

Метод измерения частоты сигнала на основе системы остаточных классов

(ООО НВФ «Криптон»)

Введение

При анализе сигналов со скачкообразным изменением частоты, а также импульсных сигналов, формируемых несколькими источниками с неизвестными частотами, требуется измерять частоту относительно кратковременных узкополосных сигналов в широком диапазоне частот.

Обычно, при элементе разрешения по частоте Δf и полосе анализа $n\Delta f$ приходится использовать n одновременно работающих каналов обнаружения, что обуславливает высокую сложность и стоимость аппаратуры. Любые методы последовательного анализа, уменьшающие число каналов измерения, в данной постановке задачи неприемлемы, так как значительно снижают вероятность обнаружения сигнала.

Предлагается метод измерения частоты, основанный на системе остаточных классов, позволяющий для n , представленного произведением ряда сомножителей, уменьшить число каналов обнаружения до значения суммы этих сомножителей.

Метод

В системе остаточных классов (СОК) числа представляются остатками от деления на взаимно простые числа n_1, n_2, \dots, n_r (основания СОК). Диапазон представимых чисел равен произведению оснований $n = n_1 n_2 \dots n_r$ [1, 2].

СОК-представление $\{a_i\}$ числа A определяется как

$$a_i = A - \left\lfloor \frac{A}{n_i} \right\rfloor \cdot n_i, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (1)$$

При этом ряд арифметических операций над A заменяется эквивалентными операциями над $\{a_i\}$. Обычно наиболее важным свойством СОК считают независимость операций с остатками для каждого значения i (отсутствие переносов), что позволяет достичь высокого быстродействия за счет распараллеливания вычислений.

Однако, это не единственное положительное свойство СОК. Для измерительных систем решающим фактором может стать то, что измеряемая величина с большим диапазоном значений порядка n может быть однозначно представлена рядом величин с существенно малыми значениями порядка n_i .

Рассмотрим преобразование сигнала, которое эквивалентно вычислению остатка в частотной области. Пусть сигнал $x(t)$ представляет собой комплексное гармоническое колебание с амплитудой U . Тогда при дискретизации $x(t)$ с периодом T_s будет сформирован сигнал $x_s(t)$:

$$x_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U e^{j2\pi k T_s} \delta(t - k T_s), \quad (2)$$

для которого Фурье-образ представляет периодическую последовательность:

$$X_s(f) = \frac{U}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - k f_s). \quad (3)$$

При любом значении f всегда будет существовать составляющая (часто называемая «отражением») в диапазоне частот $[0, f_s)$ с частотой f_a , определяемой как

$$f_a = f - \left\lfloor \frac{f}{f_s} \right\rfloor f_s. \quad (4)$$

Нетрудно видеть, что частота «отражения» является остатком от деления частоты исходного сигнала на частоту дискретизации. На рисунке 1 показан вид сигналов $x(t)$ и $x_s(t)$ в частотной области.

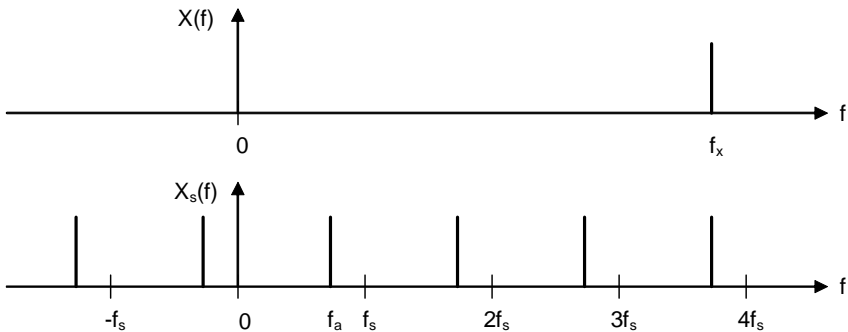


Рисунок 1 – Вид сигнала до и после дискретизации

Заметим, что дискретизация производится с нарушением теоремы отсчетов (без антиалиазального фильтра), что, собственно, и является условием получения f_a как остатка от деления f на f_s .

Таким образом, для того, чтобы представить значение частоты f комплексного сигнала $x(t)$ в диапазоне значений $n\Delta f$ с разрешением Δf требуется выполнить дискретизацию r раз с частотами $n_i\Delta f$, затем в диапазоне частот $[0, f_s)$ вычислить модули коэффициентов Фурье и определить номера максимальных модулей в каждом канале. Номера позиций дают СОК-представление $\{a_i\}$ значения частоты f сигнала $x(t)$.

Ниже приведен простейший пример соответствия частоты f и СОК-представления $\{a_i\}$ для $\Delta f=1$, $n_1=3$, $n_2=5$.

f	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
a_1	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
a_2	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4

Применение БПФ для вычисления модулей коэффициентов Фурье неэффективно из-за относительно малых и некратных степени 2 значений n_i . Отсчеты модуля $Z_i(k)$ удобно вычисляются через ДПФ, причем, для достижения компромисса между разрешением по частоте и разрешением по времени, интервал анализа устанавливается равным $1/\Delta f$ (число отсчетов для каждого i при этом в точности равно n_i):

$$Z_i(k) = \left\| \sum_{q=0}^{n_i-1} a_i(q) e^{-j(2\pi/n_i)qk} \right\|. \quad (5)$$

Приведенный метод измерения частоты имеет два существенных недостатка:

1. Входной сигнал $x(t)$ должен быть комплексным, что усложняет реализацию метода.

2. Неопределенность, возникающая при более сложном составе сигнала $x(t)$. Например, если сигнал представляет собой сумму M гармонических колебаний, и если их амплитуды разнятся на величину, сравнимую с приведенной ошибкой измерения амплитуд в тракте приема и преобразования сигнала, то в каждом канале дискретизации возникнет M отраженных составляющих и число ложно обнаруженных частот составит $M^r - M$.

Далее будут рассмотрены усовершенствования метода, устраняющие или уменьшающие степень указанных недостатков.

Действительный сигнал

Рассмотрим дискретизацию действительного сигнала $v(t) = U \cos(2\pi f t)$ с периодом T_s :

$$v_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U \cos(2\pi f k T_s) \delta(t - k T_s), \quad (6)$$

для которого «отражение» с частотой f_b определяется в половинном диапазоне частот $[0, f_s/2)$ как

$$f_b = \left| f_v - \left\lfloor \frac{f_v + 0.5 f_s}{f_s} \right\rfloor f_s \right|. \quad (7)$$

На рисунке 2 показан характер отражений для действительного сигнала.

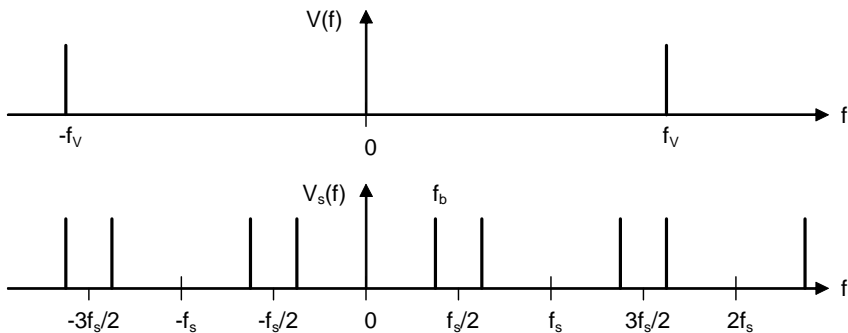


Рисунок 2 – Отражения при дискретизации действительного сигнала

В чистом виде (1) остаток для действительного сигнала не представим, но может быть определен некий аналог остатка b для числа B (назовем «отраженный остаток») как

$$b_i = \left| B - \left\lfloor \frac{B + n_i + 0.5}{2n_i} \right\rfloor \cdot 2n_i \right|, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (8)$$

На рисунке 3 изображен пример графика функции (7) для $n_i = 5$ с отмеченными отсчетными значениями b , соответствующими формуле (8).

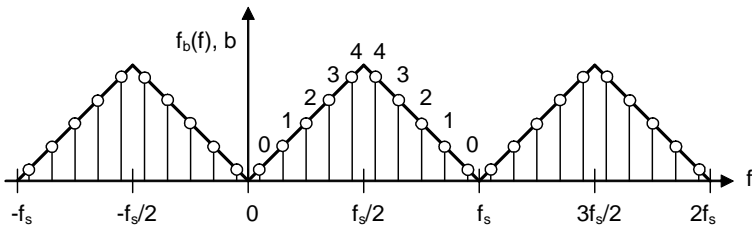


Рисунок 3 – «Отражение» по частоте при дискретизации действительного сигнала и «отраженный остаток»

Чтобы представить значение частоты f действительного сигнала $v(t)$ в диапазоне значений $n\Delta f$ с разрешением Δf требуется выполнить дискретизацию r раз с частотами $2n_i\Delta f$, затем в диапазоне частот $[0, f_s/2)$ вычислить модули коэффициентов Фурье и определить номера максимальных модулей в каждом канале. Номера позиций дают представление $\{b_i\}$ значения частоты f .

Ниже приведено, аналогично предыдущему примеру, соответствие частоты f и представления $\{b_i\}$ для $\Delta f = 1$, $n_1 = 3$, $n_2 = 5$.

f	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
b_1	0	1	2	2	1	0	0	1	2	2	1	0	0	1	2
b_2	0	1	2	3	4	4	3	2	1	0	0	1	2	3	4

Как видим, представление $\{b_i\}$ однозначно, так же, как и представление $\{a_i\}$, изменен лишь порядок следования значений $\{b_i\}$.

Вычисление ДПФ для случая действительного сигнала имеет особенность (см. рисунок 3): отсчеты в частотной области берутся не в точках $(2\pi/n_i)qk$, а в точках, смещенных на $\Delta f/2$:

$$Z_i(k) = \left\| \sum_{q=0}^{n_i-1} a_i(q) e^{-j(\pi/n_i(2qk+1))} \right\|. \quad (9)$$

Каждый «отраженный остаток» b_i принимает значение индекса k , соответствующего максимальному значению $Z_i(k)$.

Для дальнейшей обработки результатов измерений частоты значения $\{b_i\}$ обычно преобразуют в двоичный код. С целью получения максимального быстродействия наиболее эффективно выполнять это преобразование табличным способом.

Неопределенность и области применения

Указанный выше, второй недостаток метода может быть устранен путем увеличения числа приемников и принятием совместного решения по результатам измерений каждым из них. Если приемники будут иметь одинаковые базисы, то выигрыша не будет. Для получения наибольшего выигрыша, то есть, наименьшей вероятности совпадения результатов при различных комбинациях входных частот, требуется, чтобы все основания всех приемников были взаимно простыми. Другими словами, при увеличении r в g раз можно либо в r^g раз увеличить разрешение (уменьшить Δf), либо в g раз увеличить число одновременно принимаемых сигналов с различными частотами.

Рассмотрим иллюстративный пример. Пусть $g = 2$ и $\{n_{i,g}\} = 4, 5; 3, 7$. Входные сигналы v_1 и v_2 имеют частоты $f_1 = 5$ и $f_2 = 9$, соответственно. Ниже приведены значения $b_{i,g}$ и показаны результаты измерений каждого приемника.

Первый приемник дает, помимо правильного результата 5 и 9, ложные частоты 10 и 14, а второй – 8 и 18. Правильное решение определяется по совпадению измерений в обоих приемниках.

f	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
b_{11}	0	1	2	3	3	2	1	0	0	1	2	3	3	2	1	0	0	1	2	3	
b_{12}	0	1	2	3	4	4	3	2	1	0	0	1	2	3	4	4	3	2	1	0	
b_{21}	0	1	2	2	1	0	0	1	2	2	1	0	0	1	2	2	1	0	0	1	2
b_{22}	0	1	2	3	4	5	6	6	5	4	3	2	1	0	0	1	2	3	4	5	6
b_{11}						2				1	2				1						
b_{12}					4					0	0				4						
b_{21}					0			2	2										0		
b_{22}					5			5	4										4		

Вероятность ошибочного принятия решения можно приближенно оценить как отношение числа ложных частот $M^r - M$ к числу возможных значений частот n . Если принять, что распределения ложных частот в каждом из g приемников независимы, то результирующая вероятность p_e ошибочного измерения частоты будет определяться произведением:

$$p_e = \left(\frac{M^r - M}{n} \right)^g. \quad (10)$$

Следует указать на то, что в каждом отдельном канале дискретизации отношение сигнал/шум будет уменьшаться из-за n/n_i -кратного наложения сигналов в частотной области. С другой стороны, возможно, это уменьшение может быть скомпенсировано за счет некогерентности шума и когерентности сигнала, а также за счет совместного принятия решения по данным нескольких каналов. Вопрос требует специального изучения и в данной работе не рассматривается.

Специфика обработки сигналов в приемнике на основе СОК накладывает определенные ограничения на его области применения. Прежде всего, это широкополосные системы измерения частоты быстро перестраиваемых сигналов типа ППРЧ, либо импульсных сигналов от многих источников с различными частотами, но существующих кратковременно.

Пример технической реализации

Исходные данные:

- диапазон частот – 0..3000 МГц;
- разрешение по частоте – 1 МГц;
- разрешение по времени – 1 мкс.

Выбранные параметры:

– два приемника ($g = 2$) с базисами $n_1^1 = 11$, $n_2^1 = 15$, $n_3^1 = 19$ ($n^1 = 3135$) и $n_1^2 = 13$, $n_2^2 = 14$, $n_3^2 = 17$ ($n^2 = 3094$);

– сигнал действительный, частоты дискретизации соответственно для первого приемника $f_1^1 = 22$ МГц, $f_2^1 = 30$ МГц, $f_3^1 = 38$ МГц и для второго $f_1^2 = 26$ МГц, $f_2^2 = 28$ МГц, $f_3^2 = 34$ МГц.

На рисунке 4 приведена структура технического решения для двухканального приемника импульсных сигналов [3].

Приемник содержит антенну, фильтр ФНЧ с частотой среза 3000 МГц, необходимый для предотвращения попадания на вход приемника сигналов с частотами, большими $n\Delta f$, широкополосный малошумящий усилитель МШУ, выход которого поступает на две группы схем выборки/хранения СВХ, выходы которых подключены к входам аналого-цифровых преобразователей АЦП. Два синтезатора тактовых частот СТЧ генерируют требуемые частоты для СВХ и АЦП соответствующих каналов f_1^1, f_2^1, f_3^1 и f_1^2, f_2^2, f_3^2 .

Последовательности выходных кодов АЦП накапливаются и обрабатываются в блоках дискретного преобразования Фурье ДПФ. Коэффициенты Фурье поступают в узлы обнаружителей УО, где преобразуются в набор кодов частоты, из которых в блоке принятия решения ПР формируется решение о частоте одного или двух сигналов.

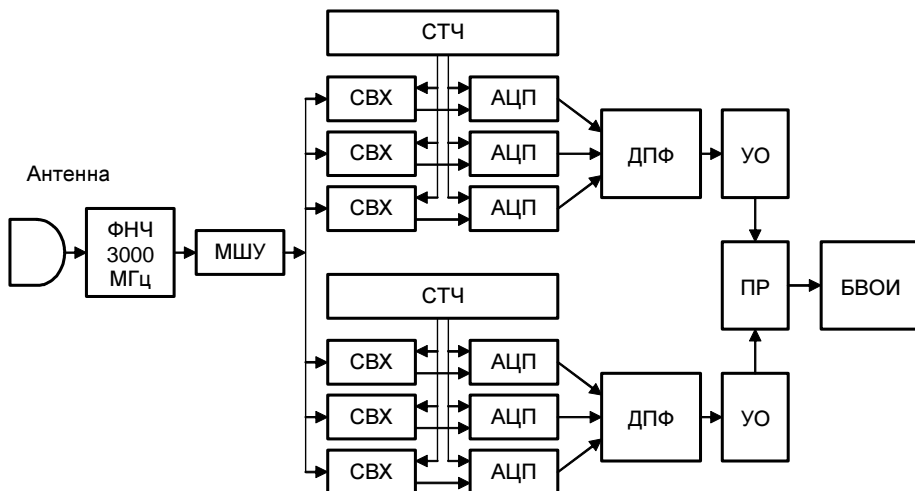


Рисунок 4 – Структура двухканального приемника импульсных сигналов

Выходные коды частот от ПР поступают в блок вторичной обработки и отображения информации БВОИ, где преобразуются в отображаемую координатную, параметрическую и признаковую информацию.

Все узлы в приведенном примере могут быть реализованы на современной элементной базе. Процессор ДПФ, узлы УО, ПР удобно реализовать на ПЛИС, содержащих большое количество умножителей с накопителями. Особые требования предъявляются к схемам выборки/хранения, апертурное время которых не должно превышать величину $1/n\Delta f$. Современные решения, применяемые в стробоскопических осциллографах, позволяют получить требуемые параметры СВХ.

Выводы

В остаточных классах могут быть представлены частоты как комплексных, так и действительных сигналов.

Для $n = n_1 n_2 \dots n_r$ представление частоты в СОК позволяет уменьшить число каналов обнаружения до значения $n_1 + n_2 + \dots + n_r$.

Обработка сигналов после дискретизации в представлении СОК производится в низкочастотной области спектра, приблизительно равной $n^{1/r-1}$ части общего диапазона анализа, что при реализации приемника существенно снижает требования к быстродействию элементов и уменьшает вычислительные затраты.

Наиболее подходящей областью применения данного метода является построение широкополосных приемников сигналов с неизвестной частотой, для которых вероятность совпадения во времени более g сигналов достаточно мала.

Литература

1. Кнут. Д. Искусство программирования для ЭВМ. Т.2. Получисленные алгоритмы. Пер. с англ. / Под ред. К.И. Бабенко. - М.: Мир, 1977.
2. Акушский И.Я., Юдицкий Д.И. Машинная арифметика в остаточных классах. М. Сов. Радио, 1968.
3. А.с. СССР №224930, приоритет от 29 окт. 1984 г./ В. С. Серегин, А. А. Бондаренко, С. В. Довбешко, И. В. Коряков.

Киев, сентябрь 2005 г.