# МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ДИСПЕРСНОЙ СРЕДЫ

Ю.А. Галенко, М.О. Сысоева

*Предложена математическая модель дисперсной (мутной) среды, позволяющая рассчитать ее спектральный коэффициент излучения $\varepsilon$ в широком диапазоне спектра, включающем длины волн $\lambda$, соизмеримые с диаметром частиц $d$. Рассчитан вид зависимости $\varepsilon(\lambda)$ для сред, различающихся материалом частиц. Показано, что зависимость $\varepsilon(\lambda)$ может иметь экстремумы и несет информацию о материале частиц.*

Информация о спектральном коэффициенте излучения дисперсных сред требуется при исследованиях процесса горения, расчете теплообмена продуктов сгорания с окружающими телами, а также при разработке оптических средств и методов диагностики дисперсных сред в различных технологических процессах.

Экспериментальное определение зависимости коэффициента излучения $\varepsilon$ от длины волны излучения $\lambda$ требует значительных трудозатрат, а полученные при этом результаты, как правило, не могут использоваться в случае изменения характеристик дисперсной среды: оптической толщины, материала частиц и их размеров. Поэтому актуальна разработка математических моделей, позволяющих расчетным путем оценить влияние характеристик дисперсной среды на параметры ее излучения.

Задачей исследования являлось создание математической модели полубесконечного слоя излучающей, поглощающей и рассеивающей дисперсной среды. Модель предназначалась для исследования влияния характеристик частиц на параметры оптического излучения дисперсной среды. Поэтому излучение газа не рассматривалось. Основой модели является теория Ми [1, 2]. Для определения теплового коэффициента излучения используется решение задачи теплообмена в плоском слое излучающей, поглощающей и рассеивающей среды [3].

Распространение излучения сопровождается его поглощением и рассеянием. Это может существенно влиять на величину коэффициента излучения $\varepsilon(\lambda)$ дисперсной среды [4], который определяется выражением [3]:

$$\varepsilon(\lambda) = \frac{4\cdot\varepsilon_w}{2\cdot(1-\varepsilon_w) + \sqrt{3}\cdot\varepsilon_w\cdot R}, \qquad (1)$$

где $\varepsilon_w$ – коэффициент излучения поверхности, ограничивающей дисперсную среду; $R = \sqrt{1 + (1-\Gamma_\lambda)\dfrac{\sigma_\lambda}{\alpha_\lambda}}$; $\Gamma_\lambda$ – параметр, определяемый видом индикатрисы рассеяния: $\Gamma_\lambda = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^\pi I_\lambda(\theta)\cos\theta\sin\theta d\theta$; $I_\lambda(\theta)$ – индикатриса рассеяния; $\theta$ – угол рассеяния; $\sigma_\lambda = \dfrac{k_{\lambda\sigma}}{\rho}$ – массовый коэффициент ослабления рассеянием; $\alpha_\lambda = \dfrac{k_{\lambda\alpha}}{\rho}$ – массовый коэффициент ослабления поглощением; $k_{\lambda\sigma}$ – коэффициент ослабления рассеянием; $k_{\lambda\alpha}$ – коэффициент ослабления поглощением; $\rho$ – плотность дисперсной среды.

В настоящей работе коэффициенты ослабления поглощением $k_{\lambda\alpha}$, рассеянием $k_{\lambda\sigma}$ и индикатриса рассеяния $I_\lambda(\theta)$, входящие в уравнение (1), определяются по теории Ми [1], что позволяет использовать создаваемую модель для расчетов в широком диапазоне длин волн, включающем величины $\lambda$, имеющие один порядок с диаметром частиц $d$. Согласно Ми, дифрагированное поле представляется в виде суммы отдельных парциальных волн. Интенсивность $\nu$-ой парциальной волны определяется значениями амплитуд парциальных электрических $a_\nu$ и магнитных $b_\nu$ колебаний, которые в свою очередь определяют полное ослабление потока излучения при прохождении его через частицу:

$$k_\lambda = k_{\lambda\sigma} + k_{\lambda a}.$$

Формулы Ми для коэффициентов полного ослабления, ослабления рассеянием и индикатрисы рассеяния записываются в виде [1]:

$$k_\lambda = \frac{2}{x^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}(2\nu+1)\operatorname{Re}(a_\nu + b_\nu); \qquad (2)$$

$$k_{\lambda\sigma} = \frac{2}{x^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}(\nu+1)\left(|a_\nu|^2+|b_\nu|^2\right); \qquad (3)$$

$$I_\lambda(\theta) = \frac{I_0}{2x^2}\cdot\left[\left|\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2\nu+1}{\nu(\nu+1)}\left(a_\nu Q_\nu + b_\nu S_\nu\right)\right|^2 + \right. \\ \left. + \left|\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2\nu+1}{\nu(\nu+1)}\left(b_\nu Q_\nu + a_\nu S_\nu\right)\right|^2\right], \qquad (4)$$

где $x = \frac{\pi d}{\lambda}$ – параметр дифракции; $I_0$ – интенсивность падающего излучения.

Формулы (2) – (4) используются при выводе величин, описывающих интенсивность рассеянного излучения, и являются основой для расчета спектрального коэффициента излучения дисперсной среды.

Угловые функции $Q_\nu$ и $S_\nu$ вычисляются с помощью полиномов Лежандра и их производных. Используя рекуррентные формулы для полиномов Лежандра $P_\nu(\mu)$, где $\mu = \cos\theta$, и их производных, получаются рекуррентные формулы для угловых функций [1]:

$$Q_\nu(\mu) = \mu\frac{2\nu-1}{\nu-1}Q_{\nu-1}(\mu) - \frac{\nu}{\nu-1}Q_{\nu-2}(\mu); \qquad (5)$$

$$S_\nu(\mu) = \mu\left[Q_\nu(\mu) - Q_{\nu-2}(\mu)\right] - (\nu-1)(1-\mu^2)Q_{\nu-1}(\mu) + S_{\nu-2}(\mu) \\ (-1 \le \mu \le 1), \qquad (6)$$

где $Q_\nu(\mu) = \frac{dP_\nu(\mu)}{d\mu}$;

$$S_\nu(\mu) = \mu Q_\nu(\mu) - (1-\mu^2)\frac{dQ_\nu(\mu)}{d\mu};$$

$$P_\nu(\mu) = \frac{1}{2^\nu \nu!}\frac{d^\nu}{d\mu^\nu}(\mu^2-1)^\nu.$$

Коэффициенты Ми $a_\nu$ и $b_\nu$ выражаются через функции Риккати-Бесселя произвольного порядка и аргумента $\Psi_\nu(x)$, $\xi_\nu(x)$ [5]:

$$a_\nu = \frac{A_\nu(y)\Psi_\nu(x) - m\Psi'_\nu(x)}{A_\nu(y)\xi_\nu(x) - m\xi'_\nu(x)}; \qquad (7)$$

$$b_\nu = \frac{mA_\nu(y)\Psi_\nu(x) - \Psi'_\nu(x)}{mA_\nu(y)\xi_\nu(x) - \xi'_\nu(x)}, \qquad (8)$$

где $y = m\cdot x$; $m$ – комплексный показатель преломления материала частицы; $\Psi_\nu(x)$, $\xi_\nu(x)$ вычисляются с помощью цилиндрических функций (функций Бесселя первого рода) порядка $\nu+1/2$ [2]:

$$\Psi_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}}\,J_{\nu+1/2}(x);$$

$$\xi_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}}\left[J_{\nu+1/2}(x) + (-1)^\nu i\,J_{-\nu-1/2}(x)\right];$$

$$A_\nu(y) = \frac{\Psi'_\nu(y)}{\Psi_\nu(y)}.$$

Производные функций Риккати-Бесселя рассчитываются по рекуррентным формулам для вычисления производных цилиндрических функций произвольного порядка и аргумента [5]:

$$\Psi'_\nu(x) = \frac{d}{dx}\left[\sqrt{\frac{\pi x}{2}}\,J_{\nu+1/2}(x)\right] = \\ = \sqrt{\frac{\pi x}{2}}\left[J_{\nu-1/2}(x) - \frac{\nu}{x}J_{\nu+1/2}(x)\right];$$

$$\xi'_\nu(x) = \frac{d}{dx}\left[J_{\nu+1/2}(x) + (-1)^\nu i\,J_{-\nu-1/2}(x)\right] = \\ = \sqrt{\frac{\pi x}{2}}\left\{J_{\nu-1/2}(x) - \frac{\nu}{x}J_{\nu+1/2}(x) - \right. \\ \left. - (-1)^\nu i\left[J_{-\nu+1/2}(x) + \frac{\nu}{x}J_{-\nu-1/2}(x)\right]\right\}.$$

Очевидно, что коэффициенты Ми $a_\nu$ и $b_\nu$ зависят только от значений комплексного показателя преломления $m$ и параметра дифракции $x$. Если показатель преломления – комплексная величина, то цилиндрические функции зависят от комплексного аргумента.

Выражения $\Psi_\nu(x)$, $\xi_\nu(x)$ через функции Бесселя и рекуррентные формулы производных для цилиндрических функций подставляются в (7) и (8), тогда формулы для коэффициентов Ми приобретают следующий вид:

$$a_\nu(m,x) = \left[\left(\frac{A_\nu(y)}{m} + \frac{\nu}{x}\right)J_{\nu+1/2}(x) - J_{\nu-1/2}(x)\right]\times \\ \times\left[\left(\frac{A_\nu(y)}{m} + \frac{\nu}{x}\right)\left[J_{\nu+1/2}(x) + (-1)^\nu i\,J_{-\nu-1/2}(x)\right] - \right. \\ \left. - \left[J_{\nu-1/2}(x) - (-1)^\nu i\,J_{-\nu+1/2}(x)\right]\right]^{-1}; \qquad (9)$$

$$b_\nu(m,x) = \left[\left(mA_\nu(y) + \frac{\nu}{x}\right)J_{\nu+1/2}(x) - J_{\nu-1/2}(x)\right]\times \\ \times\left[\left(mA_\nu(y) + \frac{\nu}{x}\right)\left[J_{\nu-1/2}(x) + (-1)^\nu i\,J_{-\nu-1/2}(x)\right] - \right. \\ \left. - \left[J_{\nu-1/2}(x) - (-1)^\nu i\,J_{-\nu+1/2}(x)\right]\right]^{-1}. \qquad (10)$$

Для удобства представления формул (9), (10) на ЭВМ используются следующие выражения для коэффициентов [5]:

$$a_\nu = \frac{\left[\frac{A_\nu(y)}{m} + \frac{\nu}{x}\right]\operatorname{Re}\{w_\nu(x)\} - \operatorname{Re}\{w_{\nu-1}(x)\}}{\left[\frac{A_\nu(y)}{m} + \frac{\nu}{x}\right] w_\nu(x) - w_{\nu-1}(x)};$$

$$b_\nu = \frac{\left[mA_\nu(y) + \frac{\nu}{x}\right]\operatorname{Re}\{w_\nu(x)\} - \operatorname{Re}\{w_{\nu-1}(x)\}}{\left[mA_\nu(y) + \frac{\nu}{x}\right] w_\nu(x) - w_{\nu-1}(x)},$$

где $A_\nu(y)$, $w_\nu(x)$ – функции, вычисляемые по рекуррентным формулам:

$$A_\nu(y) = -\frac{\nu}{y} + \frac{1}{\frac{\nu}{y} - A_{\nu-1}(y)}, \quad \nu = 1, 2, \ldots;$$

$$w_\nu(x) = \frac{2\nu-1}{x}\cdot w_{\nu-1}(x) - w_{\nu-2}(x).$$

Начальные значения этих функций рассчитываются следующим образом:

$$A_0(y) = \frac{J_{-1/2}(y)}{J_{1/2}(y)} = \frac{\cos y}{\sin y} = \frac{\cos(p+iq)}{\sin(p+iq)} = \frac{\sin p \cos p - i\, sh\, q\, ch\, q}{\sin^2 p + sh^2 q},$$

где $y = m\cdot x = p + iq$; $p = nx$; $q = -\chi x$; $n$ – показатель преломления материала частицы; $\chi$ – показатель поглощения материала частицы.

$$w_0(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}}\left[J_{1/2}(x) + i\cdot J_{-1/2}(x)\right] = \sin x + i\cos x;$$

$$w_{-1}(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}}\left[J_{-1/2}(x) - i\cdot J_{1/2}(x)\right] = \cos x - i\sin x,$$

где значения $J_{1/2}(x)$, $J_{-1/2}(x)$ вычисляются по формуле [5]:

$$J_{\nu-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot x^\nu \cdot \left(-\frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dx}\right)^\nu \cos x.$$

Для вычисления коэффициентов расчетные формулы (2), (3) и (4) преобразуются к следующему виду:

$$k_\lambda = \frac{2}{x^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}(2\nu+1)\operatorname{Re}(a_\nu + b_\nu) = \frac{2}{x^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}(2\nu+1)(\operatorname{Re} a_\nu + \operatorname{Re} b_\nu); \quad (11)$$

$$k_{\lambda\sigma} = \frac{2}{x^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}(2\nu+1)\left(|a_\nu|^2 + |b_\nu|^2\right) = \frac{2}{x^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}(2\nu+1)\left[(\operatorname{Re} a_\nu)^2 + (\operatorname{Im} a_\nu)^2 + (\operatorname{Re} b_\nu)^2 + (\operatorname{Im} b_\nu)^2\right]; \quad (12)$$

$$I = I_1 + I_2,$$

$$I_1 = \frac{I_0}{2x^2}\cdot\left|\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2\nu+1}{\nu(\nu+1)}\left[(\operatorname{Re} a_\nu Q_\nu + \operatorname{Re} b_\nu S_\nu) + i(\operatorname{Im} a_\nu Q_\nu + \operatorname{Im} b_\nu S_\nu)\right]\right|^2;$$

$$I_2 = \frac{I_0}{2x^2}\cdot\left|\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2\nu+1}{\nu(\nu+1)}\left[(\operatorname{Re} b_\nu Q_\nu + \operatorname{Re} a_\nu S_\nu) + i(\operatorname{Im} b_\nu Q_\nu + \operatorname{Im} a_\nu S_\nu)\right]\right|^2. \quad (13)$$

Как видно из формул (11) – (13), существенной частью задачи об определении коэффициентов ослабления и индикатрисы рассеяния является выделение действительных и мнимых частей комплексных величин $a_\nu$ и $b_\nu$.

Первоначально выделяются действительные и мнимые части для всех величин исходных данных (14) – (19):

$$y = \operatorname{Re} y - i\operatorname{Im} y,$$

где

$$\begin{cases}\operatorname{Re} y = x\cdot\operatorname{Re} m = x\cdot n,\\ \operatorname{Im} y = x\cdot\operatorname{Im} m = x\cdot\chi,\end{cases} \quad (14)$$

так как $m = n - i\chi$.

$$\begin{cases}\operatorname{Re}\{w_{-1}(x)\} = \cos x,\\ \operatorname{Im}\{w_{-1}(x)\} = -\sin x;\end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases}\operatorname{Re}\{w_0(x)\} = \sin x,\\ \operatorname{Im}\{w_0(x)\} = \cos x.\end{cases} \quad (16)$$

Из выражения $A_0(y) = \frac{\sin p\cos p - i\, sh\, q\, ch\, q}{\sin^2 p + sh^2 q}$, учитывая, что $sh\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $ch\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, получается:

$$A_0(y) = \frac{\sin p\cos p - i\, sh\, q\, ch\, q}{\sin^2 p + sh^2 q} = \frac{\sin p\cos p - i\,\frac{e^q - e^{-q}}{2}\cdot\frac{e^q + e^{-q}}{2}}{\sin^2 p + \frac{(e^q - e^{-q})^2}{4}} = \frac{\sin p\cos p - i\,\frac{e^{2q} - e^{-2q}}{4}}{\sin^2 p + \frac{(e^q - e^{-q})^2}{4}} = \frac{4\sin p\cos p - i\,(e^{2q} - e^{-2q})}{4\sin^2 p + (e^q - e^{-q})^2} =$$

$$= \frac{4\sin p\cos p - i\left(e^{2q} - e^{-2q}\right)}{4\sin^2 p + e^{2q} - 2\cdot e^{q}\cdot e^{-q} + e^{-2q}} =$$

$$= \frac{4\sin p\cos p - i\left(e^{2q} - e^{-2q}\right)}{4\sin^2 p + e^{2q} - 2 + e^{-2q}} =$$

$$= \frac{4\sin p\cos p + i\left(e^{-2q} - e^{2q}\right)}{4\sin^2 p + e^{2q} + e^{-2q} - 2}.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} \operatorname{Re} A_0(y) = \dfrac{4\sin p\cos p}{4\sin^2 p + e^{2q} + e^{-2q} - 2}, \\ \operatorname{Im} A_0(y) = \dfrac{e^{-2q} - e^{2q}}{4\sin^2 p + e^{2q} + e^{-2q} - 2}. \end{cases} \quad (17)$$

При использовании соотношений (5), (6), начальные значения угловых функций получаются следующими:

$$Q_0(\theta) = 0,\ Q_1(\theta) = 1,\ Q_2(\theta) = 3\cos\theta; \quad (18)$$

$$S_0(\theta) = 0,\ S_1(\theta) = \cos\theta,\ S_2(\theta) = 3\cos 2\theta. \quad (19)$$

Далее определяются действительные и мнимые части для рекуррентных формул функций $A_\nu(y)$ и $w_\nu(x)$ (20), (21).

$$\begin{cases} \operatorname{Re} A_\nu(y) = -\operatorname{Re} A + \left[\operatorname{Re} A - \operatorname{Re} A_{\nu-1}(y)\right] \\ \quad \times[\left(\operatorname{Re} A - \operatorname{Re} A_{\nu-1}(y)\right)^2 + \\ \quad + \left(\operatorname{Im} A - \operatorname{Im} A_{\nu-1}(y)\right)^2]^{-1}, \\ \operatorname{Im} A_\nu(y) = -\operatorname{Im} A + \left[\operatorname{Im} A + \operatorname{Im} A_{\nu-1}(y)\right] \\ \quad \times[\left(\operatorname{Re} A - \operatorname{Re} A_{\nu-1}(y)\right)^2 + \\ \quad + \left(\operatorname{Im} A - \operatorname{Im} A_{\nu-1}(y)\right)^2]^{-1}, \end{cases} \quad (20)$$

где

$$\operatorname{Re} A = \frac{\nu^* \operatorname{Re} y}{\left(\operatorname{Re} y\right)^2 + \left(\operatorname{Im} y\right)^2};\ \operatorname{Im} A = \frac{\nu^* \operatorname{Im} y}{\left(\operatorname{Re} y\right)^2 + \left(\operatorname{Im} y\right)^2}.$$

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\left(w_\nu(x)\right) = \dfrac{2\nu-1}{x}\operatorname{Re}\left(w_{\nu-1}(x)\right) - \operatorname{Re}\left(w_{\nu-2}(x)\right), \\ \operatorname{Im}\left(w_\nu(x)\right) = \dfrac{2\nu-1}{x}\operatorname{Im}\left(w_{\nu-1}(x)\right) - \operatorname{Im}\left(w_{\nu-2}(x)\right). \end{cases} \quad (21)$$

Для коэффициентов Ми выполняются аналогичные действия (22), (23):

$$\begin{cases} \operatorname{Re} a_\nu = \dfrac{\operatorname{Re} C\cdot\operatorname{Re} D + \operatorname{Im} C\cdot\operatorname{Im} D}{\left(\operatorname{Re} D\right)^2 + \left(\operatorname{Im} D\right)^2}, \\ \operatorname{Im} a_\nu = \dfrac{\operatorname{Re} D\cdot\operatorname{Im} C - \operatorname{Re} C\cdot\operatorname{Im} D}{\left(\operatorname{Re} D\right)^2 + \left(\operatorname{Im} D\right)^2}, \end{cases} \quad (22)$$

где

$$\operatorname{Re} C = \operatorname{Re} B\cdot\operatorname{Re}\left(w_\nu(x)\right) - \operatorname{Re}\left(w_{\nu-1}(x)\right),$$

$$\operatorname{Im} C = \operatorname{Im} B\cdot\operatorname{Re}\left(w_\nu(x)\right),$$

$$\operatorname{Re} D = \operatorname{Re} B\cdot\operatorname{Re}\left(w_\nu(x)\right) - \operatorname{Im} B\cdot\operatorname{Im}\left(w_\nu(x)\right) - \operatorname{Re}\left(w_{\nu-1}(x)\right),$$

$$\operatorname{Im} D = \operatorname{Re}\left(w_\nu(x)\right)\operatorname{Im} B + \operatorname{Re} B\cdot\operatorname{Im}\left(w_\nu(x)\right) - \operatorname{Im}\left(w_{\nu-1}(x)\right),$$

$$\operatorname{Re} B = \frac{\operatorname{Re} A_\nu(y)\operatorname{Re} m - \operatorname{Im} A_\nu(y)\operatorname{Im} m}{\left(\operatorname{Re} m\right)^2 + \left(\operatorname{Im} m\right)^2} + \frac{\nu}{x},$$

$$\operatorname{Im} B = \frac{\operatorname{Re} m\cdot\operatorname{Im} A_\nu(y) - \operatorname{Re} A_\nu(y)\operatorname{Im} m}{\left(\operatorname{Re} m\right)^2 + \left(\operatorname{Im} m\right)^2}.$$

$$\begin{cases} \operatorname{Re} b_\nu = \dfrac{\operatorname{Re} F\cdot\operatorname{Re} G + \operatorname{Im} F\cdot\operatorname{Im} G}{\left(\operatorname{Re} G\right)^2 + \left(\operatorname{Im} G\right)^2}, \\ \operatorname{Im} b_\nu = \dfrac{-\operatorname{Re} F\cdot\operatorname{Im} G + \operatorname{Im} F\cdot\operatorname{Re} G}{\left(\operatorname{Re} G\right)^2 + \left(\operatorname{Im} G\right)^2}, \end{cases} \quad (23)$$

где

$$\operatorname{Re} F = \operatorname{Re} E\cdot\operatorname{Re}\left(w_\nu(x)\right) - \operatorname{Re}\left(w_{\nu-1}(x)\right),$$

$$\operatorname{Im} F = \operatorname{Im} E\cdot\operatorname{Re}\left(w_\nu(x)\right),$$

$$\operatorname{Re} G = \operatorname{Re} E\cdot\operatorname{Re}\left(w_\nu(x)\right) - \operatorname{Im} E\cdot\operatorname{Im}\left(w_\nu(x)\right) - \operatorname{Re}\left(w_{\nu-1}(x)\right),$$

$$\operatorname{Im} G = \operatorname{Re} E\cdot\operatorname{Im}\left(w_\nu(x)\right) + \operatorname{Im} E\cdot\operatorname{Re}\left(w_\nu(x)\right) - \operatorname{Im}\left(w_{\nu-1}(x)\right),$$

$$\operatorname{Re} E = \operatorname{Re} m\cdot\operatorname{Re} A_\nu(y) - \operatorname{Im} m\cdot\operatorname{Im} A_\nu(y) + \frac{\nu}{x},$$

$$\operatorname{Im} E = \operatorname{Re} m\cdot\operatorname{Im} A_\nu(y) + \operatorname{Im} m\cdot\operatorname{Re} A_\nu(y)$$

Согласно [6], индикатриса рассеяния, присутствующая в уравнении переноса, должна быть нормализована:

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi} I_\lambda(\theta)\,dw = 1.$$

Нормализация производится следующим образом:

$$\sum_{i=0}^{4\pi} \frac{I_\lambda(\theta)}{\sum_0^{4\pi} I_\lambda(\theta)} = 1.$$

Математическая модель (1), (5), (6), (11)-(23) реализована в виде программы в среде программирования Borland Delphi 7.

Первоначально задаются исходные данные: размер и оптические характеристики материала частицы, диапазон изменения длины волны излучения, количество узлов разбиения интервала длин волн, коэффициент излучения поверхности, ограничивающей дисперсную среду, температура дисперсной среды и концентрация частиц в дисперсной среде.

В подпрограмме Ryad рассчитываются значения коэффициентов ослабления излучения $k_\lambda$, $k_{\lambda\alpha}$, $k_{\lambda\sigma}$ и интенсивности рассеянного излучения $I_\lambda(\theta)$ для заданной последовательности длин волн (значений параметра дифракции), угла рассеяния и заданного количества членов ряда. Расчет коэффициентов Ми и индикатрисы рассеяния выполняется по схеме прямой рекурсии. Предел суммирования в (11) – (13) устанавливается равным максимальному значению параметра дифракции, поскольку большее количество членов ряда не приводит к заметному изменению результата.

В подпрограмме Ind величины $I_\lambda(i)$ нормализуются, и вычисляется значение параметра $\Gamma_\lambda$ при длине волны излучения $\lambda$:

$$\Gamma_\lambda = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\pi}\frac{I_\lambda(i)}{\sum\limits_{0}^{\pi} I_\lambda(i)}\sin i \cos i \, di,$$

где $I_\lambda(i)$ – интенсивность рассеянного излучения при $i$-м угле рассеяния и длине волны излучения $\lambda$.

Головная программа выполняет построение зависимости коэффициента излучения дисперсной среды от длины волны излучения.

С использованием разработанной программы выполнены расчеты спектрального коэффициента излучения для веществ с известными оптическими характеристиками: углерода, воды, окиси алюминия. Использовались следующие исходные данные:

– диаметр частицы $d = 6$ мкм;

– показатель преломления материала частицы: $n_1 = 2$ (углерод), $n_2 = 1{,}3299$ (вода), $n_3 = 1{,}74$ (окись алюминия);

– показатель поглощения материала частицы: $\chi_1 = 0{,}67$ (углерод), $\chi_2 = 0{,}01$ (вода), $\chi_3 = 0{,}02557$ (окись алюминия);

– диапазон изменения длины волны $0{,}2 \div 30$ мкм;

– количество точек по длине волны 2000;

– коэффициент излучения поверхности, ограничивающей дисперсную среду, 1.

На рис. представлены полученные зависимости $\varepsilon(\lambda)$. Для сравнения приведен спектральный коэффициент излучения материала частиц $Al_2O_3$ при $T = 1273$ К (кривая 4) [7].

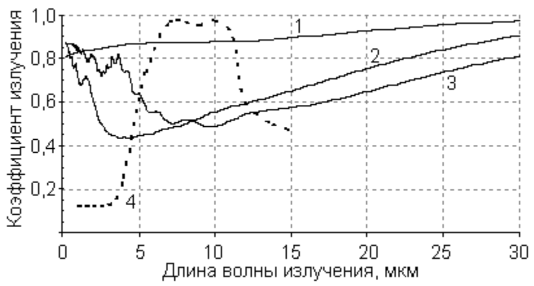


Рис. Зависимость коэффициента излучения от длины волны для среды, содержащей частицы углерода (1), капли воды (2), частицы окиси алюминия при реальной индикатрисе рассеяния (3)

Полученные зависимости $\varepsilon(\lambda)$ иллюстрируют следующие закономерности:

– величина спектрального коэффициента излучения дисперсной среды и вид графика $\varepsilon(\lambda)$ в значительной мере определяются материалом частиц;

– коротковолновая область зависимости $\varepsilon(\lambda)$ может содержать ярко выраженные экстремумы, объясняемые, по-видимому, дифракцией теплового излучения на частицах;

– в области длинных волн коэффициент излучения перестает зависеть от материала частицы и стремится к определенному асимптотическому значению.

Таким образом, предложена и реализована в виде программы математическая модель, позволяющая определять вид зависимости спектрального коэффициента излучения дисперсной среды от длины волны. Модель позволяет учесть оптические характеристики материала частиц, их диаметр и индикатрису рассеяния. Выполнены расчеты $\varepsilon(\lambda)$ для веществ с существенно различающимися оптическими характеристиками, подтверждающие работоспособность модели. Показано, что зависимость коэффициента излучения дисперсной среды от длины волны может иметь экстремумы и несет информацию о материале частиц.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Чандрасекар С. Перенос лучистой энергии. – М.: ИЛ, 1953.
2. Шифрин К.С. Рассеяние света в мутной среде. – М.: Госттехиздат, 1951.
3. Поляков В.И., Румынский А.Н. Лучистый теплообмен в плоскопараллельном слое излучающего, поглощающего и рассеивающего газа при произвольной индикатрисе рассеяния. Изв. АН СССР. МЖГ. – 1968. – № 3. – С. 166-169.
4. Галенко Ю.А., Сысоева М.О. Некоторые вопросы пирометрии дисперсных сред и моделирования их излучения. Ползуновский вестник. – 2006. – № 2-2. – С. 39-40.
5. Воронцов А.А., Мировицкая С.Д. Специальные функции задач теории рассеяния: Справочник. – М.: Радио и связь, 1991.
6. Бай Ши-И. Динамика излучающего газа. – М.: Издательство «Мир», 1968.
7. Шейндлин А.Е. Излучательные свойства твердых материалов. Справочник. – М.: Энергия, 1974.