

Р.В. Кирия

Институт геотехнической механики им. Н.С. Полякова НАН Украины

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПУСКА ЛЕНТОЧНЫХ КОНВЕЙЕРОВ

На основі методу припасування за допомогою перетворення Лапласа розроблено алгоритм динамічних процесів пуску стрічкових конвеєрів. Одержаний алгоритм реалізовано на ЕОМ і апробовано на конкретному прикладі пуску стрічкового конвеєра з нелінійною характеристикою двигуна.

Исследованию динамики пуска ленточных конвейеров посвящен ряд работ отечественных и зарубежных авторов [5-7].

В [6] моделирование процессов пуска ленточных конвейеров сводится к замене непрерывной модели на дискретную, в которой связи между точечными массами заменяются упругими и диссипативными связями. В результате, модель описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений с соответствующими начальными и граничными условиями.

Решение полученной системы – в общем случае нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений – представляет также большие трудности. Поэтому в задачах оптимального управления пуском ленточного конвейера такая модель не имеет практического применения.

В [7; 5] для решения задач пуска применялся метод преобразования Лапласа. В результате, найдены решения задачи пуска ленточного конвейера для линейных характеристик двигателя. Однако, в общем случае для нелинейных и разрывных характеристик двигателя этот метод не применим.

Следовательно, в настоящее время не существует адекватной математической модели динамических процессов пуска ленточных конвейеров с нелинейными и разрывными характеристиками двигателей.

В данной работе для моделирования процессов пуска ленточных конвейеров используется метод припасовывания (сшивки) [4].

Суть метода припасовывания заключается в том, что дифференциальные уравнения, описывающие динамический процесс, решаются в общем виде для каждого отдельного линейного участка аппроксимированной характеристики двигателя. Затем, по заданным начальным и граничным условиям, являющимися решением дифференциального уравнения процесса для предыдущего линейного участка аппроксимированной характеристики двигателя, находятся произвольные константы решения дифференциального уравнения процесса для последующего линейного участка характеристики двигателя. Так последовательно находятся решения для всех линейных участков аппроксимированной характеристики двигателя.

Рассмотрим процесс пуска одноприводного наклонного ленточного конвейера с жестким натяжным устройством, расположенным в хвосте конвейера (рис. 1).

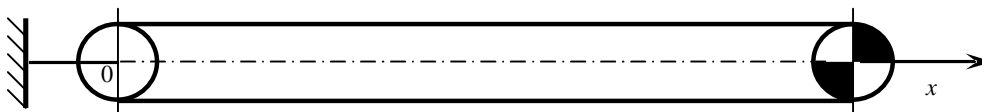


Рис. 1.

Согласно [1], система дифференциальных уравнений, описывающая динамические процессы пуска ленточного конвейера, имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial W_r}{\partial \varepsilon} = \rho a \cdot \frac{\partial V_r}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial W_r}{\partial \eta} = \frac{E}{a} \cdot \frac{\partial V_r}{\partial \varepsilon}, \\ \frac{\partial W_x}{\partial \varepsilon} = \rho a \cdot \frac{\partial V_x}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial W_x}{\partial \eta} = \frac{E}{a} \cdot \frac{\partial V_x}{\partial \varepsilon}, \end{cases} \quad (1)$$

при начальных условиях при $\eta = 0$:

$$V_z(\varepsilon, 0) = V_x(\varepsilon, 0) = 0; \quad W_z(\varepsilon, 0) = W_x(\varepsilon, 0) = 0, \quad (2)$$

где $W_z(\varepsilon, \eta)$, $W_x(\varepsilon, \eta)$ – динамические составляющие натяжения в грузовой и холостой ветвях ленты конвейера соответственно, Н; $V_z(\varepsilon, \eta)$, $V_x(\varepsilon, \eta)$ – скорости точек грузовой и холостой ветвей ленты конвейера соответственно, м/с; ε , η – соответственно безразмерные координаты и время; a – скорость распространения упругих возмущений в ленте, м/с; E – агрегатная жесткость ленты при ее растяжении, Н; ρ – эквивалентная погонная плотность ленты, кг/м ($\rho = E/a^2$).

Безразмерные координаты и безразмерное время определяются по формулам

$$\varepsilon = x/L; \quad \eta = at/L, \quad (3)$$

где x – координата, направленная вдоль ленты в направлении головного барабана, с центром на оси хвостового барабана конвейера, м, (рис. 1); t – текущее время, с; L – длина контура ленты конвейера, м.

Граничные условия на хвостовом и приводном барабанах зависят от типа натяжного устройства.

Для жесткого натяжного устройства (рис. 1) в силу условия неразрывности ленты имеем:

на хвостовом барабане при $\varepsilon = 0$:

$$V_z(0, \eta) = -V_x(0, \eta), \quad W_z(0, \eta) = W_x(0, \eta); \quad (4)$$

на приводном барабане при: $\varepsilon = 1/2$

$$\begin{aligned} V_z(1/2, \eta) &= -V_x(1/2, \eta), \\ W_z(1/2, \eta) - W_x(1/2, \eta) &= F(V_z) - G_1 - \frac{a_c m}{L} \cdot \frac{dV_z}{d\eta}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $F(V_z)$ – пусковая характеристика привода в координатах F , V , Н (рис. 2); G_1 – сила сопротивления движению ленты и груза, включающая скатывающую силу от веса груза и ленты конвейера, Н; m – приведенная масса груза вращающихся частей привода ленточного конвейера, кг.

При этом пусковая характеристика двигателя аппроксимировалась кусочно-линейным сплайном, который можно представить в виде (рис. 2)

$$F(V_z(\eta)) = \sum_{i=0}^n (N_i - q_i V_z(\eta)) \cdot [\sigma_0(\eta - \eta_i) - \sigma_0(\eta - \eta_{i+1})], \quad (6)$$

где N_i – координата пересечения i -го линейного участка аппроксимированной характеристики с осью OF , H ; q_i – тангенс угла наклона i -го линейного участка аппроксимированной характеристики к оси OF , кг/с; η_i – моменты перехода с одного линейного участка пусковой характеристики на другой; $\sigma_0(\eta)$ – единичная функция Хевисайда; n – количество линейных участков характеристики.

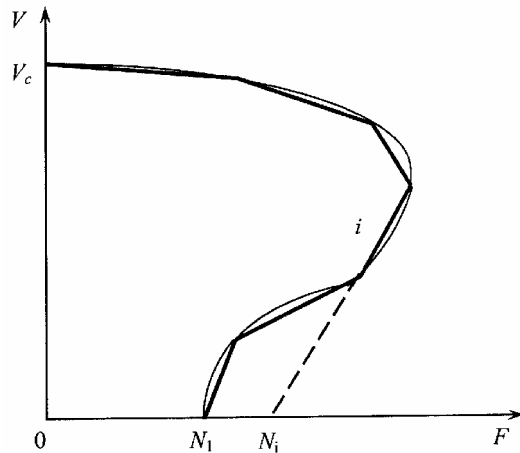


Рис. 2.

Согласно методу приспособывания, получим решение системы дифференциальных уравнений (1) для i -го линейного участка аппроксимированной характеристики двигателя. При этом решения уравнений должны удовлетворять следующим начальным условиям:

$$V_{z1}(\varepsilon, 0) = 0; \quad W_{z1}(\varepsilon, 0) = 0, \quad V_{zi}(\varepsilon, \eta_i) = V_{z,i-1}(\varepsilon, \eta_i), \quad W_{zi}(\varepsilon, \eta_i) = W_{z,i-1}(\varepsilon, \eta_i) \quad (7)$$

для грузовой и аналогично для холостой ветвей и граничным условиям на хвостовом барабане

$$V_{zi}(0, \eta) = -V_{xi}(0, \eta), \quad W_{zi}(0, \eta) = -W_{xi}(0, \eta), \quad (8)$$

на приводном барабане:

$$V_{zi}(1/2, \eta) = -V_{xi}(1/2, \eta); \quad (9)$$

$$W_{zi}(1/2, \eta) - W_{xi}(1/2, \eta) = N_i - G_1 - q_i V_{zi}(1/2, \eta) - \frac{am}{L} \frac{\partial V_{zi}(1/2, \eta)}{\partial \eta}, \quad (10)$$

где $i = 1, 2, \dots, n$; $W_{zi}(\varepsilon, \eta)$, $V_{zi}(\varepsilon, \eta)$ и $W_{xi}(\varepsilon, \eta)$, $V_{xi}(\varepsilon, \eta)$ – динамические усилия и скорости в точках грузовой и холостой ветвей ленты на i -том линейном участке аппроксимированной характеристики двигателя.

Для каждой системы уравнений (1), соответствующей i -ому участку, производим замену $\theta = \eta - \eta_i$.

Применяя преобразование Лапласа [3] по переменной θ к уравнениям (1) с учетом начальных и граничных условий (7)-(10), приходим к обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$\frac{d\bar{W}_{ri}(\varepsilon, p)}{d\varepsilon} = \rho a [p\bar{V}_{ri}(\varepsilon, p) - V_{ri}(\varepsilon, \eta_i)], \quad p\bar{W}_{ri}(\varepsilon, p) - W_{ri}(\varepsilon, \eta_i) = \frac{E}{a} \frac{d\bar{V}_{ri}(\varepsilon, p)}{d\varepsilon}, \quad (11)$$

$$\frac{d\bar{W}_{xi}(\varepsilon, p)}{d\varepsilon} = \rho a [p\bar{V}_{xi}(\varepsilon, p) - V_{xi}(\varepsilon, \eta_i)], \quad p\bar{W}_{xi}(\varepsilon, p) - W_{xi}(\varepsilon, \eta_i) = \frac{E}{a} \frac{d\bar{V}_{xi}(\varepsilon, p)}{d\varepsilon} \quad (12)$$

при граничных условиях

$$\bar{V}_{zi}(0, p) = -\bar{V}_{xi}(0, p), \quad (13)$$

$$\bar{W}_{zi}(0, p) = -\bar{W}_{xi}(0, p), \quad (14)$$

$$\bar{V}_{zi}(1/2, p) = -\bar{V}_{xi}(1/2, p), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \bar{W}_{ri}(1/2, p) - \bar{W}_{xi}(1/2, p) &= (N_i - G_1)/p - q_i \bar{V}_{ri}(1/2, p) - \\ &- \frac{am}{L} [p\bar{V}_{ri}(1/2, p) - V_{ri}(1/2, \eta_i)], \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\bar{V}_{zi}(\varepsilon, p) = \int_0^\infty V_{zi}(\varepsilon, \theta + \eta_i) e^{-p\theta} d\theta, \quad \bar{W}_{zi}(\varepsilon, p) = \int_0^\infty W_{zi}(\varepsilon, \theta + \eta_i) e^{-p\theta} d\theta. \quad (17)$$

Уравнения (11) и (12) можно представить в виде:

$$\frac{d^2 \bar{V}_{zi}(\varepsilon, p)}{d\varepsilon^2} - p^2 \bar{V}_{zi}(\varepsilon, p) = -pV_{zi}(\varepsilon, \eta_i) - \frac{a}{E} \frac{\partial W_{zi}(\varepsilon, \eta_i)}{\partial \varepsilon}, \quad (18)$$

$$\frac{d^2 \bar{V}_{xi}(\varepsilon, p)}{d\varepsilon^2} - p^2 \bar{V}_{xi}(\varepsilon, p) = -pV_{xi}(\varepsilon, \eta_i) - \frac{a}{E} \frac{\partial W_{xi}(\varepsilon, \eta_i)}{\partial \varepsilon}. \quad (19)$$

Решение уравнений (18), (19) с учетом условий (13)-(16) в точке набегания на приводной барабан при $\varepsilon = 1/2$ имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{V}_{ri}(1/2, p) &= \left\{ (N_i - G_1) \frac{ch(p/2)}{p} + \frac{am}{L} V_{r,i-1}(1/2, \eta_i) ch(p/2) + \right. \\ &+ \left. \frac{2E}{a} \int_0^{1/2} [V_{r,i-1}(\tau, \eta_i) ch(p\tau) - \frac{a}{E} W_{r,i-1}(\tau, \eta_i) sh(p\tau)] d\tau \right\} \times \\ &\times [(2E/a) sh(p/2) + (pam/L + q_i) ch(p/2)]^{-1}. \end{aligned} \quad (20)$$

Вычислим интеграл Дюамеля в выражении (20) приближенно по формуле прямоугольников. Для этого функции $V_{2,i-1}(\tau, \eta_i)$ и $W_{2,i-1}(\tau, \eta_i)$ аппроксимируем ступенчатыми функциями (рис. 3), разбивая интервал по τ (0, 1/2) на s равных частей. Получим:

$$V_{2,i-1}(\tau, \eta_i) = \sum_{m=1}^s V_{2,i-1}(m/2s, \eta_i) \left[\sigma_0\left(\tau - \frac{m-1}{2s}\right) - \sigma_0\left(\tau - \frac{m}{2s}\right) \right], \quad (21)$$

$$W_{2,i-1}(\tau, \eta_i) = \sum_{m=1}^s W_{2,i-1}(m/2s, \eta_i) \left[\sigma_0\left(\tau - \frac{m-1}{2s}\right) - \sigma_0\left(\tau - \frac{m}{2s}\right) \right]. \quad (22)$$

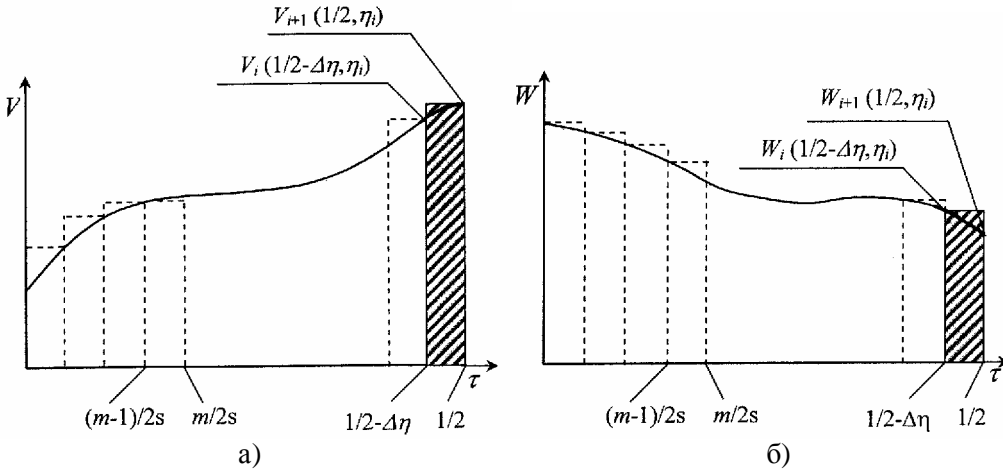


Рис. 3.

После подстановки (21) и (22) в выражение для интеграла получим

$$\begin{aligned}
 & \frac{2E}{a} \int_0^{1/2} \left[V_{r,i-1}(\tau, \eta_i) \operatorname{ch}(p\tau) - \frac{a}{E} W_{r,i-1}(\tau, \eta_i) \operatorname{sh}(p\tau) \right] d\tau = \\
 & = \frac{2E}{a} \sum_{m=1}^s \left\{ V_{r,i-1} \left(\frac{m}{2s}, \eta_i \right) \left[\frac{\operatorname{sh} \left(p \frac{m}{2s} \right)}{p} - \frac{\operatorname{sh} \left(p \frac{m-1}{2s} \right)}{p} \right] - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{a}{E} W_{r,i-1} \left(\frac{m}{2s}, \eta_i \right) \left[\frac{\operatorname{ch} \left(p \frac{m}{2s} \right)}{p} - \frac{\operatorname{ch} \left(p \frac{m-1}{2s} \right)}{p} \right] \right\}. \quad (23)
 \end{aligned}$$

Разобьем линейные участки аппроксимированной характеристики двигателя так, чтобы интервал времени на этих участках совпадал с шагом расчета по времени $\Delta\eta$. Кроме того, предположим, что интервал разбиения отрезка $[0; 1/2]$ по оси τ (рис.3) совпадает с шагом расчета по времени $\Delta\eta$, т.е. $\Delta\eta = 1/(2s)$.

Подставляя (23) в (20) и выполняя обратное преобразование Лапласа, получим рекуррентную формулу для определения скорости ленты на приводном барабане для i -го линейного участка в момент времени η_{j+1} , зная значение скорости и динамического усилия в момент времени η_j

$$\begin{aligned}
 V_{zi}(1/2, \eta_{j+1}) &= \frac{L}{ma} (N_i - G_1) g_i(\Delta\eta) + V_{zi}(1/2, \eta_j) \lambda_i(\Delta\eta) + \\
 &+ \frac{2EL}{ma^2} \left[V_{zi}(1/2, \eta_j) - \frac{a}{E} W_{zi}(1/2, \eta_j) \right] g_i(\Delta\eta), \quad (24)
 \end{aligned}$$

где $\Delta\eta = \eta_{j+1} - \eta_j$; $g_i(\Delta\eta) = \frac{1 - e^{-\alpha_i \Delta\eta}}{\alpha_i}$; $\lambda_i(\Delta\eta) = e^{-\alpha_i \Delta\eta}$; $\alpha_i = \frac{q_i L}{ma} + \frac{2EL}{ma^2}$;

$i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n \cdot s$.

При этом выполняется соотношение

$$\eta_i \leq \eta_j < \eta_{j+1} \leq \eta_{i+1}.$$

Если интеграл Дюамеля в выражении (20) вычислить более точно по методу трапеций, то в последнем слагаемом выражения (24) вместо значений $V_{zi}(1/2, \eta_j)$ и $W_{zi}(1/2, \eta_j)$ будут стоять средние значения V'_{zi} и W'_{zi} , равные:

$$V'_{zi} = \frac{V_{zi}(1/2 - \Delta\eta, \eta_j) + V_{zi}(1/2, \eta_j)}{2},$$

$$W'_{zi} = \frac{W_{zi}(1/2 - \Delta\eta, \eta_j) + W_{zi}(1/2, \eta_j)}{2}.$$

Если предположить, что на приводном барабане ленточного конвейера задана скорость как функция времени $V_z(1/2, \eta) = f(\eta)$, то задача определения скорости и динамических усилий в каждой точке грузовой и холостой ветвях ленты конвейера сведется к решению системы уравнений (1) с теми же начальными условиями (2) и граничными условиями (4) на хвостом барабане, а на приводном барабане с условиями, равными

$$V_z(1/2, \eta) = -V_x(1/2, \eta) = f(\eta).$$

Применяя преобразование Лапласа с учетом начальных и граничных условий, получим в этом случае решение системы уравнений (1) в изображении:

$$\bar{V}_z(\varepsilon, p) = \frac{\bar{V}_z(1/2, p)}{ch(p/2)} ch(p\varepsilon), \quad (25)$$

$$\bar{W}_z(\varepsilon, p) = \frac{E \bar{V}_z(1/2, p)}{a ch(p/2)} sh(p\varepsilon). \quad (26)$$

Переходим к обратному преобразованию Лапласа в формулах (25), (26) и, используя теорему запаздывания [3]

$$\bar{V}(1/2, p) e^{-\alpha p} \leftarrow V(1/2, \eta + \alpha),$$

получаем:

$$V_z(\varepsilon, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [V_z(\eta - (1/2 - \varepsilon) - k) + V_z(\eta - (1/2 + \varepsilon) - k)], \quad (27)$$

$$W_z(\varepsilon, \eta) = \frac{E}{a} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [V_z(\eta - (1/2 - \varepsilon) - k) - V_z(\eta - (1/2 + \varepsilon) - k)], \quad (28)$$

где $V_z(1/2, \eta) = V_z(\eta)$.

В точке набегания на приводном барабане при $\varepsilon = 1/2$ динамическое усилие примет вид

$$W_z(1/2, \eta) = \frac{E}{a} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [V_z(\eta - k) - V_z(\eta - k - 1)]. \quad (29)$$

Формулы (27), (28) дают возможность по заданной скорости на приводном барабане ленточного конвейера определить скорость в любой точке ленты грузовой ветви. Для определения скорости на холостой ветви используются равенства:

$$W_x(\varepsilon, \eta) = W_z(\varepsilon, \eta); \quad V_x(\varepsilon, \eta) = -V_z(\varepsilon, \eta).$$

Подставляя $W_{zi}(1/2, \eta_j)$ из выражения (29) в формулу (24), после преобразования получим окончательно рекуррентное соотношение, определяющее скорость ленты на приводном барабане конвейера в момент времени $\eta = \eta_{i+1}$ по ее значению на приводном барабане, вычисленным на предыдущих шагах времени:

при $\varepsilon = 1/2$

$$V_{zi}(\eta_{j+1}) = \frac{L}{ma_c} (N_i - G_1) g_i(\Delta\eta) + V_z(\eta_j) \lambda_i(\Delta\eta) + \frac{2E_0L}{ma_c^2} g_i(\Delta\eta) \Pi, \quad (30)$$

где $\Pi = 2 \sum_{k=0}^r (-1)^k V_z(\eta_j - k)$; $r = [\eta_j]$ – целая часть η_j ; $g_i(\Delta\eta) = \frac{1 - e^{-\alpha_i \Delta\eta}}{\alpha_i}$;

$$\lambda_i(\Delta\eta) = e^{-\alpha_i \Delta\eta}; \quad \alpha_i = \frac{q_i L}{ma_c} + \frac{2EL}{ma_c^2}; \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, n \cdot s.$$

Если при вычислении интеграла Дюамеля в выражении (20) применить формулу трапеции, то в последнем слагаемом формулы (30) вместо Π имеем

$$\Pi = \sum_{k=0}^r (-1)^k [V_z(\eta_j - k) + V_z(\eta_j - k + \Delta\eta)].$$

Следовательно, вычислив скорость ленты на приводном барабане по формуле (30), подставляя эти значения в формулы (27) и (28), получим скорость и динамическое усилие в любой точке ленты конвейера.

Разработанный алгоритм был реализован на ЭВМ и при апробировании на конкретных примерах показал хорошую точность [2].

Библиографические ссылки

1. **Бужинский И.А.** Определение рациональных пусковых характеристик привода наклонного ленточного конвейера / И.А. Бужинский, Р.В. Кирия // Машины для предприятий горной промышленности. – К., 1986. – С.30-38.
2. **Кирия Р.В.** Влияние типа натяжного устройства и места его установки на динамику пуска ленточного конвейера / Р.В. Кирия, В.Ю. Максютенко, И.А. Бужинский // Сб. науч. тр. Геотехническая механика. – Д., – 2006. – Вып. № 67. – С. 73-83.
3. **Лаврентьев М.А.** Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М., 1965. – 716 с.
4. **Попов Е.П.** Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления. – М., 1988. – 256 с.
5. **Смирнов В.К.** Исследование пуска наклонного конвейера с учетом механических характеристик двигателей / В.К. Смирнов, И.А. Бужинский, В.П. Неня // Вопросы рудничного транспорта. – К., 1974. – С. 69-85.
6. **Спиваковский А.О.** Теория ленточных конвейеров / А.О. Спиваковский, В.Г. Дмитриев. – М., 1982. – 192 с.
7. **Штокман И.Г.** Динамика тяговых цепей рудничных конвейеров. – М., 1959. – 304 с.

Надійшла до редколегії 03.09.07