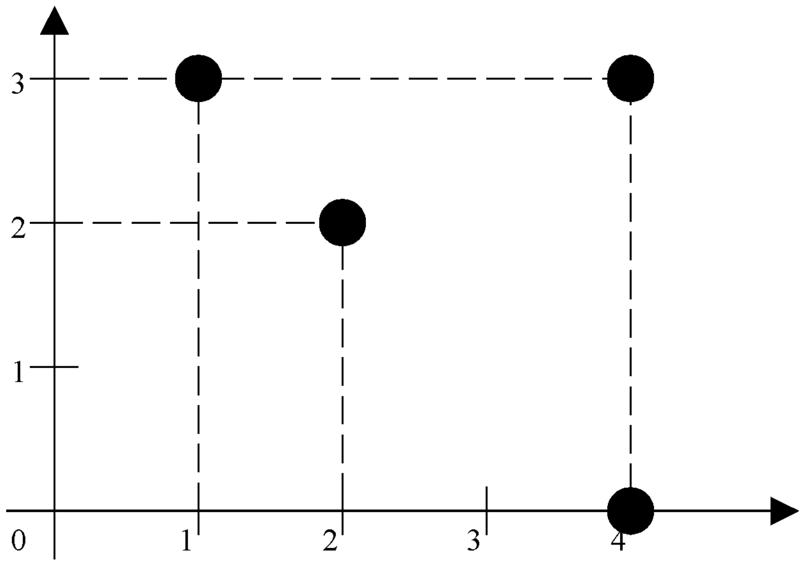
Автор: А.Б. Семенов

Поиск кривых на бинарных изображениях

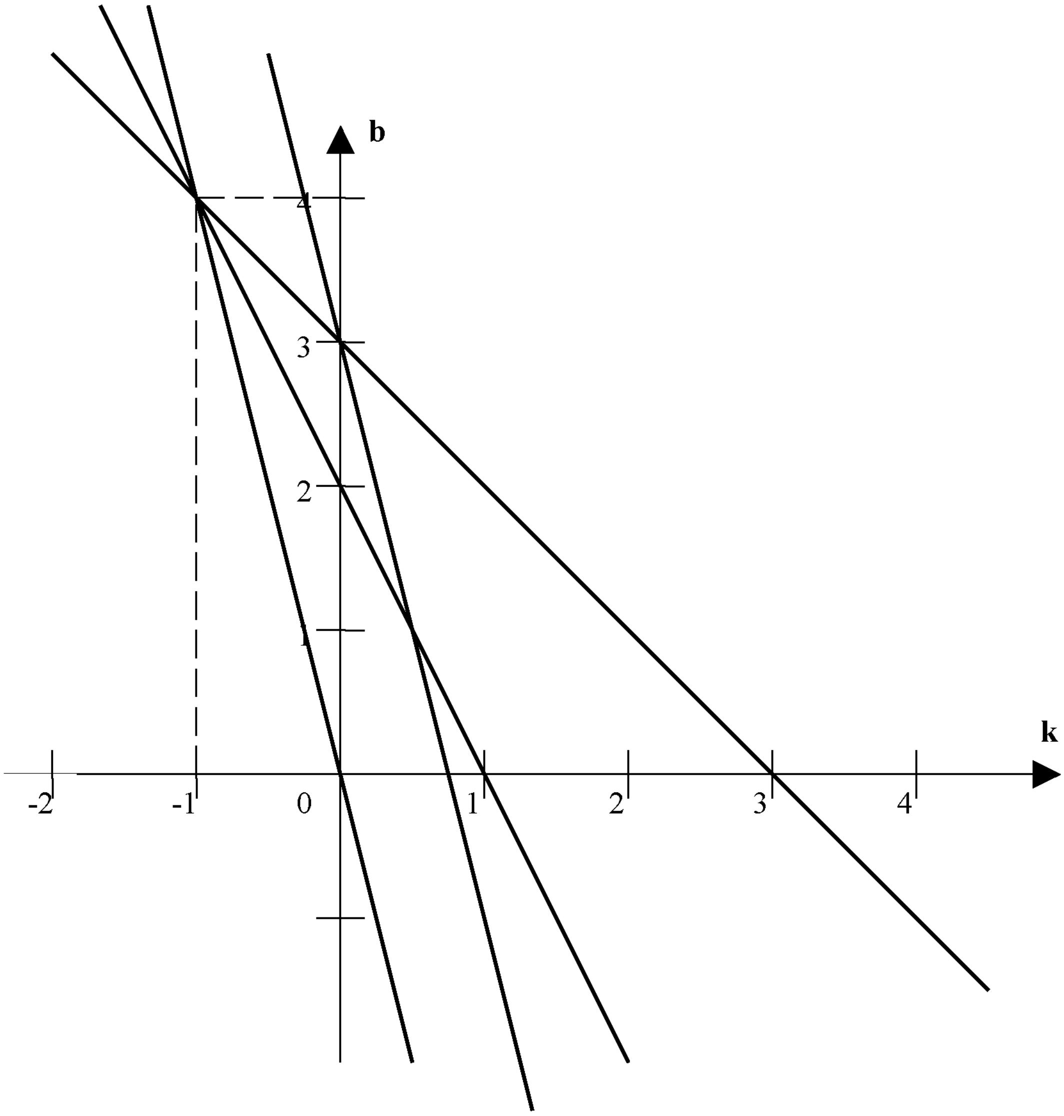
Во многих алгоритмах обработки изображений возникает задача аппроксимации набора точек на растре непрерывной кривой. Преобразование Хафа позволяет находить на бинарном изображении параметрические кривые (отрезки, окружности и т.п.). Рассмотрим произвольную точку плоскости (x_i, y_i). Уравнение прямой линии имеет вид: $y = kx + b$. Существует бесконечно много прямых, которые проходят через точку (x_i, y_i). Но все они будут удовлетворять условию $y_i = -kx_i + b$ для различных k и b. Перепишем условие принадлежности точки прямой в следующей виде $b = -kx_i + y_i$ и построим график функции $b = f(k)$. Пусть у нас на плоскости заданы 4 точки: $(1,3), (2,2), (4,3), (4,0)$.



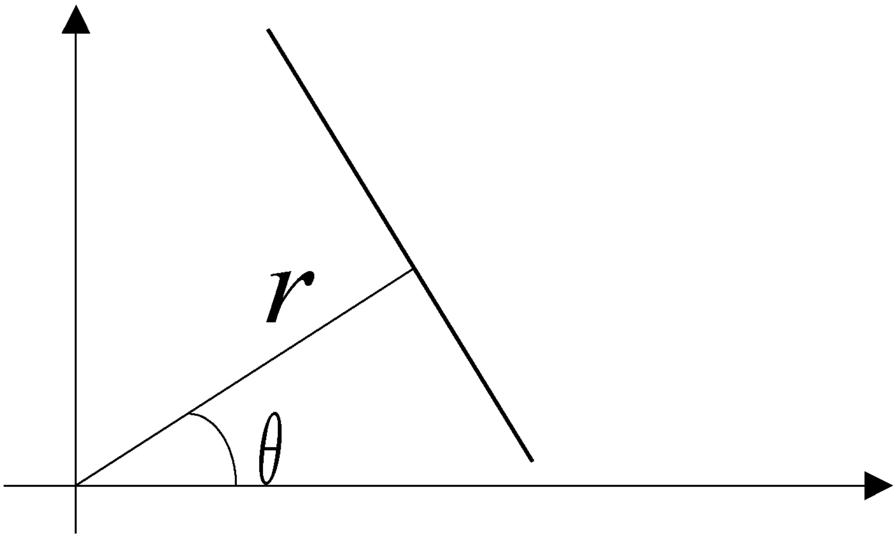
Запишем эти данные в следующую таблицу.

x	**y**	**y=kx+b**	**b=-kx+y**
1	3	3=k*1+b	b=-1k+3
2	2	2=k*2+b	b=-2k+2
4	3	3=k*4+b	b=-4k+3
4	0	0=k*4+b	b=-4k

И теперь построим графики функций в пространстве (k,b).



Как видно в пространстве (k,b) максимальное количество прямых, пересекающихся в одной точек, равно трем: точка (-1,4). Это означает, что в пространстве (x,y) существует прямая $y = kx + b = -x + 4$, на которой лежат три точки. Одна точка пространства (k,b) соответствует одной прямой в пространстве (x,y). Например, точка (0,3) пространства (k,b) соответствует прямой $y = kx + b = 3$. Одна точка пространства (x,y) соответствует одной прямой линии в пространстве (k,b). Представим пространство (k,b) как некий накопитель (двумерный массив). В результате каждая точка пространства (x,y) будет увеличивать соответствующие ячейки этого массива (пространства (k,b)). Мы работаем в дискретном пространстве изображения. Поэтому возникает вопрос. Как получить дискретное пространство (k,b) – массив-накопитель? Можно, например, в пространстве (k,b) производить растеризацию отрезка с помощью целочисленного алгоритма Брезенхэма. Или же каким то образом продискретизировать пространство (k,b) и каждой точке (k_i, b_i) будет соответствовать уже несколько прямых пространства (x,y) с близкими значениями k и b. После обработки всех точек (пикселей) пространства (x,y) максимальная величина в массиве-накопителе (k,b) будет говорить о том, какое наибольше количество точек лежит на одной прямой. А индексы максимального элемента (k^*, b^*) будут определять эту прямую: $y = k^* x + b^*$. Может существовать и более одного максимума в массиве-накопителе (k,b). В этом случае в изображении может присутствовать более одной прямой. Однако, рассмотренный выше подход содержит в себе ряд недостатков. Во-первых, используя уравнение прямой $y = kx + b$ нельзя описать вертикальные прямые. А во-вторых, для каждого обрабатываемого пикселя коэффициент k может изменяться в пределах $(-\infty, +\infty)$. Поэтому в этом случае прибегают, как правило, к альтернативному подходу описания прямой линии: $r = x\cos\theta + y\sin\theta$, где r – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, θ – угол между перпендикуляром и осью Ox.



Значение угла θ изменяется в пределах от 0 до 2π, величина r зависит от линейных размеров обрабатываемого изображения.

Рассмотрим теперь идею метода Хафа. Пусть имеется семейство плоских кривых, заданных в параметрическом виде: $F(a_1, a_2, ..., a_n, x, y) = 0$, где F – некоторая функция, $a_1, a_2, ..., a_n$ – параметры семейства кривых, x, y – координаты точки на плоскости. Параметры семейства кривых образуют так называемое фазовое пространство, каждая точка которого (конкретные значения $a_1, a_2, ..., a_n$) соотвествуют некоторой кривой. Так как входные данные имеют дискретный характер (растровое изображение), то необходимо фазовое пространство также перевести в дискретное. Для этого в фазовом пространстве вводится сетка, разбиваюшая его на ячейки, каждая из которых соотвествует набору кривых с близкими значениями параметров. Каждой ячекйке фазового пространства можно поставить в соответствие число (счетчик), указывающее количество точек интереса на изображении, принадлежащих хотя бы одной из кривых, соответствубщих данной ячейке. Анализ счеткчиков позволяет найти на изображении кривые, на которых лежит наибольшее количество точек интереса. Через каждую точку (x, y) можно провести несколько прямых с различными значениями r и θ, т.е. каждой точке (x, y) соответствует набор точек в фазовом пространтсве (r,θ). С другой стороны, каждой точке пространства (r,θ) соотвествует набор точек (x, y) на изображении, образующих прямую. Каждой точке (r_0,θ_0) пространства (r,θ) можно поставить в соответствие счетчик, указывающий количество точек (x, y), лежащих на прямой $r_0 = x\cos\theta_0 + y\sin\theta_0$. Введем в пространстве (r,θ) сетку. Теперь счетчик ставится в соответствие каждой ячейке этой сетки. Так ячейке $[r_i, r_{i+1}]\times[\theta_i,\theta_{i+1}]$ соответствует число точек, удовлетворяющих уравнению $r = x\cos\theta + y\sin\theta,\ \theta_i \le \theta \le \theta_{i+1},\ r_i \le r \le r_{i+1}$. В общем случае алгоритм поиска прямой линии на изображении с помощью метода Хафа выглядит так.

1. Ввести дискретную сетку в пространстве (r,θ) (матрицу $H(r,\theta)$);
2. Обнулить счетчики всех ячеек;
3. Цикл по всем точкам (x_i, y_i), принадлежащим объекту

   Цикл по углу θ от 0 до 2π с шагом $d\theta$

   Тело цикла

   $$r = x_i\cos\theta + y_i\sin\theta$$
   $$H[r,\theta] = H[r,\theta] + 1$$

   Конец цикла по углу θ

   Конец цикла по всем точкам
4. Выбрать (найти) ячейку $H(r,\theta)$ с максимальным значением счетчика;
5. Параметры прямой (r^*,θ^*) – координаты выбранной ячейки в фазовом пространтсве принять искомой прямой $r^* = x\cos\theta^* + y\sin\theta^*$.

Преобразование Хафа можно применить и для поиска окружностей на растровом изображении. Геометрическое место точек, равноудаленных от заданной называется окружностью: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$, где (a,b) – координаты центра окружности, R – ее радиус. Формула, задающая семейство окружностей имеет вид $F(a,b,R,x,y)=(x-a)^2+(y-b)^2-R^2$. Если ставится задача найти окружность заранее известного радиуса, то фазовое пространство будет двухмерным – параметры центра окружности (a,b). В этом случае алгоритм выделения окружностей полностью аналогичен алгоритму нахождения прямых. Если же радиус искомой окружности изначально неизвестен, то фазовое пространство будет трехмерных (a,b,R). Алгоритм поиска окружностей по методу Хафа будет следующим.

Цикл по всем точкам (x_i, y_i) фигуры

Цикл по a от $X_{\min}$ до $X_{\max}$ с шагом dX

Цикл по b от $Y_{\min}$ до $Y_{\max}$ с щагом dY

$$R=(x_i-a)^2+(y_i-b)^2$$
$$H[a,b,R]=H[a,b,R]+1$$

Конец цикла по b

Конец цикла по a

Конец цикла по точкам (x_i, y_i)

Затем находится ячейка массива $H[a,b,R]$ с максимальным элементом, который и будет указывать количество точек лежащих на окружности. Примеры поиска окружности на бинарном изображении проводился следующим образом. В растровом графическом редакторе с использованием стандартных инструментов была нарисована окружность. Затем с помощью инструмента «ластик» были стерты некоторые части окружности.