Линейно-квадратичное гауссовское управление

В теории управления, линейно-квадратичные гсауссовские (LQG) задачи управления являются одними из наиболее фундаментальных проблемами оптимального управления. Они относятся к неопределенностям линейных систем, которые вызваны добавкой белого гауссовского шума, владеют неполной информацией о состоянии (т.е. не все переменные состояния измеряются) и необходимо управление в зависимости от квадратичных затрат . Кроме того, решение является уникальным и представляет собой линейный динамический закон управления с обратной связью, который легко вычисляется и реализуется. Наконец LQG регулятор также имеет фундаментальное значение для оптимального управления возмущений нелинейных систем.

LQG-регулятор является сочетанием фильтра Калмана, т.е. линейно-квадратичной оценки (LQE), и линейно-квадратического регулятора (LQR). Разделение принципов гарантирует, что они могут быть разработаны и вычислятся отдельно. LQG управления относится как к линейным стационарным системам , так и к линейным нестационарным системам. Применение к линейным стационарным системам хорошо известны. Применение к линейным нестационарных систем позволяет проектировать линейные регуляторы с обратной связью для нелинейных неопределенных систем.

Сам LQG-регулятор представляет собой динамическую систему, которая управляет всей системой. Обе системы имеют одинаковую размерность. Поэтому осуществление LQG регулятора может быть проблематичным, если переменные состояния системы имеют большую размерность. Понижения порядка системы преодолевает эту проблему путем фиксации априорной числа состояний LQG регулятора. Эту проблему более трудно решить, поскольку она неотъемлемая часть. Кроме того, решение не является уникальным. Несмотря на эти факты численные алгоритмы доступны для решения соответствующих уравнений оптимальной проекции, которые составляют необходимые и достаточные условия для локально-оптимальные пониженного порядка LQG регулятора.

LQG управление не обеспечивает хорошие свойства надежности. Робастные свойства устойчивости замкнутой системы должны быть проверены отдельно после того, как LQG регулятор был разработан. Связанные сложные задачи управления приводит к оптимальному регулятору, для которого лишь параметры разные.

Математическое описание проблемы и решение

Рассмотрим линейные динамические системы

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)\\ \mathbf{y}(t) &= C(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{w}(t),\end{aligned}$$

где $\mathbf{x}$ представляет вектор переменных состояния системы, $\mathbf{u}$ вектор управляющих входов и $\mathbf{y}$ вектор измеренных выходов для обратной связи. Вектора аддитивного белого гауссова шума системы $\mathbf{v}(t)$ и аддитивного белого гауссова шума измерений $\mathbf{w}(t)$ влияет на работу системы. С учетом этого цель системы заключается в том, чтобы найти управляющий вход $\mathbf{u}(t)$ который в каждый момент времени *t* может зависеть только от предыдущих измерений $\mathbf{y}(t'), 0 \leq t' < t$ такой, что функции затрат сведено к минимуму:

$$J = E\left(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}(T)F\mathbf{x}(T) + \int_0^T \mathbf{x}^{\mathrm{T}}(t)Q(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^{\mathrm{T}}(t)R(t)\mathbf{u}(t)\,dt\right),$$
$$F \geq 0, \quad Q(t) \geq 0, \quad R(t) > 0,$$

где E обозначает ожидаемое значение . Время T может быть конечным или бесконечным. Если время стремится к бесконечности первый член $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}(T)F\mathbf{x}(T)$ функции стоимости становится незначительным и не имеет отношения к проблеме. Также сохранить расходы конечной стоимости функция должна быть принята J/T.

LQG регулятор, который решает задачи управления LQG задается следующими уравнениями

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = A(t)\hat{\mathbf{x}}(t) + B(t)\mathbf{u}(t) + K(t)\left(\mathbf{y}(t) - C(t)\hat{\mathbf{x}}(t)\right), \hat{\mathbf{x}}(0) = E\left(\mathbf{x}(0)\right)$$
$$\mathbf{u}(t) = -L(t)\hat{\mathbf{x}}(t).$$

Матрица $K(t)$ называется фильтром Калмана. В каждый момент времени t этот фильтр генерирует оценки $\hat{\mathbf{x}}(t)$ переменных $\mathbf{x}(t)$, используя предыдущие входные и измеренные значения . Усиления Калмана $K(t)$ вычисляется из матриц $A(t), C(t)$, двух матриц интенсивности $V(t), W(t)$, связанных с белым гауссовым шумом $\mathbf{v}(t)$ и $\mathbf{w}(t)$, и $E\left(\mathbf{x}(0)\mathbf{x}^{\mathrm{T}}(0)\right)$. Эти пять матриц определяют фильтр Калмана через уравнение Риккати:

$$\dot{P}(t) = A(t)P(t) + P(t)A^{\mathrm{T}}(t) - P(t)C^{\mathrm{T}}(t)W^{-1}(t)C(t)P(t) + V(t),$$
$$P(0) = E\left(\mathbf{x}(0)\mathbf{x}^{\mathrm{T}}(0)\right).$$

Учитывая решение $P(t), 0 \le t \le T$ значение фильтра Калмана равно

$$K(t) = P(t)C^{\mathrm{T}}(t)W^{-1}(t)$$

Матрица $L(t)$ называется матрицей коэффициента усиления обратной связи. Эта матрица определяется матрицами $A(t), B(t), Q(t), R(t)$ и F через уравнение Риккати:

$$-\dot{S}(t) = A^{\mathrm{T}}(t)S(t) + S(t)A(t) - S(t)B(t)R^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)S(t) + Q(t),$$
$$S(T) = F.$$

Учитывая решение $S(t), 0 \le t \le T$, коэффициент обратной связи равен:

$$L(t) = R^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)S(t).$$

Обратите внимание на сходство двух матричных дифференциальных уравнений Риккати, первое забегает вперед во времени, второе работает в обратном времени. Это сходство называется двойственностью. Первая матрица Риккати решает линейно-квадратичную задачу оценивания (LQE). Вторая матрица Риккати решает задачу линейно-квадратического регулирования (LQR). Эти проблемы двойственные и вместе они решают линейно-квадратичную задачу управления (LQG).

Когда $A(t), B(t), C(t), Q(t), R(t)$ и матрицы интенсивности шума $V(t), W(t)$ не зависят от t и когда T стремится к бесконечности, LQG-регулятор становится стационарной динамической системой. В этом случае оба матричных уравнений Риккати могут быть заменены двумя соответствующими алгебраическими уравнениями Риккати .

Дискретное время

Так как в дискретном времени задача LQG управления похожа на задачу в непрерывном времени приведенное ниже описание фокусируется на математических уравнениях.

Дискретным временем системы линейных уравнений:

$$\mathbf{x}_{i+1} = A_i\mathbf{x}_i + B_i\mathbf{u}_i + \mathbf{v}_i$$
$$\mathbf{y}_i = C_i\mathbf{x}_i + \mathbf{w}_i$$

здесь ***i*** представляет дискретный индекс времени и $\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i$ представляют дискретные моменты времени гауссовских процессов - белый шум с ковариационными матрицами V_i, W_i соответственно.

Квадратичной функционал будет сведен к минимуму:

$$J = E\left(\mathbf{x}_N^{\mathrm{T}}F\mathbf{x}_N + \sum_{i=0}^{N-1}\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}Q_i\mathbf{x}_i + \mathbf{u}_i^{\mathrm{T}}R_i\mathbf{u}_i\right),$$
$$F \geq 0, Q_i \geq 0, R_i > 0.$$

Дискретное время LQG регулятора:

$$\hat{\mathbf{x}}_{i+1} = A_i\hat{\mathbf{x}}_i + B_i\mathbf{u}_i + K_i\left(\mathbf{y}_i - C_i\hat{\mathbf{x}}_i\right), \hat{\mathbf{x}}_0 = E(\mathbf{x}_0),$$
$$\mathbf{u}_i = -L_i\hat{\mathbf{x}}_i.$$

Фильтр Калмана равен:

$$K_i = P_iC_i^{\mathrm{T}}(C_iP_iC_i^{\mathrm{T}} + W_i)^{-1},$$

где P_i определяется следующим разностным уравнением Риккати:

$$P_{i+1} = A_i\left(P_i - P_iC_i^{\mathrm{T}}\left(C_iP_iC_i^{\mathrm{T}} + W_i\right)^{-1}C_iP_i\right)A_i^{\mathrm{T}} + V_i, P_0 = E\left(\mathbf{x}_0\mathbf{x}_0^{\mathrm{T}}\right).$$

Матрица усиления обратной связи равна

$$L_i = (B_i^{\mathrm{T}}S_{i+1}B_i + R_i)^{-1}B_i^{\mathrm{T}}S_{i+1}A_i.$$

где S_i определяется следующим разностным уравнением Риккати:

$$S_i = A_i^{\mathrm{T}}\left(S_{i+1} - S_{i+1}B_i\left(B_i^{\mathrm{T}}S_{i+1}B_i + R_i\right)^{-1}B_i^{\mathrm{T}}S_{i+1}\right)A_i + Q_i, S_N = F.$$

Если все матрицы поставленной задачи являются стационарными и если количество интервалов ***N*** стремится к бесконечности дискретного времени, LQG-регулятор становится стационарным. В этом случае матричные разностные уравнения Риккати можгут быть заменене связанными с ними дискретным временем алгебраическими уравнениями Риккати .