УДК 621.316

А.В.Хорхордин (к.т.н, доц.), С.С.Батыр (асс.), А.Безрук
Донецкий национальный технический университет, г. Донецк
кафедра автоматики и телекоммуникаций
E-mail: khav@kita.donntu.edu.ua, sbatir@mail.ru

О ВЫБОРЕ ПАРАМЕТРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МЕБИУСА ПРИ КОНСТРУИРОВАНИИ СТАБИЛИЗИРУЮЩИХ РЕГУЛЯТОРОВ

Выполнен анализ влияния параметров преобразования Мебиуса на качество системы управления неустойчивыми объектами. Рассмотрена последовательность расчета стабилизирующих регуляторов на основе Q-параметризации. Проведен выбор структуры регулятора и даны рекомендации по выбору его параметров для объекта, представляющего собой последовательное соединение двух интеграторов. Выполнена проверка робастной устойчивости замкнутой системы регулирования.
Ключевые слова: *преобразование Мебиуса, регулятор, Q-параметризация, математическая модель, передаточная функция, робастная устойчивость.*

Общая постановка проблемы.

К неустойчивым объектам управления в полной мере могут быть отнесены автономные летательные аппараты типа вертолетов, квадро- и трикоптеров. К подобным объектам относятся также многочисленные подводные исследовательские автономные аппараты. В инженерной практике встречаются и другие объекты, передаточные функции которых характеризуются тем, что хотя бы один полюс находится в начале координат или в правой полуплоскости комплексной плоскости корней характеристического уравнения. Задача стабилизации неустойчивых объектов и обеспечения заданного качества управления эффективно решается с помощью Q-параметризации (Youla-параметризации) [1, 2]. В самой же процедуре Q-параметризации используется преобразование Мебиуса. Его параметры наряду с целенаправленным выбором ограниченной сверху и устойчивой передаточной функции $Q(s)$ непосредственно влияют на значения параметров регуляторов и, следовательно, на качество системы управления. Именно поэтому исследование влияния параметров преобразования Мебиуса на качество системы управления представляет собой важную задачу, решение которой может дать инженеру конкретные рекомендации по расчету параметров регуляторов.

Постановка задач исследования.

В наиболее общем случае для неустойчивых объектов управления передаточная функция регулятора $W_R(s)$ рассчитывается по формуле $W_R(s) = \dfrac{X+MQ}{Y-NQ}$, в которой передаточные функции $N(s)$, $M(s)$, $X(s)$ и $Y(s)$ получаются в результате выполнения обобщенного алгоритма Евклида для многочленов. Применительно к задачам теории автоматического управления этот алгоритм начинается с того, что к передаточной функции объекта управления применяется преобразование Мебиуса. В передаточную функцию объекта $W(s)$ делается подстановка $s = \dfrac{-a\lambda+b}{c\lambda+d}$. $a,b,c,d \in C$ и $ad-bc \neq 0$. В результате такой подстановки получают передаточную функцию объекта как отношение полиномов $W(\lambda) = N(\lambda)/M(\lambda)$. Над полученными полиномами выполняют алгоритм Евклида, схема которого для объекта третьего порядка показана на рис.1. Дробно-рациональные функции $X(\lambda)$ и $Y(\lambda)$ получают из соотношения $NX+MY=1$. Из показанной на рис. 1 схемы алгоритма следует, что $X(\lambda)=(1+q_2q_3)/r_3$, а полином $Y(\lambda)=-(q_1+q_3+q_1q_2q_3)/r_3$. В полученные таким образом выражения $N(\lambda)$, $M(\lambda)$, $X(\lambda)$ и $Y(\lambda)$ снова делается подстановка $\lambda=\dfrac{-ds+b}{cs+a}$, являющаяся обратным преобразованием Мебиуса.

$$
\begin{array}{lll}
N = Mq_1 + r_1 & \Rightarrow & r_1 = N - Mq_1 \\
M = r_1q_2 + r_2 & \Rightarrow & r_2 = M - (N - Mq_1)q_2 \\
r_1 = r_2q_3 + r_3 & \Rightarrow & r_3 = N - Mq_1 - (M - (N - Mq_1)q_2)q_3 = \\
 & & = N - Mq_1 - (M - Nq_2 - Mq_1q_2)q_3 = \\
 & & = N(1+q_2q_3) - M(q_1+q_3+q_1q_2q_3);
\end{array}
$$

Рисунок 1 – Схема алгоритма Евклида: q_i - частное, r_i - остаток от деления. Деление продолжают до получения $r_k = const \neq 0$.

После получения полиномов $N(s)$, $M(s)$, $X(s)$ и $Y(s)$ определяют в общем виде передаточную функцию регулятора и необходимые передаточные функции замкнутой системы, куда $Q(s)$ входит как параметр. $Q(s)$ выбирают такой, чтобы обеспечить необходимое качество системы управления. С учетом определенной таким образом $Q(s)$ рассчитывают передаточную функцию регулятора $W_R(s)$, который гарантированно обеспечивает устойчивость и заданное качество системы управления.

В рассмотренной процедуре используется преобразование Мебиуса, которое своими параметрами $a,b,c,d\in C$ определяет передаточные функции $N(s)$, $M(s)$, $X(s)$ и $Y(s)$ и, следовательно, определяет качество системы управления. Целью данного исследования является раскрытие влияния параметров преобразования Мебиуса на качество системы управления. Для этого необходимо решить следующие задачи:

- исследовать зависимость полюсов передаточной функции замкнутой системы от параметров преобразования Мебиуса;
- исследовать условия робастной устойчивости системы в зависимости от параметров преобразования Мебиуса.

Решение задач и результаты исследований.

Пусть рассматривается неустойчивый объект управления с передаточной функцией $W(s)=\dfrac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+...+b_{m-1}s+b_m}{a_0s^n+a_1s^{n-1}+...+a_{n-1}s+a_n}$. На число правых полюсов и полюсов $s=0$, а также $s=\pm j\omega$ комплексной плоскости ограничений не накладывается. Для построения регулятора $W_R(s)$ на основе Q-параметризации в передаточную функцию сделаем подстановку $s=\dfrac{-a\lambda+b}{c\lambda+d}$:

$W(\lambda)=W(s)\big|_{s=\frac{-a\lambda+b}{c\lambda+d}}=\dfrac{N(\lambda)}{M(\lambda)}$. Заметим, что степень числителя будет равна степени знаменателя и совпадать с порядком передаточной функции n. При делении полиномов по схеме рис. 1 получим, что $q_1\in R$ - вещественное число, а остаток от деления r_1 - полином степени $n-1$. На втором шаге алгоритма Евклида получаем q_2 - полином первой степени и остаток r_2 - полином степени $n-2$. Через n шагов получают $r_n\in R$ - вещественное число, а $q_2,q_3,....,q_n$ - полиномы первой степени. Так как получающиеся в результате алгоритма Эвклида полиномы $X(\lambda)$ и $Y(\lambda)$ представляют собой сумму произведений q_i, то высшей степенью для этих полиномов будет $n-1$. Таким образом, Q-параметризация ведет к построению регуляторов, порядок которых на единицу меньше порядка передаточной функции объекта (при условии, что $Q(s)=0$).

Пусть найдены $X(\lambda)$ и $Y(\lambda)$ такие, что $NX+MY=1$. Следовательно, $W_R(\lambda)=\dfrac{X+MQ}{Y-NQ}$, и передаточная функция замкнутой системы (рис.3) в преобразованиях Мебиуса будет иметь следующий вид:

$$\frac{y(\lambda)}{w(\lambda)}=G(\lambda)=\frac{\frac{N}{M}\cdot\frac{X+MQ}{Y-NQ}}{1+\frac{N}{M}\cdot\frac{X+MQ}{Y-NQ}}=\frac{N(X+MQ)}{MY-MNQ+NX+NMQ}=\frac{N(X+MQ)}{NX+MY}=N(X+MQ).$$

Рассмотрим подробнее передаточную функцию замкнутой системы, приняв тривиальное решение относительно выбора $Q(\lambda)$ или $Q(s)$. Пусть $Q=0$. В этом случае $G(\lambda)=N(\lambda)X(\lambda)$. Если осуществить обратное преобразование Мебиуса, т.е. использовать подстановку $\lambda=\dfrac{-ds+b}{cs+a}$, то знаменателем передаточной функции замкнутой системы $G(s)=G(\lambda)\big|_{\lambda=\frac{-ds+b}{cs+a}}$ окажется $(cs+a)^{2n-1}$. Из этого следует, что

- в результате использования регулятора, построенного с помощью Q-параметризации, все полюса передаточной функции замкнутой системы «стягиваются» в одну точку $s=-a/c$;
- длительность переходного процесса (быстродействие системы) зависит только от параметров a и c преобразования Мебиуса, причем длительность переходного процесса уменьшается с ростом a и увеличивается с увеличением c;
- полюса передаточной функции замкнутой системы не зависят от параметров b и d преобразования Мебиуса;
- наиболее простым решением есть выбор $Q(s)=0$, тогда передаточная функция регулятора $W_R(s)=X(s)/Y(s)$.

В [5] приведена линеаризованная модель аэродинамического объекта, представляющая собой дифференциальное уравнение второго порядка вида $J\ddot{\varphi}(t)=M$ для каждого из углов вращения относительно центра масс в зависимости от момента, создаваемого приводными двигателями. Для стабилизации положения такого объекта используем регуляторы для каждого из углов (рыскания, атаки и тангажа), рассчитанные по приведенной выше методике. Передаточная функция объекта управления (для одного из углов) в данном случае $\varphi(s)/u(s)=k/s^2=W_o(s)$. $W_o(\lambda)=W_o(s)\big|_{s=\frac{-a\lambda+1}{c\lambda}}=\dfrac{kc^2\lambda^2}{(-a\lambda+1)^2}=\dfrac{kc^2\lambda^2}{a^2\lambda^2-2a\lambda+1}=\dfrac{N(\lambda)}{M(\lambda)}$. По алгоритму Евклида (рис.1) найдем частное от деления и остаток на первом шаге алгоритма. Очевидно, частное от деления $q_1=kc^2/a^2$, а остаток - $r_1=2kc^2\lambda/a-kc^2/a^2$. На втором шаге алгоритма разделим $m(\lambda)$ на r_1; частное от деления будет $q_2=\dfrac{a^3}{2kc^2}\lambda-\dfrac{3a^2}{4kc^2}$, а остаток $r_2=0{,}25\neq 0$. На этом алгоритм Евклида заканчивается, а по полученным выражениям для q_1, q_2 и r_2 запишем значения полиномов $X(\lambda)$ и $Y(\lambda)$: из первых двух уравнений на рис.1 находим, что $r_2=-q_2N+(1+q_1q_2)M$. Разделив уравнение на $r_2=0{,}25\neq 0$, получим $NX+MY=N(-q_2/r_2)+M(1+q_1q_2)/r_2=1$.

Следовательно, $X(\lambda)=-q_2/r_2$, $Y(\lambda)=(1+q_1q_2)/r_2$. Подставив в полученные выражения $\lambda=1/(cs+a)$, получим

$X(s)=\dfrac{a^2(3cs+a)}{4r_2kc^2(cs+a)}$ и $Y(s)=\dfrac{cs+3a}{4r_2(cs+a)}$, а регулятор $W_R(s)=\dfrac{X(s)}{Y(s)}=\dfrac{a^2(3cs+a)}{kc^2(cs+3a)}$.

Передаточная функция замкнутой системы $G(s)=\dfrac{a^2(3cs+a)}{(cs+a)^3}=\dfrac{3cs/a+1}{(cs/a+1)^3}$. На рис. 2 показаны переходные функции в замкнутой системе в зависимости от отношения a/c преобразования Мебиуса, принятого при расчете параметров стабилизирующего регулятора. Как видно из рисунка и передаточной функции замкнутой системы, общий вид кривой переходного процесса и величина перерегулирования остаются неизменными при весьма значительном изменении соотношения a/c, которое в конечном счете определяет полюса передаточной функции замкнутой системы и, следовательно, быстродействие замкнутой системы. Из анализа передаточной функции регулятора следует, что выходная величина регулятора обратно пропорциональна коэффициенту усиления объекта и прямо пропорциональна квадрату отношения a/c. Это соотношение следует выбирать исходя из соображений технической реализуемости регулятора. Кроме этого естественным представляется выбор оптимального соотношения a/c, минимизирующего функционал вида $J=\int_0^\infty (qx^2+\rho u^2)dt$, в котором x - рассогласование, u - управляющее воздействие. Решение задачи выбора оптимального соотношения a/c относительно просто решается, если рассматривать задачу минимизации H$_2$-нормы суммы сигналов x и u: $\|qx+\rho u\|_2 \Rightarrow \min$, поскольку передаточные функции регулятора и функции чувствительности (следовательно, сигналы x и u) определены как функции соотношения a/c.

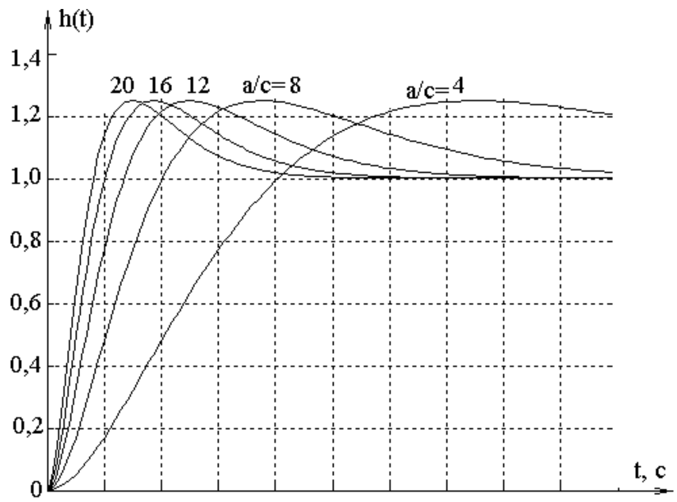

Рисунок 2. Переходные функции в замкнутой системе в зависимости от величины соотношения a/c преобразования Мебиуса

Тривиальное решение относительно $Q(s)$, хотя и не нарушает условия устойчивости замкнутой системы, часто приводит к неудовлетворительному качеству переходного процесса или неудовлетворительной компенсации помех, приведенных к входу (g) или выходу (d) объекта управления. Рассмотрим процедуру обоснованного выбора $Q(s)$ на примере структурной схемы замкнутой системы, представленной на рис. 2. Для эффективной компенсации помех $(g),(d)$ и стабилизации регулируемой переменной y необходимо, чтобы соответствующие передаточные функции были как можно меньше (в идеале – равны нулю). С учетом представления передаточной функции объекта и регулятора как отношение ограниченных сверху и устойчивых передаточных функций соответственно $N(s)$ и $M(s)$, и $X(s)$ и $Y(s)$ запишем соответствующие передаточные функции: $y(s)/g(s) = N(Y - NQ)$ и $y(s)/d(s) = M(Y - NQ)$.

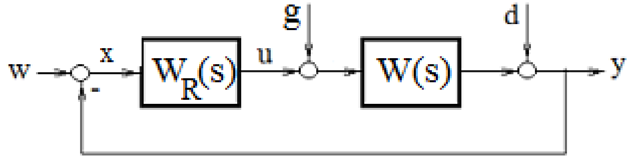

Рисунок 3. Расчетная схема замкнутой системы управления

Обе передаточные функции содержат $Q(s)$ как параметр, входящий линейно в выражения для передаточных функций. Оптимальным выбором для $Q(s)$ при устойчивых ограниченных передаточных функциях $Y(s)$ и $N(s)$ будет $Q_{opt}(s) = Y(s)/N(s)$. Надо заметить, что эта передаточная функция оказывается неограниченной сверху ввиду того, что порядок числителя оказывается больше порядка знаменателя. В этом случае с целью обеспечения реализуемости $Q_{opt}(s)$ ее аппроксимируют реализуемой $Q(s) = Q_{opt}(s)\cdot(\tau s+1)^{-k}$ при достаточно малой постоянной времени τ.

Задача выбора $Q(s)$ серьезно усложняется, если $N(s)$ имеет нули в правой полуплоскости. В этом случае используется представление ее в виде произведения передаточной функции, имеющей нули в правой полуплоскости $N_{nmp}(s)$ и передаточной функции без нулей в правой полуплоскости $N_{mp}(s)$, т.е. $N(s) = N_{nmp}(s)\cdot N_{mp}(s)$. Такое представление всегда возможно, так как $N_{nmp}(s) = \left.\dfrac{s - s_0}{s + s_0}\right|_{s=j\omega} = 1$ для $\forall\omega$. Далее рассматривается H_2-норма выражения

$$\left\|Y - NQ\right\|_2^2 = \left\|Y - N_{nmp}\cdot N_{mp}\cdot Q\right\|_2^2 = \left\|N_{nmp}\cdot(N_{nmp}{}^{-1}Y - N_{mp}\cdot Q)\right\|_2^2 = \left\|N_{nmp}{}^{-1}Y - N_{mp}\cdot Q\right\|_2^2. \quad (1)$$

Заметим, что первое слагаемое теперь будет содержать как устойчивые, так и неустойчивые составляющие, т.е. $N_{nmp}{}^{-1}Y = (N_{nmp}{}^{-1}Y)_{instab} + (N_{nmp}{}^{-1}Y)_{stab}$. (2)

Поскольку при выборе $Q_{opt}(s)$ необходимо использовать только устойчивые ограниченные сверху передаточные функции, а слагаемое $(N_{nmp}^{-1}Y)_{instab}$ нельзя скомпенсировать выбором $Q(s)$, то норма (1) с учетом (2) сводится к выражению $\left\|(N_{nmp}{}^{-1}Y)_{stab} - N_{mp}Q\right\|_2^2 \Rightarrow \min$, откуда

$$Q_{opt}(s) = N_{mp}{}^{-1}(N_{nmp}{}^{-1}Y)_{stab}. \quad (3)$$

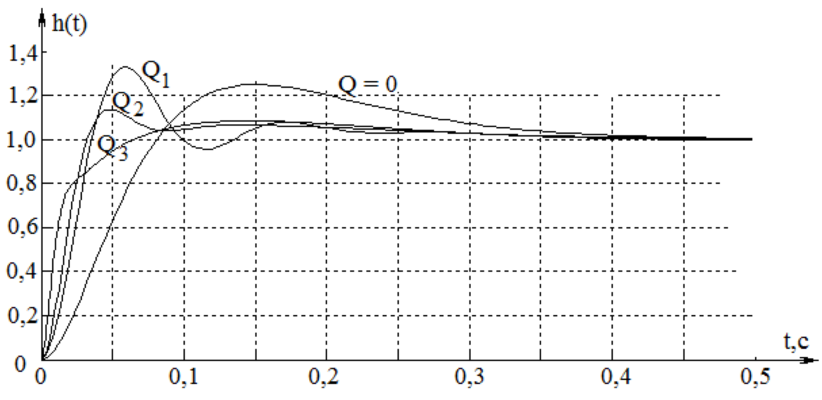

Рисунок 4 – Влияние выбора $Q_{opt}(s)$ на качество системы регулирования

В рассматриваемом случае объекта с передаточной функцией $W_0(s) = k/s^2$ полином $N(s)$ не имеет нулей в правой полуплоскости, поэтому $Q_{opt}(s) = Y(s)F(s)/N(s)$, где передаточная функция $F(s) = (\tau s+1)^{-2}$ вводится для обеспечения реализуемости и ограниченности сверху $Q_{opt}(s)$. Для различных значений постоянной времени τ получают соответственно различные $Q_{opt}(s)$, степень влияния которых на качество переходного процесса иллюстрируется рис 4.

Известно, что критерием робастной устойчивости при наличии аддитивной неопределенности в оценке передаточной функции объекта управления является требование, чтобы $\|W_R(j\omega)\cdot S(j\omega)\cdot \Delta_a(j\omega)\|_\infty < 1$ для $\forall\omega$, где $S(j\omega)$ - функция чувствительности, а $\Delta_a(j\omega)$ - аддитивная погрешность. Поскольку передаточная функция регулятора и передаточные функции в замкнутой системе зависят от выбора параметров преобразования Мебиуса, а именно от соотношения a/c, то и робастная устойчивость также будет зависеть от этого соотношения. В ряде практических случаев интерес представляет оценка допустимой величины аддитивной погрешности в определении передаточной функции объекта, при которой замкнутая система все еще сохраняет устойчивость.

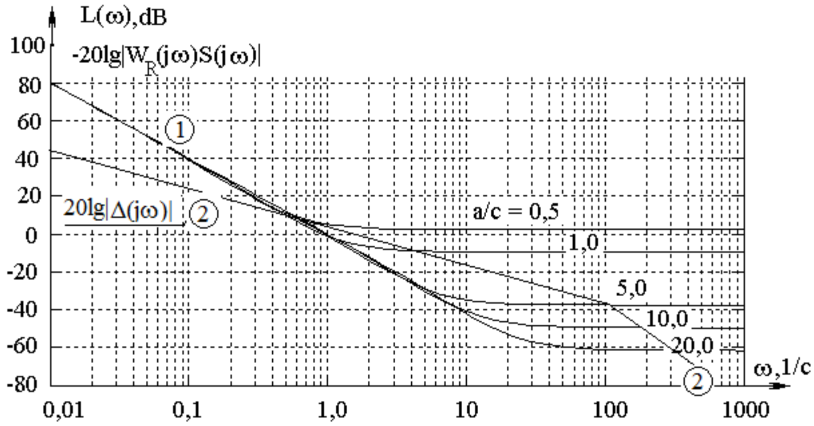

Рисунок 5 – Граница допустимой аддитивной неопределенности в оценке модели объекта в зависимости от параметров a/c преобразования Мебиуса (1) и пример аддитивной ошибки (2), которая нарушит устойчивость системы

На рис. 5 представлена граница допустимой ошибки (кривая 1) при определении передаточной функции и оценке параметров объекта ($W_0(s) = k/s^2$) в зависимости от значения a/c преобразования Мебиуса. В области низких частот погрешность может быть весьма значительной, и тем не менее регулятор стабилизирует неустойчивый объект. В области высоких частот точность в оценке параметров объекта должна быть тем выше, чем больше соотношение a/c. Другими словами большие значения a/c преобразования Мебиуса требуют более точного определения передаточной функции объекта управления. Если, предположим, при идентификации передаточной функции объекта не учтено колебательное звено ввиду весьма малой его постоянной времени, то это будет означать, что модель объекта определена с ошибкой, величина которой показана на рис.5 (кривая 2). В области высоких частот ошибка $|\Delta_a(j\omega)|$ больше допустимой, что гарантированно приведет к потере устойчивости замкнутой системы.

Выводы.

При определении структуры и параметров стабилизирующих регуляторов с использованием Q-параметризации используется преобразование Мебиуса, параметры которого непосредственно влияют на качество системы регулирования, прежде всего на быстродействие, а также на робастную устойчивость замкнутой системы управления, а именно:

- полюса передаточной функции замкнутой системы «стягиваются» в одну точку $s = -a/c$ и не зависят от параметров b и d преобразования Мебиуса;
- большие значения a/c преобразования Мебиуса требуют более точного определения передаточной функции объекта управления;
- с целью упрощения вычислений по алгоритму Евклида следует в преобразовании Мебиуса полагать $d = 0$ и $b = 1$.

Результаты, полученные в данном исследовании, могут применяться для расчетов стабилизирующих регуляторов, обеспечивающих необходимое быстродействие и робастность замкнутой системы.

Список использованной литературы

1. Müller K. Entwurf robuster Regelungen. – Stuttgart, B.G.Teubner Verlag, 1996.-230 p.
2. Методы классической и современной теории автоматического управления: учебник в 5 томах., Т3: Синтез регуляторов систем автоматического управления. Под ред. Н.Д.Егупова.- М.: изд.МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2004. -617с.
3. Дорф Р., Бишоп Р. Современные системы управления/Р.Дорф, Р.Бишоп. Пер. с англ. Б.И.Копылова. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002.- 832с.
4. Филлипс Ч., Харбор Р. Системы управления с обратной связью. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2001.- 616с.
5. Хорхордин А.В., Олейников Е.А.,

А.В.Хорхордін, С.С.Батир, А.Безрук Про вибір параметрів перетворення Мебіусу при конструюванні стабілізуючих регуляторів. *Виконано аналіз впливу параметрів перетворення Мебіусу на якість системи керування нестійкими об’єктами.. Розглянута послідовність розрахунку стабілізуючих регуляторів на підставі Q-параметризації. Приведений вибір структури регулятору і рекомендації щодо вибору його параметрів для об’єкту , який є послідовним включенням двох інтеграторів. Виконано перевірка робастної стійкості замкненої системи керування.*

Ключові слова: *перетворення Мебіусу, регулятор, Q-параметризація, математична модель,, передавальна функція, робастна стійкість, .*

А.В.Хорхордін, С.С.Батир, А.Безрук The choice of parameters of a Möbius transformation in the design stabilizing controller. *The analysis of the influence of parameters on the quality of a Möbius transformation management system unstable objects. The sequence of calculation stabilizing controllers based on the Q-parameterization. The election of the controller structure and recommendations on the choice of its parameters for the object, which is a series connection of two integrators. To test to the robust stability of the closed system of regulation.*

Keywords: *Möbius transformation, the regulator, Q-parameterization, the mathematical model, the transfer function, robust stability.*