УДК 512.642:621.31.1

АНАЛИЗ НЕСИММЕТРИЧНЫХ РЕЖИМОВ ТРЕХФАЗНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СЕТИ В ЛИНЕЙНОМ И МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВАХ

Ф.Д. Пряшников, А.И. Стреляной, А.А. Парфёнов

Севастопольский национальный университет ядерной энергии и промышленности

Построены линейные и унитарные пространства троек комплексных чисел (троек векторов). Методами линейной алгебры установлены свойства элементов построенных пространств, имеющие важную физическую интерпретацию для трехфазных электрических цепей

Введение

Проблема качества электроэнергии наряду с надежностью и экономичностью является одной из главных в электроэнергетике. Под термином «качество электроэнергии» понимается соответствие параметров энергосистемы установленным нормам производства, передачи и распределения электрической энергии. Одним из основных параметров качества электроэнергии является несимметрия напряжения, под которой понимают неравенство фазных или линейных напряжений по амплитуде и углам сдвига между ними. Нормируемыми показателями несимметрии являются коэффициенты прямой K_{0U} и обратной K_{2U} последовательностей. Задача управления качеством электроэнергией по параметрам K_{0U} и K_{2U} является многокритериальной, в статье предлагается введение одного показателя несимметрии напряжения.

Постановка задачи

Рассматривается установившийся режим трехфазной электрической цепи с синусоидальными напряжениями и токами в каждой фазе. Фазные напряжения такой цепи могут быть описаны тройкой комплексных чисел $\left(\overline{A},\overline{B},\overline{C}\right)$ с геометрической интерпретацией в виде векторов в комплексной плоскости. Симметричный режим определяется выполнением равенства

$$\begin{cases} \overline{A} = Ae^{jj} \\ \overline{B} = a^2\overline{A} \\ \overline{C} = a\overline{A} \end{cases} \tag{1}$$

$$j\,,\, A \in R,\, a = e^{j\frac{2p}{3}},\, j^2 = -1\,.$$

В случае невыполнения хотя бы одного из двух последних равенств системы (1) режим электрической цепи считается несимметричным. Несимметричные режимы негативно влияют на электропотребителей и распределительные сети. В качестве критериев несимметрии принимают коэффициенты несимметрии напряжения по прямой

K_{0U} и обратной K_{2U} последовательности [1]. Коэффициенты K_{0U} и K_{2U} определяются путем представления произвольной тройки векторов $\left(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}\right)$ в виде суммы троек симметричных векторов [2]:

$$\left(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}\right) = \left(\overline{A_1}, \overline{B_1}, \overline{C_1}\right) + \left(\overline{A_2}, \overline{B_2}, \overline{C_2}\right) + \left(\overline{A_0}, \overline{B_0}, \overline{C_0}\right), \tag{2}$$

где $\left(\overline{A_1}, \overline{B_1}, \overline{C_1}\right)$ – векторы прямой последовательности;
$\left(\overline{A_2}, \overline{B_2}, \overline{C_2}\right)$ – векторы обратной последовательности;
$\left(\overline{A_0}, \overline{B_0}, \overline{C_0}\right)$ – векторы нулевой последовательности;

$$\begin{cases} \overline{A_1} = A_1 e^{jj_1}; \overline{A_2} = A_2 e^{jj_2}; \overline{A_0} = A_0 e^{jj_0}, \\ \overline{B_1} = a^2 \overline{A_1}; \overline{B_2} = a\overline{A_2}; \overline{B_0} = \overline{A_0}, \\ \overline{C_1} = a\overline{A_1}; \overline{C_2} = a\overline{A_2}; \overline{C_0} = \overline{A_0}, \end{cases} \tag{3}$$

$A_1, A_2, A_0, j_1, j_2, j_0 \in R$.

В работе решаются следующие задачи: во-первых, решение задачи анализа представления (2) с точки зрения математической теории линейных векторных пространств, во-вторых, рассмотрение задачи построения метрического пространства, позволяющего ввести критерий несимметрии, отличный от коэффициентов K_{0U} и K_{2U}.

Линейное пространство векторов фазных напряжений

Рассмотрим плоскость j и множество троек векторов $M = \left\{\left(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}\right)\right\}$, принадлежащих этой плоскости. Сложение троек векторов определим формулой $(\overline{A'}, \overline{B'}, \overline{C'}) + (\overline{A''}, \overline{C''}, \overline{B''}) = (\overline{A'} + \overline{A''}, \overline{B'} + \overline{B''}, \overline{C'} + \overline{C''})$, умножение тройки на комплексное число $z \in R$ определим формулой $\overline{z} \cdot (\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}) = (z\overline{A}, z\overline{B}, z\overline{C})$, в качестве нейтрального элемента выбираем (0,0,0). Тогда можно показать, что множество M удовлетворяет всем аксиомам [3] линейного пространства, то есть множество M является линейным пространством.

Покажем, что размерность пространства M равна трем. Рассмотрим три элемента пространства M : $m_1 = (1,0,0), m_2 = (0,1,0), m_3 = (0,0,1)$.

Во-первых, элементы m_1, m_2, m_3 линейно независимы, так как

$$\overline{z_1} m_1 + \overline{z_2} m_2 + \overline{z_3} m_3 = 0 \ (z \in C) \Leftrightarrow (\overline{z_1}, \overline{z_2}, \overline{z_3}) = (0,0,0) \Leftrightarrow \overline{z_1} = 0, \overline{z_2} = 0, \overline{z_3} = 0.$$

Во-вторых, любой элемент $(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}) \in M$ может быть представлен в виде линейной комбинации элементов m_1, m_2, m_3. Действительно равенство

$$\overline{z_1} m_1 + \overline{z_2} m_2 + \overline{z_3} m_3 = \left(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}\right) \Leftrightarrow \left(\overline{z_1}, \overline{z_2}, \overline{z_3}\right) = \left(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}\right) \Leftrightarrow \overline{z_1} = \overline{A}, \overline{z_2} = \overline{B}, \overline{z_3} = \overline{C}.$$

Таким образом, $\left(m_1, m_2, m_3\right)$ есть базис пространства M, размерность пространства M совпадает с числом элементов базиса, то есть равна 3. Отсюда следует, что число слагаемых в правой части равенства (2) не может быть уменьшено.

Используемое в настоящее время представление (2) соответствует выбору $m_1 = (1, a^2, a);\ m_2 = (1, a, a^2);\ m_3 = (1, 1, 1)$. Так как

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5{,}196\, j \neq 0\,, \qquad (4)$$

то элементы m_1, m_2, m_3 образуют базис. Элементы m_1, m_2, m_3 ортогональны, так как $(m_1, m_2) = 1 \cdot 1 + a^2 \cdot \overline{a} + a \cdot \overline{a^2} = 0,\ (m_1, m_3) = 1 + a^2 + a = 0;\ (m_2, m_3) = 1 + a + a^2 = 0;$

Таким образом, представление

$$\left(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}\right) = \overline{a_1} m_1 + \overline{a_2} m_2 + \overline{a_3} m_3 \qquad (5)$$

в линейном пространстве трех векторов есть разложение по ортогональному базису m_1, m_2, m_3.

Критерий оптимальности в задаче управления несимметричными режимами на основе представления (5) является векторным, так как включает две компоненты

$$\frac{|m_2|}{|m_1|}, \frac{|m_3|}{|m_1|}.$$

Недостатком векторного критерия является необходимость его приведения к скалярному. Для устранения этого недостатка может быть предложен критерий, не требующий представления (5), а основанный на минимизации расстояния от тройки векторов $\left(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}\right)$ до ближайшей симметричной тройки. Для введения понятия расстояния необходим переход от линейного пространства к метрическому.

Метрическое пространство векторов фазных напряжений

Линейное пространство M будет метрическим пространством, если определить расстояние между всеми парами элементов. Определим расстояние $r(x, y)\,(x, y \in M)$ соотношением

$$r(x, y) = \left|\Delta \overline{A}\right|^2 + \left|\Delta \overline{B}\right|^2 + \left|\Delta \overline{C}\right|^2, \qquad (6)$$

где $\Delta \overline{A} = X_A - Y_A,\ \Delta \overline{B} = X_B - Y_B,\ \Delta \overline{C} = X_C - Y_C$ (рис).

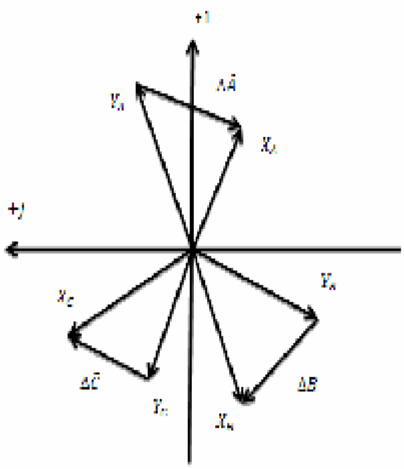

Рис. Расстояние $r(x, y)$

Можно показать, что $r(x, y)$ удовлетворяет всем аксиомам [2] расстояния.

Для произвольной тройки векторов $\left(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}\right)$ решим задачу нахождения симметричной тройки векторов $\left(\overline{S_1}, \overline{S_2}, \overline{S_3}\right)$ такой, чтобы расстояние $r\left(\left(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}\right), \left(\overline{S_1}, \overline{S_2}, \overline{S_3}\right)\right)$ было наименьшим. Тройку $(\overline{S_1}, \overline{S_2}, \overline{S_3})$ назовем ближайшей симметричной.

Обозначим

$$\begin{aligned} \overline{A} &= a_1 + ja_2, \\ \overline{B} &= b_1 + jb_2, \\ \overline{C} &= c_1 + jc_2. \end{aligned} \tag{7}$$

$$\overline{S_1} = x + jy\,. \tag{8}$$

Тогда в силу симметричности

$$\begin{cases} \overline{S_2} = a^2(x+jy) = \frac{1}{2}\left(-x+\sqrt{3}y\right) - j\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}x+y\right), \\ \overline{S_3} = a(x-jy) = -\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{3}y\right) + j\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}x-y\right). \end{cases} \tag{9}$$

В обозначениях (7), (8), (9) расстояние это функция двух переменных

$$r(x,y) = (x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 + \left(-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y-b_1\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y-b_2\right)^2 + \left(1\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}-c_1\right)^2 + \\ +\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y-c_2\right)^2 \tag{10}$$

Для определения минимума функции (10) решаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial r(x,y)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial r(x,y)}{\partial y} = 0 \end{cases} \tag{11}$$

Решение системы (11) имеет вид

$$\begin{cases} x = \frac{2a_2 - b_1\sqrt{3}b_2 - c_1 + \sqrt{3}c_1}{6} \\ y = \frac{2a_2 + \sqrt{3}b_1 - b_2 - \sqrt{3}c_1 - c_2}{6} \end{cases} \tag{12}$$

Можно показать, что координаты (12) определяют точку минимума функции $r(x,y)$.

Таким образом, координаты вектора S_1 ближайшей симметричной тройки векторов определяются соотношениями (12).

Установим связь между ближайшей симметричной тройкой векторов $\left(\overline{S_1}, \overline{S_2}, \overline{S_3}\right)$ и векторами прямой последовательности m_1 представления (5). С этой целью найдем координаты вектора m_1 [2]:

$$m_1 = \frac{1}{3}\left(\overline{A} + a\overline{B} + a^2\overline{C}\right) = \frac{1}{3}\left(a_1 + ja_2 + \left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(b_1+jb_2) + \left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(c_1+jc_2)\right) = \\ \frac{1}{6}\left(2a_1 - b_1 - \sqrt{3}b_2 - c_1 + \sqrt{3}c_2\right) + j\frac{1}{6}\left(2a_2 + \sqrt{3}b_1 - b_2 + \sqrt{3}c_2 - c_2\right) \tag{13}$$

Так как координаты x и y в соотношениях (12) и (13) попарно совпадают, то ближайшей симметричной тройкой векторов в смысле расстояния (6) является тройка прямой последовательности. Расстояние (6) характеризует отклонение несимметричного режима от симметричного в среднем по трем фазам, поэтому и представление (5) также характеризует среднее отклонение. Для характеристики максимального фазного отклонения от несимметричного режима необходимо другим образом определить расстояния $r(x, y)$ и, соответственно, провести разложение по другому базису.

Вывод

В работе рассмотрено применение теории линейных и метрических пространств к анализу несимметричных M режимов работы трехфазных электрических сетей. Построено линейное пространство троек векторов, характеризующих установившийся режим трехфазных сетей. Установлено, что размерность пространства M равна трем. Это позволяет утверждать, что произвольную тройку векторов можно представить только в виде трех слагаемых линейной комбинации. Построено метрическое пространство трех векторов, расстояние в котором определяет среднее отклонение по фазам несимметричного режима от симметричного. Введенное расстояние может использоваться как скалярный критерий при приведении несимметричного режима к симметричному. Установлено, что ближайшим симметричным режимом в смысле введенного расстояния является прямая последовательность. Тем самым показано, что представление несимметричного режима в виде суммы симметричных составляющих характеризует отклонение несимметричного режима от симметричного в среднем.

АНАЛІЗ НЕСИМЕТРИЧНИХ РЕЖИМІВ ТРИФАЗНОЇ ЕЛЕКТРИЧНОЇ МЕРЕЖІ У ЛІНІЙНОМУ ТА МЕТРИЧНОМУ ПРОСТОРІ

Ф.Д. Пряшніков, А.І. Стрєляной, О.О. Парфьонов

Побудовані лінійні та унітарні простори трійок комплексних чисел (трійок векторів). Методами лінійної алгебри встановлені властивості елементів побудованих просторів, що мають важливу фізичну інтерпретацію для трифазних електричних ланцюгів.

ANALYSIS UNBALANCED PHASE ELECTRICAL CURRENT in the LINEAR and of METRIC SPACES

F. Pryashnikov, A. Strelyanoy, A. Parfonov

A linear and unitary space of triples of complex numbers (triples of vectors). Methods of linear algebra set properties of the elements, the spaces that are important for the physical interpretation of the three-phase circuits.

Список использованных источников

1. *Бессонов Л.А.* Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: учебник / Л.А. Бессонов. – М.: Гардарики, 2002. – 638 с.
2. *Ильин В.А.* Линейная алгебра: учеб. для вузов / В.А. Ильин, Э.Г. Поздняк. – М.: Физматлит, 2005. – 280 с.
3. ГОСТ 13109 – 97. Межгосударственный стандарт. Электрическая энергия. Совместимость технических средств электромагнитная. Нормы качества электрической энергии в системах электроснабжения общего назначения. – Введ. 1998 - 08 - 28. – Минск: Госстандарт РФ. – М.: Изд-во стандартов, 1999. – 52 с.

Надійшла до редакції 12.09.12 р.