ИНФОРМАЦИЯ И КОНТРОЛЬ 8, 295 - 303 (1965)

Анализ ошибок в конечных автоматах*.

Филипп С. Даубер

Мичиганский университет, Лаборатория информационных систем
Анн-Арбор, штат Мичиган.

Настоящая работа посвящена изучению ошибок в конечных автоматах ошибки определяется как пара состояний и ошибки, затем классифицируются в соответствии с их вероятностью быть исправленными (то есть принимаются в том же состоянии). Различные результаты. Затем передаются на разбиения свойств конкретного типа, ошибки называется конечной ошибкой.

1. ВВЕДЕНИЕ.

Эта проблема возникла из попытки сделать общее исследование надежности компьютера как машины. Классические результаты фон Неймана (фон Неймана; 1906) связаны только с сетями, которые не имеют никакого воздействия. Таким образом, он вызывает только сбой сети, чтобы быть в некорректном состоянии в течение заданного отрезка времени.

Тем не менее, неисправность в общем случае с обратной связью может привести к ошибке, которая сохраняется навсегда. К счастью, не все ошибки этого типа сохраняются. Есть ошибки такого типа, которые могут сохраняться только в течение ограниченного времени. Есть и такие, которые сохраняются бесконечно долго, у них есть вероятность быть исправленными в том случае, когда ленты становится длиннее. Таким образом, "почти все" ошибки в "длинных" лентах можно исправить.

Это то, явление, которое будет изучаться в этой статье. Будет показано, что ошибки последнего типа индуцируют разбиение на множестве состояний. Есть необходимость обсуждения этого вопроса для получения более надёжного состояния. В следующем разделе мы будем формализовать задачу в терминах теории автоматов.

II. Формализация задачи.

Для того чтобы выяснить обозначения и сделать проблему более формальной, начнем с определения конечного автомата и ошибки в конечном автомате.

Определение 2.1. Конечным автоматом назовём тройку:

$$M = (M', \sum, \delta).$$

M ' - есть конечное множество с элементами m_i (множество состояний);
$\sum$ - конечное множество с элементами δ_i (входной алфавит);
δ - является функцией от $M' \times \sum \to M'$

Позже мы будем использовать оба M для обозначения конечного автомата и его множество состояний. Мы также будем расширять δ до $\sum$, множество последовательностей символов из $\sum$, естественным образом с последовательностью чтения слева направо.

Определение 2.2. а.Ошибка, E, в конечном автомате, M, представляет собой пару (m_i, m_j).

б. Об ошибке, (m_i, m_j), корректируются лентой t («Лента» является синонимом «последовательности»), если только

$$\delta (m_i, t) = \delta (m_j, t).$$

Мы можем думать об ошибке (m_i, m_j) как о ситуации, когда, в связи с предыдущей неисправностью, автомат находится в состоянии m_i а должен быть в состоянии m_j, или находится в состоянии m_j а должен быть в состоянии m_i. Мы видим из определения, что ошибки исправляются, и что они эквивалентны.

В этой работе мы будем рассматривать последовательности, генерирующиеся случайным источником. Будем говорить, что случайный источник с выходным алфавитом $\sum$ обладает свойством P, тогда и только тогда если он является стационарным и существует ряд k, больше нуля, так что вероятность того, что символ σ после произвольной последовательности x больше k.

Определение 2.3. Пусть S случайный источник P с выходными символами $\sum$, и пусть M = (M, $\sum$, δ) конечный автомат обусловлен S.

Для ошибки E = (m_i, m_j) определим следующее:

а. $\gamma l^s (m_i, m_j)$ = вероятность того, что (m_i, m_j) корректирует ленту длины l.

б. $\gamma^s (m_i, m_j) = lim_{\, l\to\infty} \gamma l^s (m_i, m_j)$, если предел существует.

Легко увидеть, что для любого источника S и любой ошибки (m_i, m_j), $\gamma l^s (m_i, m_j)$ существует.

Лемма 2.1.

$\lim\limits_{l\to\infty} \delta\, l^s (m_i, m_j)$ всегда существует.

Доказательство:

$$1 \geq \gamma^s{}_{l+1} (m_i, m_j) \geq \gamma l^s (m_i, m_j).$$

Поскольку предел последовательности всегда связан и всегда существует, теорема доказана.

Теперь рассмотрим следующую классификацию ошибок в конечном автомате M с источником S, как указано выше.

Определение 2.4.Ошибка E = (m_i, m_j) является:

а. определенной, тогда и только тогда, если есть l такая, что γl^s (E) = 1.

б. конечна, тогда и только тогда когда γ^s (E) = 1.

в. исправимо, тогда и только тогда, если γ^s (E)>0.

г. неисправимо, тогда и только тогда, если γ^s (E)=0.

III. Фундаментальные результаты

В этом разделе мы выведем некоторые фундаментальные свойства ошибок и покажем связь между понятиями корректируемыми и конечными ошибками.

Теорема 3.1.

$\gamma(m_1, m_2) = g_1$ и $\gamma(m_2, m_3) = g_2$, то $1|-|g_1 - g_2| \geq \gamma(m_1, m_3) \geq (g_1 + g_2) - 1$.

Доказательство: Пусть множества лент, которые не исправляют (m_1, m_2) или (m_2, m_3); T1 множество, которое исправляет (m_1, m_2) или (m_2, m_3) но не то и другое; T2 множество, которое исправляет (m_1, m_2) и (m_2, m_3); и T3 множество, которое исправляет (m_1, m_3). Мы знаем, что, T1, T2 и не пересекаются и что $T2 \subset T3 \subset T2 \cup T0$.

Мы будем использовать $Pr_l(T)$, которая означает вероятность того, что лента *t* длины *l* в T.

$$g_1 + g_2 \lim_{l\to\infty} (Pr_l(T1) + 2Pr_l(T2)) = \lim_{l\to\infty} Pr_l(T1) + \lim_{l\to\infty} 2Pr_l(T2).$$

Но у нас есть для всех *l,* $Pr_l(T1) + 2Pr_l(T2) \leq 1$, поэтому

$$g_1 + g_2 \leq 1 + \lim_{l\to\infty} 2Pr_l(T2) \leq 1 + g_3$$

где $g_3 = \gamma(m_1, m_3)$. Следовательно, $g_3 = g_1 + g_2 - 1$. Точно так же, позволяя T11 множество лент, которые исправляет (m_1, m_2), а не (m_2, m_3), а T12 множество который корректирует (m_2, m_3), а не (m_1, m_2), у нас есть

$$\gamma(m_1, m_2) = Pr_l(T_2) + Pr_l(T11)$$

и

$$\gamma(m_2, m_3) = Pr_l(T2) + Pr_l(T12)$$

таким образом

$$|\gamma(m_1, m_2) - \gamma(m_2, m_3)| = | Pr_l(T11) - Pr_l(T12)|.$$

но

$$| Pr_l(T11) - Pr_l(T12)| \leq Pr_l(T_2) \leq 1 - (Pr_l(T0) - Pr_l(T2))$$

Теперь к пределу стремящемуся к бесконечности, мы получаем

$$|g_1 - g_2| \leq 1 - g_3$$
$$g_3 \leq 1 - |g_1 - g_2|.$$

Следствие 3.1. Множество ошибок в конечном автомате M приводит от источника со свойствами P и индуцирует разбиение на множестве состояний. То есть, существуют разбиения π_F от состояний M такие что $E = (m_i, m_j)$ конечна тогда и только тогда, когда $m_i \equiv m_j$ (π_F).

Доказательство: Очевидно, что если $\gamma(m_i, m_j) = 1$, то $\gamma(m_j, m_i) = 1$ в силу симметрии определение корректируется. Аналогично $\gamma(m_i, m_i) = 1$. Согласно теореме 3.1 имеем, что если $\gamma(m_i, m_j) = 1$ и $\gamma(m_j, m_k) = 1$, то $\gamma(m_i, m_k) = 1$. Поэтому: конечность отношения является отношением эквивалентности и разбивает множества состояний.

Теорема 3.2. Пусть $C \subset M \times M$ соотношение $(m_i, m_j) \in C$, только тогда, когда (m_i, m_j) является неисправимой ошибкой. Тогда ошибка $E = (m_i, m_j)$ конечна тогда и только тогда$(m_i, m_j) \in C$ и для всех лент t, $(\delta(m_i, t), (m_j, t)) \in C$.

Доказательство: Если (m_i, m_j), конечно, то, очевидно, (m_i, m_j) исправляется. Если есть лента T такая, что $(\delta(m_i, t), (m_j, t))$ не исправлена, то для всех

$t'(\delta(m_i, t\ t'), \delta\ (m_i, t\ t'))$ не исправить. Следовательно, $\gamma(m_i, m_j) \leq 1 - k^{lg(t)} < 1$, где lg(t) представляет собой длину ленты t, а k постоянная большая нуля, связанная с источником. Поэтому (m_i, m_j) не является конечной ошибкой. С другой стороны, предположим, что для всех t $(\delta(m_i, t\ ), \delta\ (m_j, t))$. Пусть A = $\{(m_k, m_l) \mid$ для некоторого $t\ \delta(m_i, t\ ) = m_k$ и $\delta\ (m_k, t) = m_l\}$. Затем для каждого $(m_k, m_l) \in A$, выберите t' который корректирует (m_k, m_l). Пусть $p= k^{\gamma}$, где $\gamma = \max lg(t')$. Тогда $\gamma_l(m_i, m_j) \geq 1 - (1 - \rho)^{[l/r]}$, где $[l/r]$ является наибольшее целое, меньшее l/r. Сследовательно

$$\lim_{l\to\infty} \gamma\ l(m_i, m_j) \geq 1 - \lim_{l\to\infty} 1 - (1 - \rho)^{[l/r}$$

Так как p> 0 имеем $\gamma(m_i, m_j) = 1$.

Из этой теоремы мы можем получить некоторое представление о связи С и π_F. Мы также можем видеть, что, так как понятие ошибки исправляются не зависит от источника, его свойство конечности также не зависит от источника. (Это справедливо лишь постольку, поскольку мы имеем дело только с источником со свойством P). Следующая теорема является более сильной характеристикой π_F по отношению к отношению С.

Теорема 3,3. π_F является крупнейшим разделов с заменой свойств, таких, что $m_i \equiv m_i\ (\pi_F) \to (m_i, m_j) \in C$.

Доказательство: Пусть π разбиение с заменой свойств, таких, что $m_i \equiv m_i\ (\pi) \to (m_i, m_j) \in C$. Тогда, если $m_i \equiv m_j\ (\pi)$, $(m_i, m_j) \in C$. Кроме того, поскольку π имеет замены свойств, для всех лент $t\ \delta(m_i, t\ ) \equiv\ \delta\ (m_i, t)\ (\pi)$ и, следовательно $(\delta(m_i, t), (m_j, t)) \in C$. Но по теореме 3.2, это означает, что $m_i \equiv m_j\ (\pi)$. Поэтому $\pi \leq\ \pi_F$.

Непосредственным следствием этой теоремы является разложения автомата следующим образом.

Следствие 3.2. Если М конечного автомата с конечным π_F, с погрешностью ошибки, то М может быть поведение состояния осуществления каскадного соединения двух автоматов $M/\ \pi_F$ и T, где все ошибки в T конечны и $M/\ \pi_F$ не имеет конечных ошибок.

Доказательство: По теореме 3.3, π_F повторное разбиение с заменой свойств. Таким образом, мы знаем (Hartmanis, 1962), которые можно разложить М в каскадном соединении двух автоматов, где состояние перед автоматом различает блоки перегородки и задние машины отличает элементы одного блока.

Давайте теперь посмотрим на примере, чтобы продемонстрировать эти теоремы.

Пусть M = ({a, b, c, d, e}, {0, 1} δ), где δ является отображение показано в таблице 1. Легко показать, что

$$C = \{(a, d), (d, a), (b, c), (c, b), (e, a), (a, e), (e, d), (d, e), (b, e), (e, b), (c, e), (e, c), (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e)\}.$$

Есть четыре отношения эквивалентности с заменой свойств, содержащихся в С.

$$\pi_1 = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}, \bar{e}\}$$

$$\pi_2 = \{\overline{a, d}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{e}\}$$

$$\pi_3 = \{\bar{a}, \overline{b, c}, \bar{d}, \bar{e}\}$$

$$\pi_4 = \{\overline{a, d}, \overline{b, c}, \bar{e}\}.$$

Одним из них является наибольшее π_4. Которая является, только конечной ошибкой.

{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (a, d), (d, a), (b, c), (c, b)}.

Кроме того, используя теорему 3.3 мы можем получить простое доказательство частного случая а

Таблица 1. Автомат А

δ	0	1
a	b	d
b	a	b
c	a	b
d	b	d
e	a	d

теорема, которая была доказана Виноградовым (1964), а также в другом контексте, Гильбертом и Муром (1959).

Следствие 3.3. Все ошибки в автомате M конечны, тогда и только когда M имеет сброс ленты. (Лента t является лентой сброса, если $\delta(m_i, t)$ не зависит от m_i).

Доказательство: Из теоремы 3.3 получаем, что все ошибки в автомате M конечны, тогда и только тогда, если все ошибки могут быть исправлены. Определить ленты $t = t_1t_2\ldots t_{k-1}$ (k = число состояний M) следующим образом:

t_1 исправляет (m_1, m_2)

t_{i+1} исправляет $(\delta(m_1, t_1\ldots t_i), \delta(m_{i+2}, t_1\ldots t_i))$.

Если это возможно построить такую t, то t является последовательность сброса. Не возможно построить такую ленту, тогда и только тогда, когда для некоторого *i,* $(\delta(m_1, t_1\ldots t_i), \delta(m_{i+2}, t_1\ldots t_i))$ не является неисправимой ошибкой. Но тогда, $(\delta(m_1, t_1\ldots t_i), \delta(m_{i+2}, t_1\ldots t_i))$ не является конечным. Следовательно, мы можем построить t тогда и только тогда, когда все ошибки конечны.

Давайте теперь посмотрим на другой пример, чтобы показать использование этой теоремы. Пусть M = ({a, b, c, d}, {0, 1} δ), где δ показан в таблице II. Легко видеть, что все ошибки можно исправить. Следовательно $\pi_F = \{\overline{a, b, c, d}\}$, а все ошибки конечны. При осмотре видно, что лента является 000 сброса ленты с $\delta(m_i, 000) = d$ независимо от m_i.

IV. Ошибки в развернутом автомате.

В этом разделе будут обсуждаться возможность добавления конечного автомата, такого, что новый автомат имеет, в том или ином смысле, улучшения свойств ошибок и остается реализацией оригинальных автоматов. Будет показано, что для одного ощущения "улучшения" это невозможно и что этот приведенный автомат имеет лучшие свойства ошибки. Мы будем использовать E(M) для M × M, множество упорядоченных пар состояний M и E (A) ≤ E (B) для концепции, которая не была уточнена еще той ошибкой, свойства автомата лучшие, чем те, из автомата B.

Таблица II. Автомат B

δ	0	1
a	b	c
b	c	d
c	d	b
d	d	b

Есть три свойства, которые интуитивно требуются для понятия ≤:

1. Она должна быть независимым источником.
2. Сравнение ошибки A и B должны быть общими. То есть, каждая ошибка в A должна быть одна по сравнению с ошибкой B и наоборот.
3. Для любого источника, ошибки A должны быть по крайней мере выше вероятности коррекции B, с которыми он сравнивается.

Так мы приходим к следующему определению, удовлетворяющему эти три свойства.

Определение 4.1. Пусть $A = M = (M_1, \sum, \delta_1)$ и $B = M = (M_2, \sum, \delta_2)$ два конечных автоматов с тем же входным алфавитом. Будем говорить, ошибки в A менее, чем ошибки в B, E (A) ≤ E (B), тогда и только тогда, если существует отображение пар состояний B на пары состояний A, $h\colon M_2 \times M_2 \to M_1 \times M_1$ на те свойства, что если $(m_i, m_j) \in M_2 \times M_2$ корректируется лентой t, то t также корректируется $h(m_i, m_j) \in M_1 \times M_1$.

Мы можем видеть, что определение соответствует нашим интуитивным понятием множества ошибок в одином автомате лучше, чем множество ошибок в другом, так как для любого источника, S если $\gamma(m_i, m_j) = c$, то $\gamma(h(m_i, m_j)) \geq c$. Таким образом h, принимает конечные и корректируемые ошибки. Кроме того, h^{-1} присваивает каждой ошибке в A по меньшей мере одну ошибку в B с такой же или более низкой вероятностью корректируется для любого источника.

Отметим, на данный момент, что отношение ≤ не порядок на множестве конечных автоматов. В качестве примера двух автоматов, которые не изоморфны и еще в течение которого оба E(A) ≤ E (B) и E (B) ≤ E (A), пусть A два входа mod 4 часов и пусть B два входа, mod 4 счетчика единиц. Оба они не изоморфны и все же, поскольку все ошибки в них не исправлены, и они оба имеют одинаковое число ошибок, E (A) ≤ E (B) и E (B) ≤ E (A).

Теперь мы покажем, некоторые свойства этого отношения.

Лемма 4.1. Если M_1 для которого автомат из M_2, то Е (M_1) ≤ Е (M_2).

Доказательство: Пусть h тождественное отображение на $M_1 \times M_1$, и пусть в таблице все другие пары в $M_2 \times M_2$ в (m_1, m_1), $m_1 \in M_1$. Теперь, если (m_1, m_1), $m_1 \in M_1 \times M_1$, то множество лент, которые исправляют ее в M_1 такая же, как набор лент, которые исправляют ее в M_2. Однако, если (m_i, m_j) не в $M_1 \times M_1$, то h $(m_i, m_j) = (m_1, m_1)$ и, таким образом, исправлены все ленты. Поэтому h обладает требуемыми свойствами.

Лемма 4.2. Если конечный автомат M_1 является гомоморфным конечного автомата M_2 , то Е (M_1) ≤ Е (M_2).

Доказательство: Пусть g гомоморфизм M_2 на M_1, а затем пусть h $(m_i, m_j) = (g(m_i), g(m_j))$. Кроме того, пусть t лента, которая корректирует (m_i, m_j). У нас есть $\delta_1(g(m_i), t) = g(\delta_2(m_i, t)$, так как g является гомоморфизмом M_2 на M_1. Кроме того, $g (\delta_2 (m_i, t)) = g (\delta_2 (m_j, t))$, так как t исправляет (m_i, m_j). Итак, мы имеем $\delta_1(g(m_i), t) = g(\delta_2(m_i, t) = g(\delta_2(m_j, t) = \delta_1(g(m_j), t)$. Поэтому t исправляет $(g(m_i), g(m_j)) = h(m_i, m_j)$. Таким образом, h обладает требуемым свойством.

Теорема 4.1. Если A является приведенным конечным автоматом и B любым другим автоматом, который понимает A, то E (B) ≥ E (A).

Доказательство: Если A понимает B, то B является гомоморфным автомату A (Hartmanis и Stearns, 1964). Используя леммы 4.1 и 4.2, теорема доказана.

Следствие 4.1. Если R является регулярным множеством лент, конечных автоматов с минимальными ошибками, которая признает R и является минимальным автоматом

Таким образом, если мы заинтересованы в получении автомата, который реализует данный автомат (или признает данное регулярное множество), и который имеет минимальные ошибки под наше определение заказа, мы должны использовать приведенный автомат (или не менее одного связанного с набором ленты) так как любое состояние расщепления, или добавление состояния, делает новый автомат, ошибок не меньше, чем у исходного.

Результаты этого параграфа могут быть ошибочны. Похоже, утверждают, что такие методы, как трипликатинг и мультиплексирования не являются эффективными, поскольку они увеличивают число состояний. Таким образом, ошибки в мультиплексированном автомата выше, чем у исходного. Однако польза, мультиплексирования и трипликатинга заключается в том, что они снижают вероятность возникновения неисправности причиной ошибки между состояниями, которые не являются поведенчески эквивалентными. Так при рассмотрении автоматов без выходов поведенческой концепции эквивалентных состояний не возникает. Если мы хотим использовать нашу теорию для обработки таких случаев, мы должны рассмотреть автоматы по модулю отношение эквивалентности поведения. Однако, даже после выполнения мультиплексированных или тройных автоматов существуют ошибки, которых не меньше, чем в оригинале. Таким образом, преимущества этих методов, как и повышение надежности компонентов в физической реализации автомата, не появляются в теории. С другой стороны, делает возможные неудобства.

Поступило: 13 ноября 1964

* Эта работа была выполнена при частичной поддержке ВВС контракт AF 30 (602) -3546.

Раздел IV составлен на основе работ в то время как автор был связан с General Electric Research Laboratory, Schenectady, Нью-Йорк.

Ссылки

Gilbert , E. and Moore, E. (1959), Variable-length binary encodings. *Bell System Tech. J.* 38, 933-967.

Hartmanis, J. (1962), Loop-free structure of sequential machines. *Inform. Control* 5, 25-43.

Hartmanis, J. and Stearns, R. E. (1964), Pair algebra and its application to automata, *Inform. Control* 7, 485-507.

von Neumann, J. (1956), Probabilistic logics and the synthesis of reliable organisms from unreliable components. *In* "Automata Studies," C. Shannon and J. McCarthy, eds., pp. 43-98. Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey.

Winograd, S. (1964), Input-error-limiting automata. *J. Assoc. Comput. Mach.* 11, 338-351.