соотношение* $\mathbf{T}[\mathbf{P}^0_{\mathfrak{L}_0}] = \mathbf{T}[\mathbf{P}^2_{\mathfrak{L}_0}] = \mathbf{T}[\mathbf{P}_{\mathfrak{L}_0}]$.

Т е о р е м а 3.14. *Для предиката* $\mathbf{P}^0_{\mathfrak{L}_0}$ *имеет место*

$$T[\mathbf{P}^0_{\mathfrak{L}_0}] = \{(1,2; 0,1), (0,1; 1,2), (2,0; 0,1), (0,1; 2,0)\}.$$

Отметим, что для классов $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ нет полного описания рассмотренных предикатов.

В работе [65] рассматривается класс $\mathfrak{L}_4$ конечных плоских мозаичных лабиринтов циклического вида (лабиринт L называется *циклическим*, если в $G(L)$ все вершины степени 2) и установлено, что $\mathbf{P}^2_{\mathfrak{L}_4}(1,1) = 1$. Там же показано, что если в качестве класса $\mathfrak{L}$ берем все лабиринты, имеющие вид симметрического дерева, у которого степень любой вершины не больше некоторого заранее данного натурального числа d, то $\mathbf{P}^2_{\mathfrak{L}}(1,1) = 1$. Отсюда следует, что $\mathbf{P}^2_{\mathfrak{L}}(1,1) = 1$ и в случае, если в качестве $\mathfrak{L}$ взять все плоские конечные древовидные мозаичные лабиринты (см. теорему 3.13). Кроме этого рассматриваются случаи, когда $\mathfrak{L}$ состоит либо только из одномерной, либо только из двумерной ленты. В первом случае показано, что $\mathbf{P}^2_{\mathfrak{L}}(1,0) = 0$ и $\mathbf{P}^2_{\mathfrak{L}}(1,1) = 1$; во втором случае показано, что $\mathbf{P}^2_{\mathfrak{L}}(1,2) = 0$, и $\mathbf{P}^2_{\mathfrak{L}}(1,3) = 1$. В первом случае, если вместо коллективов автоматов рассматриваются автоматы со счетчиками, то, когда они снабжены одним счетчиком, предикат $\mathbf{P}^2_{\mathfrak{L}}$ равен нулю, а когда — двумя счетчиками, то $\mathbf{P}^2_{\mathfrak{L}}$ равен единице. В некоторых из этих случаев устанавливаются оценки для времени встречи.

Задача о встрече допускает вариацию за счет различных допущений относительно "узнаваемости" автоматами друг друга, "своих" и "чужих" камней и т.п. Как, в [61] для задачи о встрече на плоскости в случаях, когда автоматы распознают свои и чужие камни или же не обладают этим свойством, установлено, что $\mathbf{P}^{1}_{\mathcal{K}}(1,2) = 1$.

Содержательной задачей является задача о взаимодействии в лабиринтах двух автоматов $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$, имитирующих поведение типа "хищник – жертва". Автоматы $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ взаимодействуют в конечных плоских шахматных лабиринтах, имеющих вид квадрата, и их задачами являются: для хищника $\mathfrak{A}_1$ "догнать" жертву, а для жертвы $\mathfrak{A}_2$ "убежать" от хищника. Установлено, что при любых $L, n \in \mathbf{N}$ существует $\mathfrak{A}_1$ с числом состояний $O(nL)^2$, который догоняет за время $O(nL^4)$ любой $\mathfrak{A}_2$ с числом состояний не более, чем n, в квадрате со стороной не более, чем L, при любом стартовом положении автоматов $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ [67, 68]. Там же установлено, что не существует автомата $\mathfrak{A}_1$, догоняющего любой $\mathfrak{A}_2$ в произвольном квадрате с фиксированной длиной стороны L, $L \geq 8$. Первый результат обобщается на случай различных "обзоров" и "скоростей" $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$. Установлена алгоритмическая разрешимость свойства хищника догонять любую жертву по указанным параметрам.

Начато исследование, цель которого выяснить возможности анализа лабиринтов с помощью различных обобщений автоматов, таких, как автоматы со счетчиками, магазинами, стеками, многоголовочные и др.

В работе [17] установлено, что не существует автомат с магазином, который обходит все конечные кубические плоские графы, в то время как линейно ограниченная машина Тьюринга эту задачу решает. Там же отмечается, что существует автомат с магазином, который может обойти все плоские конечные мозаичные лабиринты.

В работе [15] показано, что автомат с магазином обходит все конечные плоские односвязные шахматные лабиринты (конечные плоские мозаичные древовидные лабиринты) и останавливается каждый раз после обхода.

В работе [29] введен такой тип плоской конечной мозаичной ловушки, которая может быть построена для каждого коллектива автоматов, однако существует двухголовочный автомат, для которого нельзя построить ловушку такого типа. Тем самым, при анализе лабиринтов возможности многоголовочных автоматов превышают возможности коллективов автоматов.

В работе [65] показано, что автомат с одним магазином или автомат с одним камнем не может обойти ни одномерную ленту, ни все одномерные полуленты. Конечный автомат с двумя камнями, с одним камнем и одним счетчиком, с двумя счетчиками или с одним стеком может обойти ленту. Кроме того, автомат с одним камнем не может обойти любым образом размеченную ленту, а для автомата с одним счетчиком ленту можно разметить так, что он обходит ее. Далее в работе [65] показано, что существует:

а) автомат с одним стеком или двумя счетчиками;

б) коллектив, состоящий из одного автомата со счетчиком и двух камней;

в) коллектив, состоящий из одного конечного автомата и одного автомата со счетчиком;

г) коллектив типа $(1,3)$;

д) коллектив типа $(2,1)$,

которые обходят плоскость. Также показано, что не существует:

а) коллектива, состоящего из автомата с одним магазином и одного камня;

б) коллектива типа $(1,2)$;

в) коллектива типа $(2,2)$,

которые обходят плоскость.

§ 4. Распознавание свойств лабиринтов с помощью автоматов

Приведем результаты, связанные с задачей анализа для коллективов автоматов.

Пусть задан коллектив $\mathcal{A}$ и некоторый предикат $\mathbf{P}(x)$ на множестве $\mathfrak{L}$ лабиринтов. Будем говорить, что $\mathcal{A}$ вычисляет $\mathbf{P}$, если при его запуске в любой лабиринт $L \in \mathfrak{L}$ происходит переход в некоторый заключительный набор состояний автоматов из $\mathcal{A}$ только тогда, когда $P(L) = 1$; если еще при этом коллектив $\mathcal{A}$ переходит в другое заключительное состояние, когда $P(L) = 0$, то говорим, что $\mathcal{A}$ сильно вычисляет $\mathbf{P}$. Задачу "вычисляет (сильно вычисляет) или нет коллектив $\mathcal{A}$ предикат P" называем задачей анализа.

Возможным путем описания предикатов, вычислимых с помощью коллективов автоматов, является построение соответствующей алгебры над вычислимыми предикатами, сохраняющей свойство вычислимости. Пример такой алгебры для множества всех регулярных событий принадлежит Клини [35]. Она содержит три операции: объединение, конкатенацию и итерацию множеств слов. В работе [34] устанавливается, что операции конкатенации и итерации для лабиринтов, вообще говоря, нарушают вычислимость. Точнее, пусть Ω — некоторое конечное множество символов. Обозначим через $\Omega^{(2)}$ множество всех конечных плоских шахматных лабиринтов прямоугольного вида, вершины которых отмечены символами из Ω. В работе [34] приводятся примеры подмножеств из $\{0, 1\}^{(2)}$, для которых соответствующие предикаты вычислимы некоторыми автоматами, а конкатенации (склеивание по строкам лабиринтов из $\{0, 1\}^{(2)}$, имеющих одну и ту же высоту) и итерации этих подмножеств лабиринтов не всегда образуют подмножество из $\{0, 1\}^{(2)}$, для которого соответствующий предикат является вычислимым каким-то автоматом.

На множестве $\Omega^{(2)}$ можно рассматривать так называемые трехсторонние детерминированные (недетерминированные) автоматы, т.е. автоматы, не умеющие двигаться вверх, а только налево, направо и вниз. Обозначим класс этих автоматов через $\mathbf{C}[2\mathbf{TR}-\mathbf{DA}]$ ($\mathbf{C}[2\mathbf{TR}-\mathbf{NA}]$). В случае, когда Ω — однобуквенный алфавит, вместо $\mathbf{C}[2\mathbf{TR}-\mathbf{DA}]$ ($\mathbf{C}[2\mathbf{TR}-\mathbf{NA}]$) пишем $\mathbf{C}[2\mathbf{TR}-\mathbf{DA}(0)]$ ($\mathbf{C}[2\mathbf{TR}-\mathbf{NA}(0)]$). Для любого автомата $\mathfrak{A}$ из одного из введенных классов через $\mathbf{P}(\mathfrak{A})$ обозначим предикат, который вычисляет $\mathfrak{A}$ на множестве $\Omega^{(2)}$, а через $\mathbf{R}(\mathfrak{A})$ — область истинности этого предиката. Для любых трехсторонних автоматов $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ и $\mathfrak{A}_3$ одного из введенных классов нас интересует вопрос, выполнены ли соотношения $\mathbf{R}(\mathfrak{A}_1) \subseteq \mathbf{R}(\mathfrak{A}_2)$, $\mathbf{R}(\mathfrak{A}_1) \cap \mathbf{R}(\mathfrak{A}_2) = \phi$ и $\mathbf{R}(\mathfrak{A}_1) = \mathbf{R}(\mathfrak{A}_2)$, а также $\mathbf{R}(\mathfrak{A}_3) = \Omega^{(2)}$ и $\mathbf{R}(\mathfrak{A}_3) = \phi$; соответствующие проблемы называем проблемами $\mathbf{R}_1 \subseteq \mathbf{R}_2$, $\mathbf{R}_1 \cap \mathbf{R}_2 = \phi$, $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2$, $\mathbf{R} = \Omega^{(2)}$ и $\mathbf{R} = \phi$.

В работе [39] показывается, что для класса $\mathbf{C}[2\mathbf{TR}-\mathbf{DA}(0)]$ задачи $\mathbf{R}_1 \subseteq \mathbf{R}_2$, $\mathbf{R}_1 \cap \mathbf{R}_2 = \phi$ и $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2$ алгоритмически разрешимы, а для класса $\mathbf{C}[2\mathbf{TR}-\mathbf{DA}]$ задачи $\mathbf{R}_1 \subseteq \mathbf{R}_2$ и $\mathbf{R}_1 \cap \mathbf{R}_2 = \phi$ неразрешимы. Утверждается, что существуют также предикаты на множестве $\Omega^{(2)}$, которые вычисляются недетерминированными трехсторонними автоматами и не вычисляются детерминированным трехсторонним автоматом. Ранее в [36] показано, что для классов $\mathbf{C}[2\mathbf{TR}-\mathbf{DA}(0)]$ и $\mathbf{C}[2\mathbf{TR}-\mathbf{NA}(0)]$ задача $\mathbf{R} = \phi$ алгоритмически разрешима. Там же показано, что задача $\mathbf{R} = \Omega^{(2)}$ также алгоритмически разрешима для класса $\mathbf{C}[2\mathbf{TR}-\mathbf{DA}(0)]$, а для класса $\mathbf{C}[2\mathbf{TR}-\mathbf{NA}]$ задачи $\mathbf{R} = \Omega^{(2)}$, $\mathbf{R}_1 \subseteq \mathbf{R}_2$ и $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2$ алгоритмически не разрешимы.

В работе [35] показывается, что предикаты $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ и $\mathbf{P}_3$ на множестве $\{0\}^{(2)}$, области истинности которых суть множества всех лабиринтов из $\{0\}^{(2)}$ размеров $n \times n^2$, $n \times k^n$ и $n \times n!$ соответственно, не являются вычислимыми недетерминированными автоматами.

В работе [49] проведено исследование по выяснению того, какие классы размеченных лабиринтов с отмеченной границей распознаваемы недетерминированными автоматами в том смысле, что автомат находит в них выход, переходя в заключительное состояние. Введено специальное кодирование таких лабиринтов, для которого показано, что в возникающем формальном языке описания лабиринтов распознаваемы только те лабиринты, которые кодируются регулярными языками.

В работе [4] рассматривается класс всех квадратных лабиринтов из §0.1[12]. Изучается вопрос о том, какие предикаты, определенные на этом классе, вычислимы с помощью коллективов автоматов. Показано, что для всякого k существует коллектив типа $(1, 2k+4)$, вычисляющий такие предикаты, которые не вычисляются ни одним коллективом типа $(1, k)$; этот факт оказывается верным и при сравнении типов $(1, 2)$ с $(1, 1)$ и $(1, 1)$ с $(1, 0)$.

В работе [54] показано, что предикаты $\mathbf{P}_4$ и $\mathbf{P}_5$ на множестве всех конечных плоских шахматных лабиринтов, области истинности которых соответственно все циклические и все многосвязные лабиринты, которые вычислимы некоторым коллективом типа $(1,1)$. Также показано, что для предиката на Ω_n, определенного множеством всех односвязных лабиринтов, существует коллектив типа $(1,2)$, строго вычисляющий его.

Другим классом лабиринтов и специальным вопросом для них является вариант, рассмотренный в работе [52] (см. также [51]). Берется лабиринт в виде графа с n вершинами, которые соединены ориентированным простым циклом; каждая дуга в нем отмечается 0; из каждой вершины исходят еще по две дуги, отмеченные соответственно буквами 1 и 2. В этом графе отмечена одна вершина в качестве начальной и группа вершин в качестве конечных. Такой лабиринт называется *ниточным*, если в нем существует путь, идущий по дугам лабиринта, отмеченными буквами 1 и 2, который ведет из начальной в какую-то из конечных вершин. Показано, что существование коллектива типа $(1, f)$, который вычисляет класс всех ниточных лабиринтов, эквивалентно следующему утверждению.

Для любого конечного алфавита Σ и любого $A \subseteq \Sigma^*$ и любой функции $f(n) \geq \log_2 n$, если A вычисляется некоторой недетерминированной машиной Тьюринга с длиной рабочей зоны $f(n)$, тогда A вычисляется некоторой детерминированной машиной Тьюринга с длиной рабочей зоны $f(n)$. Отсюда следует, что существование коллектива типа $(1, f)$, который вычисляет класс всех ниточных лабиринтов, приводит к положительному ответу на открытую проблему совпадения классов языков, распознаваемых детерминированными и недетерминированными линейно ограниченными машинами Тьюринга. Для коллективов автоматов установлено, что коллективы типа $(1,2)$ не решают эту задачу [31].

В работе [45] рассматриваются два типа автоматов с печатью (машины Тьюринга): первому типу разрешается ходить, в общем случае, только по размеченному, конечному плоскому шахматному лабиринту и печатать, а второму дополнительно можно выходить за пределы лабиринта, но там уже не печатать. Показано, что классы сильно вычислимых предикатов $\mathbf{P}$ для этих типов автоматов совпадают. Заметим, что если аналогичным способом рассматривать два таких типа для автоматов без печати (т.е. просто автоматов), то это условие не выполнено: второй тип автоматов оказался бы сильнее.

Ряд работ посвящен изучению лабиринтов с помощью представления их словами формальных языков. Некоторые алгебраические характеристики общего вида взаимодействия автоматов и лабиринтов приводятся в работе [44]. В ней устанавливается, что класс лабиринтов, представимых в машинах Тьюринга, совпадает с классом так называемых лабиринтов формальных языков.

В работе [22] установлено, что если предикат $\mathbf{P}_6$ на множестве всех конечных плоских шахматных лабиринтов имеет областью истинности класс всех таких циклических лабиринтов или имеющих точно n дыр или содержащих простое число вершин или содержащих две одинаковые двери, то в первом и втором случаях $\mathbf{P}_6$ не является строго вычислимым одним автоматом, но строго вычислим коллективом автоматов типа (1,1) и (1,2) соответственно, в третьем случае $\mathbf{P}_5$ строго вычислим коллективом типа (1,5), а в четвертом — коллективом типа (1,4). Показано, что коллективы типа $(1, 2k + 4)$ сильнее типа $(1, k)$ в том смысле, что конструктивно указываются предикаты, сильно вычислимые коллективами типа $(1, 2k + 4)$, но не типа $(1, k)$. Далее показано, что если предикат $\mathbf{P}$ сильно вычислим коллективом типа $(1, k)$, то он вычислим машиной Тьюринга с длиной рабочей зоны $\log_2 n$, а также, что такая двухбуквенная машина с зоной вида $c \log_2 n$ эквивалентна коллективу типа $(1, 3c + 3)$, где n — число вершин лабиринта. Также установлено, если некоторый коллектив типа $(1, k)$ сильно вычисляет $\mathbf{P}$ и $l \geqslant k$, то нет алгоритма, который бы для любого коллектива типа $(1, l)$ устанавливал, строго вычисляет этот коллектив предикат $\mathbf{P}$ или нет.

К задаче анализа примыкает вопрос оценки времени вычисления соответствующего предиката $\mathbf{P}$. В случае, когда под $\mathbf{P}$ понимается обход автоматом лабиринта, этот вопрос уже затрагивался в ранее упомянутых работах [28, 66, 73], а в работе [87] он являлся главным, но применительно к автомату с печатью.

Рассмотрим класс $\mathfrak{L}(r)$ всех r-лабиринтов. Пусть $\mathfrak{A}$ — допустимый автомат для $\mathfrak{L}(r)$, который оснащен дополнительной функцией стирания и печатания символов из $\mathbf{E}_p$ на дугах лабиринтов из $\mathfrak{L}(r)$. Автомат $\mathfrak{A}$ называется *α-универсальным*, где $\alpha \in \{0, *, Д^*, Д\}$, если он сильно обходит соответственно произвольный 0-лабиринт, произвольный r-лабиринт, произвольное 0-дерево и произвольное r-дерево.

Пусть $\mathfrak{A}$ — α-универсальный автомат, $\mathbf{T}_\alpha(\mathfrak{A}, n)$ — максимальное время, требуемое для обхода автоматом $\mathfrak{A}$ произвольного n-вершинного α-лабиринта, $\alpha \in \{0, *, Д^*, Д\}$. Пусть $\mathbf{T}_\alpha(n, p, r)$ — наименьшее из $\mathbf{T}_\alpha(\mathfrak{A}, n)$, где $\mathfrak{A}$ с p состояниями, причем $\mathbf{T}_\alpha(n, p, r) = \infty$, если α-универсальных автоматов нет.

Т е о р е м а 4.2 [84, 87]. *При $n \geqslant 2$ имеют место соотношения:*

1) $\mathbf{T}_Д(n, 1, 0) = \mathbf{T}_Д(n, 2, 0) = \mathbf{T}_Д(n, 3, 0) = \mathbf{T}_Д(n, 1, 1) = \infty$,

$$3n - 3 \leqslant \mathbf{T}_Д(n, p, r) \leqslant \begin{cases} (n-1)^2 & \text{при } p = 1, \quad r = 2, \\ 3n & \text{при } p \in \{2, 3\}, \quad r \geqslant 1, \\ 2n - 1 & \text{при } p \geqslant 4, \quad r \geqslant 0; \end{cases}$$

2) $\mathbf{T}_{Д^*}(n, p, r) = \infty$ *при* $p \in \{1, 2, 3\}$, $r \in \{0, 1\}$,

$$\mathbf{T}_{Д^*}(n, p, r) \leqslant \begin{cases} 3(n-1)^2 & \text{при } p \in \{1, 2, 3\}, \quad r = 2, \\ (n-1)^2 & \text{при } p \in \{1, 2, 3\}, \quad r \geqslant 3, \\ 2n & \text{при } p \geqslant 4, \quad r \geqslant 0; \end{cases}$$

3) $\mathbf{T}_0(n, p, 0) = \mathbf{T}_0(n, 1, 1) = \mathbf{T}_0(n, 2, 1) = \infty$ *при* $p \geqslant 1$;

$$2n - 3 \leqslant \mathbf{T}_0(n, p, r) \leqslant \begin{cases} 2n^2 & \text{при } p \in \{1, 2, 3\}, \quad r \geqslant 2, \\ 4n & \text{при } p \geqslant 4, \quad r \geqslant 1. \end{cases}$$

4) $\mathbf{T}_*(n, p, r) = \infty$ *при* $p \geqslant 1$, $r \in \{0, 1\}$,

$$\mathbf{T}_*(n, p, r) \leqslant \begin{cases} 2n^2 & \text{при } p \in \{1, 2, 3, 4\}, \quad r = 2, \\ 2n(n+1) & \text{при } p \geqslant 5, \quad r = 2, \\ 2n^2 & \text{при } p \geqslant 1, \quad r \geqslant 3. \end{cases}$$

Аналогично вводится понятие s-универсальности для коллектива $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$. При этом предполагается, что если $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ одновременно делают шаг по одной и той же дуге, то отметку ставит $\mathfrak{A}_1$. Через $\mathrm{At}^2_u(p, r)$, $u \in \{0, s\}$, обозначим множество всех таких u-универсальных коллективов, у которых любой из автоматов имеет p состояний. Аналогичным образом, как и выше, вводится функция $T_s((\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2), n)$. В [87] показано, что при $n \geq 2$ для любого коллектива $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2) \in \mathrm{At}^2_0(p, r) \cup \mathrm{At}^2_s(p, r)$, $p \geq 1$, $r \geq 0$ справедливо $T_u((\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2), n) \geq n - 1$. Там же показано, что существуют $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2) \in \mathrm{At}^2_s(4, 0)$ и $(\mathfrak{A}'_1, \mathfrak{A}'_2) \in \mathrm{At}^2_0(5, 2)$, такие, что $T_s((\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2), n) \leq n - 1$ и $T_0((\mathfrak{A}'_1, \mathfrak{A}'_2), n) \leq 2n$ для любого $n \geq 2$.

Конкретный прикладной аспект автоматного анализа лабиринтов содержится в работе [87]. В ней автомат с печатью анализирует диаграммы Мура. У них диаграмм входные символы закодированы элементами множества E_k, выходные символы — элементами множества E_r и одна вершина выбрана в качестве начальной. Такие диаграммы называются (k, r)-лабиринтами, а если в них стерты еще и все выходные символы, то получаем (k)-графы; множество последних обозначается через P_k, а сильно связная часть его через R_k. Обозначим также $H_{k,n} = \{L \in H_k \mid |V(L)| = n\}$, $H^*_{k,n} = \{L \in H_k \mid |V(L)| \leq n\}$, $H \in \{P, R\}$. Автомат с печатью имеет дополнительный выход b со значениями из E_p. Пусть $\mathrm{At}(k, r, p)$ множество всех таких автоматов. Автомат $\mathfrak{A} \in \mathrm{At}(k, r, p)$ помещается в вершину a (k, r)-графа L и перемещается по L до тех пор, пока $b = 0$; при $b \neq 0$ пара $\mathrm{Rez}(L, \mathfrak{A}) = (t, b(t))$, где t — время, объявляется результатом работы $\mathfrak{A}$, и считается, что $\mathfrak{A}$ применим к L и проверяет его за время t. Он также называется простым экспериментом для L; в случае, когда он является таковым для каждого L из класса $\mathfrak{L}$, то говорится, что он простой эксперимент для $\mathfrak{L}$. Длиной простого эксперимента $\mathfrak{A}$ для $\mathfrak{L}$ называется минимальное из всех $t \geq 0$ таких, что $\mathfrak{A}$ проверяет любой лабиринт из $\mathfrak{L}$ за время, не превосходящее t. $\mathfrak{A}$ называется безусловным для $\mathfrak{L}$, если для любых $L_1, L_2 \in \mathfrak{L}$ имеет место $\mathrm{Tr}(\mathfrak{A}, L_1; d) = \mathrm{Tr}(\mathfrak{A}, L_2; d)$, где d время, за которое $\mathfrak{A}$ проверяет хотя бы один из лабиринтов L_1, L_2; в противном случае $\mathfrak{A}$ есть условный эксперимент. Эксперимент $\mathfrak{A}$ является *тестовым* для L относительно $\mathfrak{L}$, если для любого $L' \in \mathfrak{L}$, $L' \neq L$, $\mathrm{Rez}(L', \mathfrak{A}) \neq \mathrm{Rez}(L, \mathfrak{A})$. Эксперимент $\mathfrak{A}$ является *диагностическим* для $\mathfrak{L}$, если $\mathrm{Rez}(L_1, \mathfrak{A}) \neq \mathrm{Rez}(L_2, \mathfrak{A})$ для любых $L_1, L_2 \in \mathfrak{L}$, $L_1 \neq L_2$. Вершины v и v' k-графов L и L' называются *отличимыми автоматом за время* t, если существует диагностический простой эксперимент $\mathfrak{A}$ для класса $\{L_v, L'_{v'}\}$ длины t. Вершины v и v' называются отличимыми автоматом, если они отличимы автоматом за конечное время. Простой эксперимент $\mathfrak{A}$ для $\mathfrak{L}$ называется *установочным* для $\mathfrak{L}$, если для любых $L, L' \in \mathfrak{L}$ из равенства $\mathrm{Rez}(L, \mathfrak{A}) = \mathrm{Rez}(L', \mathfrak{A}) = (t, b)$ следует неотличимость автоматом вершин v_t и v'_t, в которые переходит $\mathfrak{A}$ после t шагов в L и L'.

Пусть $k \geq 1$, $m \geq n \geq 2$ и $g(k, n)$ — минимальное время, достаточное для отличимости автоматом вершин n-вершинного (k)-графа, а $g(k, n, m)$ — минимальное время, достаточное для отличимости автоматом всех пар вершин, где первая вершина из n-вершинного, а вторая из m-вершинного (k)-графа.

Т е о р е м а 4.2 [87]. *Для $g(k, n)$ и $g(k, n, m)$ справедливы следующие оценки:*

$$g(k, n) \leq \begin{cases} 2n - 4 & \text{при } k \geq 2,\ n \geq 4, \\ n - 1 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$g(k, n, m) \leq \begin{cases} 2n - 1 & \text{при } k \geq 2,\ m > n \geq 2, \\ 2n - 1 & \text{при } k \geq 2,\ m = n \geq 3, \\ n & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Устанавливается, что для любых $k \geq 2$ и $n \geq 4$ существует n-вершинный (k)-граф

L с попарно отличимыми автоматом вершинами, таков, что существует простой эксперимент, тестовый для L относительно $[L]$, а также, что существует простой эксперимент, диагностический для $[L]$ (здесь $[L]$ множество всех (L)-графов, изоморфных L таким способом, что в $[L]$ лабиринты различаются только начальными вершинами).

Пусть $L \in R_{k,n}$ и $F \subseteq R_k$, где F такое, что $L \in F$ и L отличим автоматом от любого $L' \in F$, $L' \neq L$. Обозначим $l_F(L)$ наименьшую длину безусловного простого эксперимента, тестового для L относительно F; $l(L, r) = \max_F l_F(L)$, где максимум берется по всем указанным выше классам F мощности r, $l(L) = l_{R_k^*}(L)$, где R_k^* класс попарно отличимых автоматом лабиринтов, который для любого лабиринта $L' \in R_k$ содержит некоторый неотличимый от него лабиринт L''. Положим $l(k, n, r) = \max\{l(L, r) \mid L \in R_{k,n}\}$ и $l(k, n) = \max\{l(L) \mid L \in R_{k,n}\}$. Пусть $(R^*_{k,n})_r$ — класс всех $F \subseteq R^*_{k,n}$, $|F| = r \geqslant 2$, которые состоят из попарно отличимых автоматом лабиринтов, и $(P^*_{k,n})_r = \{F \subseteq P^*_{k,n} \mid |F| = r \geqslant 2\}$. Обозначим через $v(F)$ $(h(F))$ наименьшую длину условного простого эксперимента, диагностического (установочного) для F. Также обозначим $v(k, n, r) = \max\{v(F) \mid F \in (R^*_{k,n})_r\}$ $(h(k, n, r) = \max\{h(F) \mid F \in (P^*_{k,n})_r\})$, $v(k, n) = v(\bar{R}^*_{k,n})$, где $\bar{R}^*_{k,n}$ класс попарно отличимых автоматом лабиринтов, который для каждого лабиринта $L \in R^*_{k,n}$ содержит некоторый неотличимый от него автоматом лабиринт L', и $h(k, n) = h(P^*_{k,n})$.

Т е о р е м а 4.3. [87] *Верны следующие соотношения.*

1) *Пусть* $k \geqslant 2$, $n \geqslant 2$ *и* $r \geqslant 3$. *Тогда*

$$l(k, n, r) = v(k, n, r) = h(k, n, r) = (1/2)n(n+1)(k-1) + n \quad \text{при } r \geqslant n(k-1) + 2$$

и

$$l(k, n, r) \sim v(k, n, r) \sim h(k, n, r) \sim \begin{cases} 2r(n-r) & \text{при} \quad 3 \leqslant r \leqslant n/3, \\ (n+r)^2/4 & \text{при} \quad n/3 \leqslant r \leqslant n, \\ r(n - r/2k) & \text{при} \quad n \leqslant r \leqslant n(k-1)+1, \end{cases}$$

при $k, n, r \to \infty$.

2) *Если* $k \geqslant 2$, $r \geqslant 3$ *и* $r = o(n)$ *при* $n \to \infty$, *то* $l(k, n, r) \sim v(k, n, r) \sim h(k, n, r) \sim 2n(r-1)$ *при* $n \to \infty$.

3) $l(k, n) = v(k, n) = h(k, n) = (1/2)n(n+1)(k-1) + n$ *при* $k \geqslant 2$ *и* $n \geqslant 2$.

Простой эксперимент $\mathfrak{A}$ для L_v, $L \in P_k$, называется *установочным для* L, если из $\operatorname{Rez}(L_v, \mathfrak{A}) = \operatorname{Rez}(L_{v'}, \mathfrak{A}) = (a, b)$, $v, v' \in V(L)$, следует, что $v_t = v'_t$, где v_t и v'_t соответственно вершины, в которые попадает $\mathfrak{A}$ после t шагов в лабиринтах L_v и $L_{v'}$. Лабиринт L называется *ориентируемым*, если для него существует установочный эксперимент. Обозначим через $H_{k,n}$ множество всех $K \in P_{k,n}$ с занумерованными вершинами и не содержащих начальную вершину, через $S_{k,n}$ — множество всех ориентируемых лабиринтов из $H_{k,n}$ и через $E_{k,n}$ — класс всех попарно неизоморфных (в смысле перенумерации вершин) лабиринтов из $S_{k,n}$. В работе [87] показано, что $|S_{k,n}| \sim n^{kn}$ и $|E_{k,n}| \sim n^{kn}/n!$, и что доля ориентируемых лабиринтов в $H_{k,n}$ стремится к 1 при $k \geqslant 2$, $n \geqslant 2$ и $k + n \to \infty$.

В заключение отметим, что некоторые из изложенных здесь результатов могут быть распространены на случай более широкого толкования лабиринтов и машин, например, если допускать кратность ребер в графах-лабиринтах, размеченность их ребер и вершин, произвольного выбора типа машин, и т.п. Такого рода обобщения основных объектов — лабиринтов, машин и их взаимодействия приведены в [8, 12, 13, 14, 42].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Antelmann H., Budach L., Rollik H.A. On universal traps // Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik. – 1979. – V. 15, № 3. – P. 123–131.
2. Antelmann H. An application of the prime number theorem in automata theory // ICS PAS Reports 411. – 1980. – P. 9–11.
3. Asser G. Bemerkungen zum labirinth-problem // Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik. – 1977. – V. 13, № 4, 5. – P. 203–216.
4. Blum M., Hewitt C. Automata on a 2-dimensional tape // IEEE Conference Record. 8th Annual Symposium on Switching and Automata Theory. – 1967. – P. 155–160.
5. Blum M., Sakoda W. On the capability of finite automata in 2 and 3 dimensional space // The Proceedings of the 18th Annual Symposium on Foundations of Computer Science. – 1977. – P. 147–161.
6. Blum M., Kozen D. On the power of the compass // The Proceedings of the 19th Annual Symposium on Foundations of Computer Science. 1978. – P. 132–142.
7. Budach L. On the Solution of the Labyrinth Problem for Finite automata // Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik. 1975. – V. 11, № 10–12. – P. 661–672.
8. Budach L. Environments, labyrinths and automata // Lecture Notes in Computer Science 56. – Springer. 1977. – P. 54–64 (65).
9. Budach L. Automata and labyrinths // Math. Nachrichten 86. – 1978. P. 195–282.
10. Budach L. Counterautomata in Mazes // Proc. Workshop ACT. – Poznan, 1979.
11. Budach L. Two pebbles don't suffice // Foundation of Computing Theory 79. V. 1. – Berlin, 1980. – P. 578–589.
12. Budach L., Meinel Ch. Umwelten und automaten in umwelten // Seminarberichte Sektion Mathematik d. Humboldt–Universität zu Berlin. – 1980. – № 23.
13. Budach L., Meinel Ch. Environments and Automata // Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik. – 1982. – V. 18, № 1, 2 P. 3–40, № 3. – P. 115–139.
14. Budach L., Waack S. On the Halting Problem for Automata in Cones // Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik. – 1982. – V. 18, № 9. – P. 489–499.
15. Bull M., Hemmerling A. Finite embedded trees and simply connected mazes cannot be searched by halting finite automata // Journal of Inf. Process and Cybern. EIK. – 1990. – V. 26, № 1–2. – P. 65–73.
16. Coy W. Automata in labyrinths // Fundamentals of Computation Theory / M. Karpinski, ed. – Berlin: Springer–Verlag, 1977. – P. 65–71.
17. Coy W. Of Mice and Maze // Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik. – 1978. – V. 14, № 5. – P. 227–247.
18. Danecki R., Karpinski M. Decidability results on plane automata searching mazes // Proc. 2nd Int. FCT'79 Berlin Conf. Akademie Verlag. 1979. – P. 84–91.
19. Döpp K. Automaten in Labirinthen I // Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik. – 1971. – V. 7, № 2. – P. 79–94.
20. Döpp K. Automaten in Labirinthen II // Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik. – 1971. – V. 7, № 3. – P. 167–190.
21. Ejsmont M. Decidability of maze properties by automata // Proc. Workshop on Algorithms and Computation Theory. – Poznan, September 1980. – P. 24–25.
22. Ejsmont M. Problems in Labyrinths Decidable by Pebble Automata // Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik. – 1984. – V. 20, № 12. – P. 623–632.
23. Fischer P.C. Multi-tape and infinite-state automata: A survey // Comm. ACM. – 1965. – V. 8, № 12. – P. 799–805.
24. Graw B. On Tape Complexity Classes and Savitch Mazes // Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik. – 1981. – V. 17, № 10. – P. 501–510.
25. Habasinski Z., Karpinski M. A codification of Blum–Sakoda 7-pebbles algorithm // ICS PAS Reports 448. – 1981.
26. Hemmerling A., Kriegel K. On searching of special classes of mazes and finite embedded graphs // Lecture Notes in Computer Science 176. – 1984. – P. 291–300.
27. Hemmerling A. 1-pointer automata searching finite plane graphs // Z. Math. Logik Grundlag. Math. – 1986. – B. 32. – S. 245–256.
28. Hemmerling A. Remark on the power of compass // Lecture Notes in Computer Science 233. – Berlin: Springer–Verlag, 1986. – P. 405–413.
29. Hemmerling A. Three-Dimensional Traps and Barrages for Cooperating Automata // Lecture Notes in Computer Science 278. – Berlin: Springer–Verlag. 1987. – P. 197–203.
30. Hemmerling A. Normed Two-Plane Traps for Finite Systems of Cooperating Compass Automata // J. Inf. Process Cybern. EIK. – 1987. – V. 23, № 8, 9. – P. 453–470.

31. Hoffmann F. One pebble does not suffice to search plane labyrinths // Lecture Notes in Computer Science. 1981. V. 117. P. 433–444.
32. Hoffmann F. 1-Kiesel-Automaten in Labyrinthen // Report R-Math-06/82. 1982. AdW der DDR, Berlin.
33. Hoffmann F., Kriegel K. Quasiplane labyrinths. Preprint P-Math-20/83. 1983. AdW der DDR, Berlin.
34. Inoue K., Takanami I., Nakamura A. A note on two-dimensional finite automata // Information Processing Letters. 1978. V. 7, №1. P. 49–52.
35. Inoue K., Nakamura A. Two-dimensional finite automata and unacceptable functions // International Journal of Computer Mathematics. Section A. 1979. V. 7. P. 207–213.
36. Inoue K., Takanami I. A note on decision problems for three-way two-dimensional finite automata // Information Processing Letters. 1980. V. 10. P. 245–248.
37. Karpinski M., Boas P. Van Emde On the Mouse in the First Octant Problem // EATCS Bull. 12, 1980.
38. Клини С. Представление событий в нервных сетях и конечных автоматах. Автоматы. М.: ИЛ, 1956. С. 15–67.
39. Kinber E.B. Three-way automata on rectangular tapes over a one-letter alphabet // Information Sciences. 1985. V. 35. P. 61–77.
40. Kriegel K. Universelle 1-Kiesel-Automaten für k-komponentige Labyrinthe // Report R-Math-04/84. 1984. AdW der DDR, Berlin.
41. Kozen D. Automata and Planar Graphs // Fundamentals of Computation Theory, FCT-79 / L. Budach, ed. Mat. Res. 2. Berlin: Akademie-Verlag, 1979. P. 243–254.
42. Meinel C. The Importance of Plane Labyrinths // Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik. 1982. V. 18, № 7/8. P. 419–422.
43. Meinel C. On the Structure of Endomorphism Monoids and Automorphism Groups of Group Labyrinths in the Category code // Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik. 1982. V. 18, № 9. P. 501–505.
44. Milgram D.L., Rosenfeld A. Array automata and array grammars // IFIP 71 Conference Proceedings. North Holland, Amsterdam, 1972. P. 69–74.
45. Milgram D. A region crossing problem for array bounded automata // Information and Control. 1976. V. 31, №2. P. 147–152.
46. Müller H. Endliche Automaten und Labyrinthe // Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik. 1971. V. 7, №4. P. 261–264.
47. Müller H. Automata catching labyrinths with at most three components // Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik. 1979. V. 15, № 1/2. P. 3–9.
48. Mylopoulos J. On the recognition of topological invariants by 4-way finite automata // Computer Graphics and Image Processing. 1972. V. 1. P. 308–316.
49. Mylopoulos J. On the application of formal languages and automata theory to pattern recognition // Pattern Recognition. V. 4, №1. P. 37–51.
50. Rollik H.A. Automaten in planaren Graphen // Acta Informatica. 1980. V. 13. P. 287–298.
51. Savitch W. Relations between nondeterministic and deterministic tape complexities // Journal of Computer and System Science. 1970. V. 4. P. 177–192.
52. Savitch W. Maze recognizing automata and nondeterministic tape complexity // Journal of Computer and System Science. 1973. V. 7. P. 389–404.
53. Shah A.N. On traversing properties of array automata // Technical report 274, Computer Science Center. University of Maryland. 1973.
54. Shah A.N. Pebble automata on arrays // Computer Graphics and Image Processing. 1974. V. 3. P. 236–246.
55. Shannon C.E. Presentation of a maze-solving machine // Cybernetics, Trans. of the 8th Conf. of the Josiah Macy Jr. Found / Ed. H. Foerster. 1951. P. 173–180.
56. Stahl S. The embeddings of a graph: A survey // Journal of Graph Theory. 1978. V. 2. P. 275–298.
57. Szepietowski A. A finite 5-pebble-automaton can search every maze // Information Processing Letters. 1982. V. 15, №5. P. 199–204.
58. Szepietowski A. On searching Plane Labyrinths by 1-pebble Automata // EIK. 1983. V. 19, № 1/2. P. 79–84.
59. Szepietowski A. Remarks on searching labyrinths by automata // Lecture notes in Computer Science. 1983. P. 457–464.
60. Taniguchi K., Kasami T. Some decision problems for two-dimensional nonwriting automata // IJCI Japan. 1971. P. 578–586.

61. [illegible] On Two Problems of Mice // Rend. Circ. mat. Palermo, 1982. — V. 31, № 2. — P. 249–262.
62. Vijayan G., Wigderson A. Rectilinear graphs and their embeddings // SIAM J. Comput. 1985. — V. 14. — P. 355–372.
63. Анджанс А.В. О возможностях автоматов при обходе одномерных областей // Латвийский математический ежегодник. Вып. 27. — Рига, 1983. — С. 191–201.
64. Анджанс А.В. Возможности автоматов при обходе плоскости // Проблемы передачи информации. — 1983. — Т. 19, вып. 3. — С. 78–89.
65. Анджанс А.В. Поведение детерминированных и вероятностных автоматов в лабиринтах. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Рига, 1987. — 90 с.
66. Богомолов С.А., Салий В.Н., Зыричев А.П. Автоматы и графы. — Саратов: Изд-во Саратовского университета, 1992. — 150 с.
67. Грунская В.И. О взаимодействии автоматов типа "хищник – жертва". Дипломная работа. — МГУ, 1988.
68. Грунская В.И. О динамическом взаимодействии автоматов // Математическая кибернетика и ее приложения к биологии. — М.: Изд-во МГУ, 1987. — С. 8–18.
69. Килибарда Г. O dva karakteristična problema funkcionalnih sistema sa automatom opremljenih zatvaranja. Doktorska disertacija. — Beograd, 1989. — 113 s.
70. Килибарда Г. Об универсальных лабиринтах-ловушках для конечных множеств автоматов // Дискретная математика. — 1990. — Т. 2, вып. 1. — С. 72–79.
71. Килибарда Г. Об обходе конечных лабиринтов системами автоматов // Дискретная математика. — 1990. — Т. 2, вып. 2. — С. 71–82.
72. Килибарда Г. Новое доказательство теоремы Будаха–Подколзина // Дискретная математика. — 1991. — Т. 3, вып. 3. — С. 135–146.
73. Килибарда Г. О минимальной сложности обхода одного класса мозаичных лабиринтов (в печати).
74. Килибарда Г. О минимальных универсальных коллективах автоматов для плоских лабиринтов (в печати).
75. Килибарда Г. Об одномерных универсальных лабиринтах-ловушках для автоматов (в печати).
76. Килибарда Г. О поведении коллективов автоматов в плоских мозаичных лабиринтах с пометками (в печати).
77. Килибарда Г.О., Ушчумлич Ш. О лабиринтах-ловушках для коллективов автоматов (в печати).
78. Кудрявцев В.Б., Подколзин А.С., Ушчумлич Ш. Введение в теорию абстрактных автоматов. — М.: Изд-во МГУ, 1985.
79. Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. — М.: Наука, 1985.
80. Кудрявцев В.Б., Ушчумлич Ш., Килибарда Г. Автоматы в лабиринтах (в печати).
81. Кудрявцев Г.Ю. О времени решения лабиринтной задачи конечными автоматами // Сб. науч. трудов № 138. — М.: МЭИ, 1987. — С. 14–18.
82. Кудрявцев Г.Ю. О времени обхода лабиринтов без циклов конечными автоматами // Материалы 2-го Всесоюзного семинара по дискретной математике и ее приложениям. — М.: Изд-во МГУ, 1988. — С. 202–208.
83. Кудрявцев Г.Ю. О сложности конечных автоматов, решающих задачу о лабиринте. Деп. в ВИНИТИ 4.05.88. № 3420 – В88.
84. Кудрявцев Г.Ю. О сложности конечных автоматов, решающих лабиринтную задачу // Межвуз. темат. сб. трудов. — Калинин: Калининский гос. унт. 1989.
85. Кудрявцев Г.Ю. О времени обхода лабиринтов конечными автоматами // Межвуз. сб. трудов. — Саратов: Саратовский гос. унт. 1989.
86. Кудрявцев Г.Ю. О сложности экспериментов с конечными графами. — Деп. в ВИНИТИ 20.11.89. № 6961 – В89.
87. Кудрявцев Г.Ю. О времени решения лабиринтных задач конечными автоматами. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Саратов, 1990. — 127 с.
88. Курдюмов Г.Л. Коллективы автоматов с универсальной проходимостью // Проблемы передачи информации. — 1981. — Т. 17, вып. 4. — С. 98–113.

Статья поступила 27.05.91