

УДК 681.51+519.711

СТАБИЛИЗАЦИЯ ПО ИЗМЕРЯЕМОМУ ВЫХОДУ ДВУЗВЕННОГО ПЕРЕВЕРНУТОГО МАЯТНИКА

© 2012 г.

А.А. Федюков

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

TeleginSasha@yandex.ru

Поступила в редакцию 02.11.2011

Рассматривается задача стабилизации динамического объекта с помощью регулятора по измеряемому выходу. Показано, что решение задачи в случае поиска регулятора пониженного порядка сводится к поиску двух взаимно-обратных матриц, удовлетворяющих матричным неравенствам. Предложен алгоритм поиска этих матриц и показаны условия его сходимости. Построена модель двухзвенного перевернутого маятника и решены задачи стабилизации по измеряемому выходу полного и пониженного порядков.

Ключевые слова: стабилизация, управление, линейные матричные неравенства.

Введение

Задача стабилизации по состоянию линейного динамического объекта является одной из классических задач в теории управления [1] и предполагает возможность измерения полного состояния системы. Очевидно, что у многих реальных объектов состояние измерить полностью невозможно. В связи с этим возникает нетривиальная задача стабилизации при отсутствии полной информации о состоянии системы. В данной работе предложен подход к синтезу закона управления, который обеспечивает стабилизацию механических систем, функционирующих в условиях неопределенности. Этот подход основан на применении аппарата линейных матричных неравенств. В качестве примера рассмотрена задача стабилизации двухзвенного перевернутого маятника при наличии информации лишь об угле отклонения его нижнего звена.

1. Математическая модель двухзвенного перевернутого маятника

Рассмотрим плоский двухзвенный перевернутый маятник, изображенный на рис. 1, со звеньями, имеющими одинаковую длину l , и с равными массами m на концах звеньев. Углы отклонения звеньев маятника от вертикали обозначим φ_1 и φ_2 , а горизонтальное смещение точки опоры в плоскости качания маятника – U .

Составим математическую модель плоского двухзвенного перевернутого маятника.

Обозначим ξ_j, η_j координату j -й массы маятника. Непосредственно из рис. 1 находим, что

$$\xi_1 = U - l \sin \varphi_1, \quad \eta_1 = l \cos \varphi_1,$$

$$\xi_2 = U - l \sin \varphi_1 - l \sin \varphi_2, \quad \eta_2 = l \cos \varphi_1 + l \cos \varphi_2.$$

Тогда кинетическая T и потенциальная V энергии маятника будут иметь следующий вид:

$$T = \frac{m}{2} [(\dot{U} - \dot{\varphi}_1 l \cos \varphi_1)^2 + (\dot{\varphi}_1 l \sin \varphi_1)^2 + (\dot{U} - \dot{\varphi}_1 l \cos \varphi_1 - \dot{\varphi}_2 l \cos \varphi_2)^2 + (\dot{\varphi}_1 l \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_2 l \sin \varphi_2)^2],$$

$$V = mgl(2 \cos \varphi_1 + \cos \varphi_2).$$

Введем функцию Лагранжа $L = T - V$ и запишем уравнения Лагранжа $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_i} = 0$,

($i = 1, 2$) для рассматриваемой системы. Ограничимся малыми углами φ_1, φ_2 и введем безразмерное время $\bar{t} = \sqrt{\frac{g}{l}} t$. Получим уравнения:

$$2\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 - 2\varphi_1 - 2\frac{\ddot{U}}{l} = 0, \quad \ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 - \varphi_2 - \frac{\ddot{U}}{l} = 0.$$

Отсюда

$$\ddot{\varphi}_1 = 2\varphi_1 - \varphi_2 + \frac{\ddot{U}}{l}, \quad \ddot{\varphi}_2 = -2\varphi_1 + 2\varphi_2$$

или в каноническом виде управляемой линейной системы

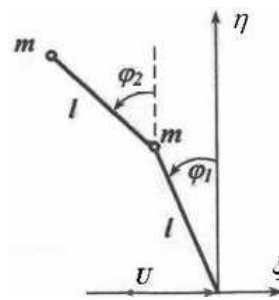


Рис. 1

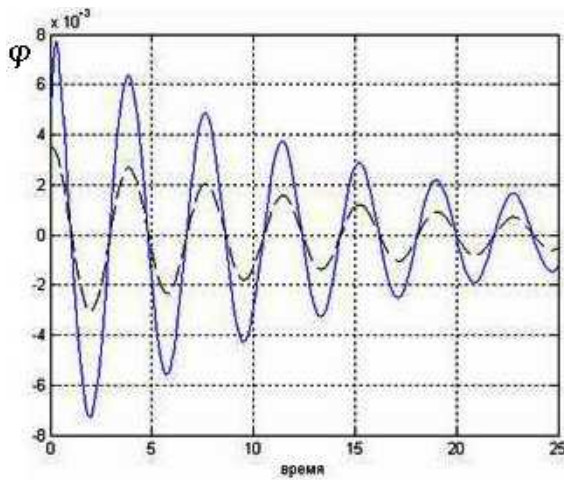


Рис. 2

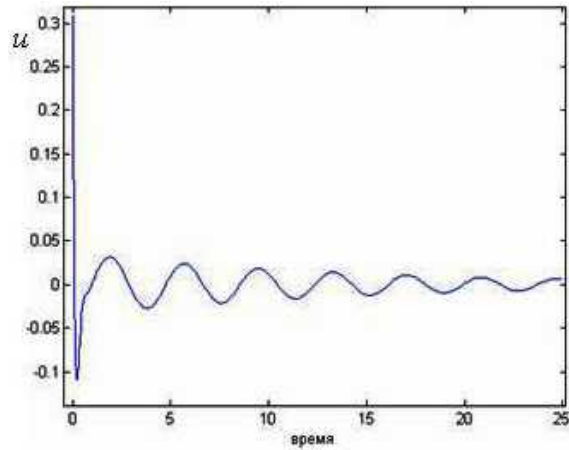


Рис. 3

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (1)$$

где

$$x = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix}, \quad u = \frac{\ddot{U}}{l}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для системы (1) решим следующую задачу управления.

2. Постановка и решение задачи стабилизации по состоянию

Пусть доступно измерению $x \in R^n$ – состояние системы (1), а значит, все четыре величины: углы отклонения звеньев маятника от вертикали φ_1, φ_2 и скорости отклонения звеньев $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2$. Требуется построить управление из класса обратных связей по состоянию вида

$$u = \Theta x, \quad (2)$$

где $u \in R^m$ – управление, Θ – матрица параметров регулятора соответствующего порядка, при котором состояние $x = 0$ замкнутой системы (1), (2) является асимптотически устойчивым по Ляпунову.

Известно, что при выборе управления в виде

$$u = a_1 \varphi_1 + b_1 \dot{\varphi}_1 + a_2 \varphi_2 + b_2 \dot{\varphi}_2 \quad (3)$$

для стабилизации двухзвенного маятника (1) по состоянию необходимо, чтобы все четыре корня характеристического уравнения

$$\lambda^4 - b_1 \lambda^3 - (4 + a_1) \lambda^2 + 2(b_1 + b_2) \lambda + 2(1 + a_1 + a_2) = 0$$

имели отрицательные действительные части.

Известен [2] также критерий Рауса–Гурвица: для того, чтобы корни полинома

$$c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_n = 0$$

имели отрицательные действительные части, нужно, чтобы $c_0 > 0$ и для матрицы

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_3 & c_5 & \dots & \dots \\ c_0 & c_2 & c_4 & \dots & \dots \\ 0 & c_1 & c_3 & c_5 & \dots \\ 0 & c_0 & c_2 & c_4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

все ее главные миноры были положительными ($\Delta_i > 0$).

В нашем случае эти условия будут иметь вид:

$$c_1 > 0, \quad c_1 c_2 - c_0 c_3 > 0, \\ c_3 (c_1 c_2 - c_0 c_3) - c_4 c_1^2 > 0, \quad c_4 > 0, \quad (4)$$

где

$$c_0 = 1, \quad c_1 = -b_1, \quad c_2 = -(4 + a_1), \\ c_3 = 2(b_1 + b_2), \quad c_4 = 2(1 + a_1 + a_2).$$

Таким образом, получаем систему из 4 уравнений. Значения a_1, b_1, a_2, b_2 , удовлетворяющие системе (4), позволяют построить управление (3), стабилизирующее двухзвенный перевернутый маятник по состоянию.

Нетрудно видеть, что одним из возможных управлений является управление вида

$$u = -113\varphi_1 - 13\dot{\varphi}_1 + 256\varphi_2 + 38\dot{\varphi}_2. \quad (5)$$

На рис. 2 приведены графики углов отклонения φ_1 и φ_2 1-го (непрерывная линия) и 2-го (пунктир) звеньев двухзвенного маятника (в радианах). Начальное отклонение звеньев маятника в радианах $\varphi_1 = 0.0052, \varphi_2 = 0.0035$. На рисунке 3 приведен полученный график управления (5).

На рис. 4 представлена блок-схема взаимодействия объекта, системы измерения и системы управления объектом. Измеренные значения $\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2$ поступают на систему управления, которая генерирует управление u по закону (3) и подает его на объект.

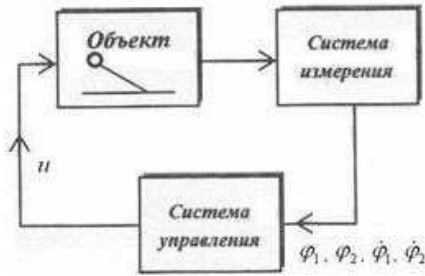


Рис. 4

В задаче были доступны измерению оба угла отклонения звеньев маятника от вертикали φ_1, φ_2 и обе скорости отклонения $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2$. Как быть в ситуации, когда мы не можем измерить все 4 величины? Можно ли, зная только φ_1 , стабилизировать двузвенный маятник?

3. Постановка и решение задачи стабилизации по выходу

Рассмотрим управляемый объект

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx, \end{aligned} \quad (6)$$

где $x \in R^n$ – состояние системы, $u \in R^m$ – управление, $y \in R^l$ – измеряемый выход системы.

Требуется построить динамический регулятор k -го порядка вида

$$\begin{cases} \dot{x}_r = A_r x_r + B_r y, \\ u = C_r x_r + D_r y, \end{cases} \quad (7)$$

где $x_r \in R^k$ – состояние регулятора ($k \leq n$), $x_r(0) = 0$, обеспечивающего асимптотическую устойчивость замкнутой системы (6), (7).

Представим уравнение замкнутой системы (6), (7) при $k \neq 0$ в виде

$$\dot{x}_c = A_c x_c, \quad A_c = \begin{pmatrix} A + BD_r C & BC_r \\ B_r C & A_r \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где $x_c = \begin{pmatrix} x \\ x_r \end{pmatrix}$.

Тогда условие разрешимости поставленной задачи сводится к существованию квадратичной функции Ляпунова $V(x) = x^T(t)Xx(t)$ с матрицей $X = X^T > 0$, такой, что по любой траектории системы выполнено неравенство $\dot{V}(x) < 0$. Это условие эквивалентно следующему матричному неравенству:

$$A_c^T X + X A_c < 0. \quad (9)$$

Введя параметры регулятора

$$\theta = \begin{pmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{pmatrix}, \quad (10)$$

представим матрицу замкнутой системы (8) в виде

$$A_\tau = A_0 + B_0 \theta C_0,$$

где

$$A_0 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} 0 & B \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad C_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ C & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь символ « I » обозначает единичную матрицу размера $(k \times k)$.

Тогда неравенство (9) можно переписать в виде матричного неравенства

$$A_0^T X + X A_0 + C_0^T \theta^T B_0^T X + X B_0 \theta C_0 < 0. \quad (11)$$

В этом неравенстве матрицы θ и X неизвестны, поэтому оно не является линейным относительно совокупности переменных θ и X . В настоящее время не существует алгоритмов решения таких матричных неравенств. Но в то же время известны алгоритмы для численного решения линейных матричных неравенств (например, с помощью пакета для инженерных расчетов MatLab). Если мы зафиксируем θ , то получим линейное матричное неравенство относительно X . Аналогично, фиксируя X , получим линейное матричное неравенство относительно неизвестных параметров регулятора θ .

Известно, что линейное матричное неравенство

$$\psi + P^T Q^T + Q^T \theta P < 0,$$

где ψ, P, Q – заданные матрицы, причем ψ – симметричная матрица размера $(n \times n)$, P и Q – прямоугольные матрицы порядков $(l \times n)$ и $(k \times n)$ соответственно, θ – неизвестная прямоугольная матрица размера $(k \times l)$, разрешимо тогда и только тогда, когда

$$W_P^T \psi W_P < 0, \quad W_Q^T \psi W_Q < 0,$$

где столбцы матриц W_P и W_Q образуют базисы ядер матриц P и Q соответственно, т.е. $PW_P = 0$ и $QW_Q = 0$.

Тогда, обозначив

$$\psi = A_0^T X + X A_0, \quad P = C_0 \quad \text{и} \quad Q = B_0^T X,$$

получим, что разрешимость матричного неравенства (11) сводится к разрешимости системы линейных матричных неравенств относительно матриц $X = X^T > 0$ и $Y = Y^T > 0$

$$\begin{cases} L_1(X, Y) = W_{C_0}^T (A_0^T X + X A_0) W_{C_0} < 0, \\ L_2(X, Y) = W_{B_0^T}^T (Y A_0^T + A_0 Y) W_{B_0^T} < 0, \end{cases} \quad (12)$$

в которых $Y = X^{-1}$ (т.е. таких, что $XY = I$), а

столбцы матриц W_{C_0} и $W_{B_0^T}$ образуют базисы ядер матриц C_0 и B_0^T соответственно.

Если условия (12) выполнены и такие матрицы найдены, то параметры θ искомого регулятора (10) находятся как решения линейного матричного неравенства (11) относительно переменной θ .

Неравенства $L_1(X, Y)$ и $L_2(X, Y)$ являются линейными матричными неравенствами относительно матриц X и Y соответственно. Но есть еще одно условие на матрицы, а именно, $Y = X^{-1}$, которое не является линейным и, соответственно, не позволяет легко решать эту задачу специальными программными средствами. Обозначим эту задачу поиска взаимно-обратных матриц X и Y , удовлетворяющих условию (12), как **Задача 1**.

Для ее решения сначала рассмотрим другую задачу.

Задача 2: найти

$$\lambda_{\min} = \min \left\{ \lambda : X - Y^{-1} \leq \lambda I, X = X^T > 0, \right. \\ \left. Y = Y^T > 0, L_i(X, Y) < 0, i = 1, 2, L_3(X, Y) \leq 0 \right\}$$

$$\text{где } L_3(X, Y) = \begin{pmatrix} -X & I \\ I & -Y \end{pmatrix}.$$

Дополнительное линейное матричное неравенство $L_3(X, Y) \leq 0$ в силу леммы Шура эквивалентно неравенствам $X \geq 0$ и $X \geq Y^{-1}$. Поэтому в случае, когда в **Задаче 2** $\lambda_{\min} = 0$, соответствующие матрицы $X > 0$ и $Y \geq 0$ являются также решением **Задачи 1**.

Для решения **Задачи 2** требуется минимизировать линейную функцию при ограничениях, одно из которых

$$X - Y^{-1} \leq \lambda I \quad (13)$$

не является выпуклым и, следовательно, не может быть представлено в виде линейного матричного неравенства. Это обстоятельство вновь не позволяет решать **Задачу 2** методами выпуклой оптимизации.

В связи с этим рассмотрим еще одну вспомогательную задачу.

Задача 3: найти

$$\lambda_{\min} = \min \left\{ \lambda : F(X, Y, G_1, G_2) \leq \lambda I, X = X^T > 0, \right. \\ \left. Y = Y^T > 0, L_i(X, Y) < 0, i = 1, 2, L_3(X, Y) \leq 0 \right\}$$

где

$$F(X, Y, G_1, G_2) =$$

$$= X + Y + 2G_1 + 2G_2 + G_1 Y G_1 + G_2 X G_2,$$

$G_i = G_i^T, i = 1, 2$, – некоторые заданные матрицы.

В **Задаче 3** по сравнению с **Задачей 2** вместо неравенства (13) стоит линейное матричное неравенство $F(X, Y, G_1, G_2) \leq \lambda I$. Представим функцию $F(X, Y, G_1, G_2)$ в виде

$$F(X, Y, G_1, G_2) = (G_1 + Y^{-1})Y(G_1 + Y^{-1}) + \\ + (G_2 + X^{-1})X(G_2 + X^{-1}) + (X - Y^{-1}) + (Y - X^{-1}).$$

Нетрудно видеть, что в силу неравенства $X \geq Y^{-1}$ функция $F(X, Y, G_1, G_2) \geq 0$, и когда матрицы $G_1 = -Y^{-1}, G_2 = -X^{-1}$ и величина $\lambda_{\min} = 0$, то соответствующие решения X и Y **Задачи 3** являются и решением **Задачи 2**.

Тогда алгоритм поиска взаимно-обратных матриц можно представить следующим образом:

Алгоритм

Шаг 1) полагаем $j = 0$.

Шаг 2) фиксируем матрицы $G_1 = G_1^{(j)}$ и $G_2 = G_2^{(j)}$.

Шаг 3) решаем **Задачу 3**, например, с помощью команды `mincx` пакета `MatLab` и находим λ_{j+1}, X_j, Y_j .

Шаг 4) задаем $G_1^{(j+1)} = -Y_j^{-1}$ и $G_2^{(j+1)} = -X_j^{-1}$.

Шаг 5) если разность между двумя итерациями $|\lambda_j - \lambda_{j-1}| < \epsilon$, где ϵ – некоторое заданное значение, то взаимно-обратные матрицы $X = X^T > 0$ и $Y = Y^T > 0$ найдены и **Алгоритм** останавливается. Иначе полагаем $j = j + 1$ и переходим на **Шаг 2**.

Сходимость алгоритма доказана ниже в **Утверждении 1**.

В случае поиска регулятора полного порядка, т.е. при $n = k$, поиск стабилизирующего регулятора может быть осуществлен следующим образом [3].

Матрицы X и Y , входящие в линейные матричные неравенства (12), имеют размерность $2n$, где n – размерность матрицы A . Очевидно, что чем выше размерность матриц, тем больше времени необходимо для поиска решения, тем больше будет погрешность вычислений. Поэтому прежде чем решать эти неравенства, проанализируем их. В соответствии с блочной структурой матрицы A_0 представим матрицы X и Y в блочном виде

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^T & X_{22} \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{12}^T & Y_{22} \end{pmatrix}, \quad (14)$$

а матрицы $W_{B_0^T} = \begin{pmatrix} W_{B^T} \\ 0 \end{pmatrix}, W_{C_0} = \begin{pmatrix} W_C \\ 0 \end{pmatrix}$.

Тогда неравенства (12) примут вид

$$W_{B^T}^T (Y_{11} A^T + A Y_{11}) W_{B^T} < 0,$$

$$W_C^T (A^T X_{11} + X_{11} A) W_C < 0. \quad (15)$$

Здесь матрицы X_{11} и Y_{11} размера $(n \times n)$ не являются взаимно-обратными, но являются блоками взаимно-обратных матриц. Известна форма Фробениуса для обращения блочной матрицы. Из нее следует, что при выполнении неравенства $Y_{11} - X_{11}^{-1} = V > 0$, которое по лемме Шура эквивалентно условию

$$\begin{pmatrix} X_{11} & 1 \\ 1 & Y_{11} \end{pmatrix} > 0, \quad (16)$$

выбор соответствующих Y_{12} и Y_{22} может быть осуществлен следующим образом: $Y_{12} = Y_{22} = V$.

Таким образом, в случае $n = k$ для поиска закона управления вида (7), который обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы (6), (7), необходимо:

Таблица 1

Динамический регулятор	Полюса замкнутой системы
$\theta = \begin{pmatrix} -82.9655 & 287.3701 & -146.5238 & -253.0056 \\ -32.2399 & 119.1331 & -61.8659 & -107.2983 \\ -19.9244 & 78.0305 & -41.6514 & -71.1643 \\ -84.6103 & 287.6369 & -146.3035 & -252.0946 \end{pmatrix}$	<p>- 1.6028 ± 0.0622i</p> <p>- 0.6969 ± 4.2621i</p> <p>- 0.2815 ± 0.7283i</p> <p>- 0.3216</p>

Таблица 2

Динамический регулятор	Полюса замкнутой системы
$\theta = 10^3 \begin{pmatrix} 0.0023 & -0.0046 & -0.0068 & 1.1617 & 0.7272 \\ 0.0033 & -0.0035 & -0.0072 & 1.0172 & -0.7390 \\ -0.0005 & 0.0004 & -0.0001 & -0.2002 & 0.3886 \\ -0.0001 & 0.0002 & 0.0000 & -0.0046 & 0.3760 \\ -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0010 & -0.0021 \end{pmatrix}$	<p>- 0.7954 ± 2.3425i</p> <p>- 0.5554 ± 1.9215i</p> <p>- 1.5804</p> <p>- 1.1193</p> <p>- 0.2878</p> <p>- 0.2397</p>

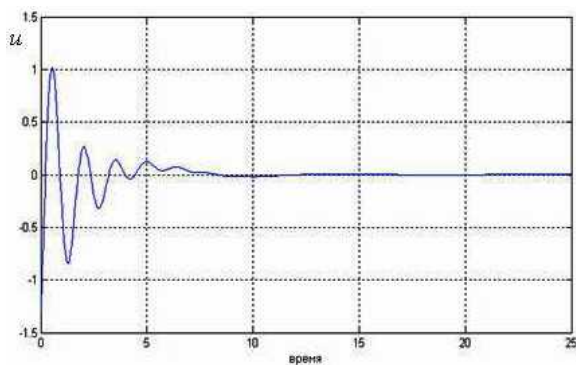


Рис. 5

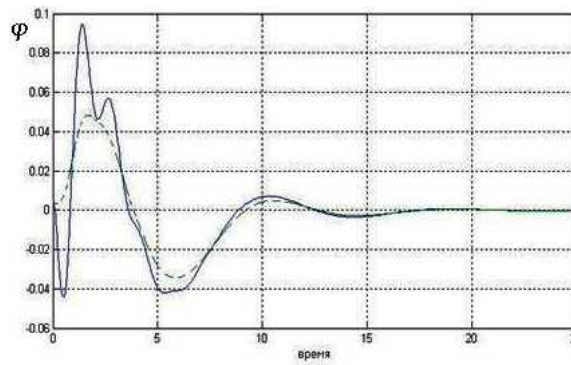


Рис. 6

1. Решить систему линейных матричных неравенств (15), (16) относительно матриц $X_{11} = X_{11}^T > 0$ и $Y_{11} = Y_{11}^T > 0$ при заданном начальном состоянии x_0 .

2. Восстановить матрицу

$$Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{11} - X_{11}^{-1} \\ Y_{11} - X_{11}^{-1} & Y_{11} - X_{11}^{-1} \end{pmatrix}$$

3. Подставить эту матрицу в неравенство (11) и, решив линейное матричное неравенство относительно неизвестной матрицы θ , найти параметры регулятора (10).

4. Результаты численного эксперимента

Как было получено выше, математическая модель двузвенного маятника имеет вид (1), т.е. объект описывается уравнением

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

Пусть мы можем измерять только угол отклонения φ_1 нижнего звена маятника от вертикали. Тогда измеряемый выход системы (6) имеет вид:

$$y = x_1.$$

Требуется синтезировать динамический регулятор третьего порядка.

Численное решение в MatLab заняло 9 итераций. Начальное отклонение звеньев маятника в радианах $\varphi_1 = 0.0052$, $\varphi_2 = 0.0035$. В таблице 1 приведен полученный при этом динамический регулятор (10) и полюса замкнутой системы (8), определяющие качество переходного процесса.

На рис. 5 приведен полученный график управления (7). Рисунок 6 представляет собой графики углов отклонения φ_1 и φ_2 1-го (непрерывная линия) и 2-го (пунктир) звеньев двузвенного маятника (в радианах).

При поиске при тех же начальных условиях регулятора полного порядка (случай $n = k$) получен следующий динамический регулятор (10) и полюса замкнутой системы (8), определяющие качество переходного процесса (табл. 2).

На рисунке 7 приведен полученный график управления (7). Рисунок 8 представляет собой графики углов отклонения φ_1 и φ_2 1-го (непрерывная линия) и 2-го (пунктир) звеньев двузвенного маятника (в радианах).

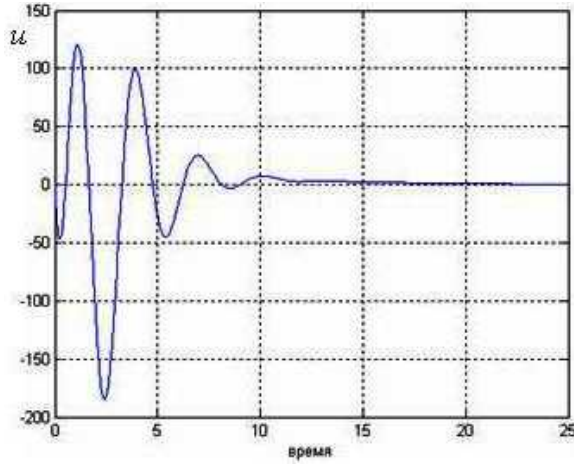


Рис. 7

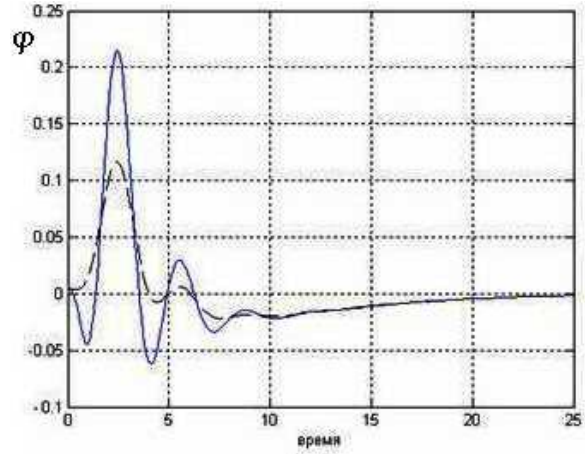


Рис. 8

5. Заключение

В работе решена задача стабилизации двухзвенного перевернутого маятника при наличии возможности измерения только угла отклонения нижнего звена. В процессе решения был предложен алгоритм решения **Задачи 1**.

Предложенный подход к синтезу закона управления обеспечивает стабилизацию механических систем, функционирующих в условиях неопределенности, и позволяет моделировать управление, например, в электрических схемах, без точного вычисления силы тока или в механических системах без точного вычисления скоростей. При построении управления по состоянию вида (3) необходимо знать $\dot{\phi}_1$ и $\dot{\phi}_2$. Датчики снимают показания в некоторые дискретные моменты времени, а численное нахождение производной несет в себе ошибки вычисления. Отсутствие же необходимости вычислять производную позволяет улучшить качество управления и дает систему управления без ошибок, порожденных ее неточным вычислением.

Утверждение 1. Для любых начальных матриц $G_1^{(0)}$ и $G_2^{(0)}$ числовая последовательность λ_j , генерируемая алгоритмом, является невозрастающей, и существуют следующие пределы:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j = \lambda_*, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} X_j = X_*, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} Y_j = Y_*.$$

Доказательство. Рассмотрим изменение спектрального радиуса матрицы $F(X, Y, G_1, G_2)$ по траектории алгоритма. Обозначим $\rho_j = \rho(F(X_j, Y_j, G_1^{(j)}, G_2^{(j)}))$.

Представим

$$\Delta \rho = \rho_{j+1} - \rho_j = \rho(F(X_{j+1}, Y_{j+1}, G_1^{(j+1)}, G_2^{(j+1)})) - \rho(F(X_j, Y_j, G_1^{(j)}, G_2^{(j)}))$$

в виде

$$\begin{aligned} \Delta \rho = \Delta \rho_1 + \Delta \rho_2 = & [\rho(F(X_{j+1}, Y_{j+1}, G_1^{(j+1)}, G_2^{(j+1)})) - \\ & - \rho(F(X_j, Y_j, G_1^{(j+1)}, G_2^{(j+1)}))] + \\ & + [\rho(F(X_j, Y_j, G_1^{(j+1)}, G_2^{(j+1)})) - \\ & - \rho(F(X_j, Y_j, G_1^{(j)}, G_2^{(j)}))]. \end{aligned}$$

Поскольку на $(j+1)$ -й итерации λ принимает минимальное значение при $X = X_{j+1}$, $Y = Y_{j+1}$, то выражение в первых квадратных скобках неположительно в силу алгоритма.

Рассмотрим разность двух матриц, фигурирующих во вторых квадратных скобках. Используем то, что $G_1^{(j)} = -Y_{j-1}^{-1}$, $G_1^{(j+1)} = -Y_j^{-1}$, $G_2^{(j)} = -X_{j-1}^{-1}$, $G_2^{(j+1)} = -X_j^{-1}$. Сделаем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} F(X_j, Y_j, G_1^{(j+1)}, G_2^{(j+1)}) - F(X_j, Y_j, G_1^{(j)}, G_2^{(j)}) = \\ = -Y_j^{-1} + 2Y_{j-1}^{-1} - Y_{j-1}^{-1} Y_j Y_{j-1}^{-1} - X_j^{-1} + 2X_{j-1}^{-1} - \\ - X_{j-1}^{-1} X_j X_{j-1}^{-1} = -(Y_j^{-1} - Y_{j-1}^{-1}) Y_j (Y_j^{-1} - Y_{j-1}^{-1}) - \\ - (X_j^{-1} - X_{j-1}^{-1}) X_j (X_j^{-1} - X_{j-1}^{-1}) \leq 0. \end{aligned}$$

Поскольку из неравенства $A - B \leq 0$ следует, что $\rho(A) \leq \rho(B)$, получаем, что $\Delta \rho \leq 0$, т.е. что последовательность ρ_j является невозрастающей.

Из неравенства $L_2(X, Y) \leq 0$ следует, что $X \geq Y^{-1}$, следовательно, функция $F(X, Y, G_1, G_2) \geq 0$ и, следовательно, $\rho_j \geq 0$.

Последовательность ρ_j является невозрастающей и ограниченной снизу, следовательно, она сходится, откуда в силу непрерывности функции спектрального радиуса и следует существование указанных в теореме пределов.

Из **Утверждения 1** следует, что при остановке алгоритма возможны две ситуации. В случае, когда $\lambda_* = 0$, $X_* Y_* = I$ и матрицы X_* , Y_* являются решениями **Задачи 1**. Во втором случае, когда $\lambda_* > 0$, нельзя сделать определенного

вывода о разрешимости **Задачи 1**. В этом случае целесообразно повторить алгоритм поиска взаимно-обратных матриц при других начальных условиях $G_1 = G_1^{(0)}$ и $G_2 = G_2^{(0)}$, как это обычно делают в задачах глобальной оптимизации.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 10-01-00514, 11-01-00215 и 11-01-97022 р-поволжье).

Список литературы

1. Неймарк Ю.И. Математические модели в естествознании и технике. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2004. 401 с.
2. Неймарк Ю.И. Динамические системы и управляемые процессы. М.: Наука, 1978. 336 с.
3. Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007. 280 с.

OUTPUT FEEDBACK STABILIZATION OF A TWO-ELEMENT INVERTED PENDULUM

A.A. Fedukov

The output feedback stabilization problem for a dynamic object is considered. It is shown that the solution of the problem in the case of a reduced-order controller is reduced to the search of two mutually inverse matrices satisfying matrix inequalities. A search algorithm for these matrices is proposed and its convergence conditions are shown. A model for a two-element inverted pendulum has been constructed and its output feedback stabilization problems for full and reduced order controllers have been solved.

Keywords: stabilization, control, linear matrix inequalities.