

**Научно-исследовательская работа студента на тему  
«Реконструкция обыкновенных дифференциальных уравнений по  
временным рядам»**

**Автор:** Денисенко М.И.

**1.1 Дифференциальные уравнения и моделирование с позиций детерминизма**

Классическим «материалом» для создания динамических (детерминистических) математических моделей являются дифференциальные уравнения. Появление этого математического аппарата в 17-м веке, почти одновременно с дифференциальным и интегральным исчислениями, было вызвано потребностями механики и связано с именами И. Ньютона и Г. Лейбница. Уравнения механики Ньютона (уравнения динамики) являются признанным эталоном «динамической системы» — математической модели, позволяющей однозначно предсказать эволюцию объекта по заданному исходному состоянию. Под «состоянием» понимают совокупность значений величин  $X_j$  ( $j = 1, 2, \dots, D$ ), характеризующих объект, т.е. это  $D$ -мерный вектор  $x$  ( $x_1, x_2, \dots, x_D$ ), называемый еще *вектором состояния*. Далее мы ограничимся «обыкновенными» дифференциальными уравнениями (ОДУ), содержащими производные лишь по одной независимой переменной:

$$\frac{dx}{dt} = F(x) \quad (1)$$

где  $x$  - зависимая (*динамическая*) переменная,  $t$  - независимая переменная. К уравнению первого порядка (1) или эквивалентной ему системе уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= F_1(x_1, x_2, \dots, x_D), \\ \dot{x}_2 &= F_2(x_1, x_2, \dots, x_D), \\ &\dots \\ \dot{x}_D &= F_D(x_1, x_2, \dots, x_D), \end{aligned} \quad (2)$$

заменой переменных можно свести ОДУ, содержащие производные  $\frac{d^n x_j}{dt^n}$

любого порядка  $n$ . Одним из достоинств дифференциальных уравнений является возможность их наглядной геометрической интерпретации. Уравнения задают векторное поле - определяют значение *вектора скорости изменения состояния* в точках фазового пространства (пространства состояний). Координатам точек в этом пространстве соответствуют значения  $x_j$ , проекции вектора скорости изменения состояния равны  $X_j$ , а геометрической интерпретацией решения является линия, касательная к векторам скорости и проходящая через начальную точку. При выполнении условий теоремы существования и единственности решения через начальную точку  $x(0)$  проходит единственная линия, соответствующая эволюции состояния при изменении независимой переменной. Это означает, что будущее однозначно определено, что является основным требованием детерминированного описания.

## 1.2 Временные ряды

«Ряды» — дискретные последовательности значений величины, характеризующей объект, измеренные или вычисленные при некоторых значениях независимой переменной. Если независимой переменной является время, ряды называют *временными*. Их непосредственно или после преобразований используют при моделировании в качестве реализаций динамических переменных. В том случае, когда наблюдению и измерению в каждый момент времени  $t_i$  доступны несколько величин:  $x_1, x_2, \dots, x_D$ , ряд называют *векторным* (так как переменные  $x_j$  можно считать компонентами  $D$ -мерного вектора  $x$ ), если исходная величина одна - *скалярным*.

Далее мы будем рассматривать лишь ряды, которые содержат значения наблюдаемой величины  $v$ , измеренные через равные интервалы времени  $\Delta t$  (*интервалы выборки*). Члены ряда  $v_i$  - значения наблюдаемой величины в дискретные моменты  $t_i$  - будем называть *точками*,  $i$  - порядковым номером точки или *дискретным временем*, количество точек в ряде  $N$  - *длиной ряда*. Для обозначения самого ряда будем использовать фигурные скобки:

$$v_i \Big|_{i=1}^N = \{v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_N\}$$

### 1.3 Конструирование, реконструкция, восстановление

Наиболее часто при построении модельных дифференциальных уравнений, следуя принципу «от общего к частному», исходят из фундаментальных законов, которым подчиняются объекты рассматриваемой природы, вводя ограничения, соответствующие моделируемому случаю. Например, при решении задач по механике записывают законы сохранения или уравнения Ньютона с силами и допущениями, определяемыми условиями задачи. В таких «асимптотических» моделях обычно ясен физический смысл параметров и переменных; они универсальны и хорошо зарекомендовали себя в различных областях знаний. Однако можно привести много примеров, когда информации об объекте недостаточно или записать базовую систему уравнений не представляется возможным из-за сложности объекта. Например, о ходе процессов на далекой звезде можно судить лишь по зависимости ее светимости от времени. Одним из путей получения математических моделей в таких ситуациях является конструирование уравнений по экспериментальным временным рядам. Получающиеся эмпирические модели могут претендовать только на описание наблюдаемого процесса, а не поведения объекта в целом. Если искать аналогии в механике, то эмпирическая модель, полученная из временной реализации движения объекта аналогична «кинематической», которая не несет информации о причинах изменения скорости движения, имеющейся в уравнениях динамики.

Процедуру получения модельных уравнений по временным рядам, которая достаточно часто обсуждается в научной литературе последнего десятилетия, называют *реконструкцией* уравнений. В русскоязычной литературе это слово обычно несет смысл «восстановление» или «реорганизация». При восстановлении математических уравнений по временным рядам, полученным при их численном решении, действительно

производится реконструкция. Но при моделировании реальных систем не приходится говорить о некой исходной, истинной модели, поэтому «восстанавливать» нечего и следовало бы пользоваться словами «конструирование» или «создание». Мы будем использовать устоявшийся термин, не обращая внимание на отмеченные особенности; тем более, что в практической части данной работы в качестве исходного ряда используются результаты численного решения некоторого известного дифференциального уравнения или решение со случайной добавкой, моделирующей обязательные для реальных объектов шумы.

## 2.1. Общая схема реконструкции математической модели по временному ряду

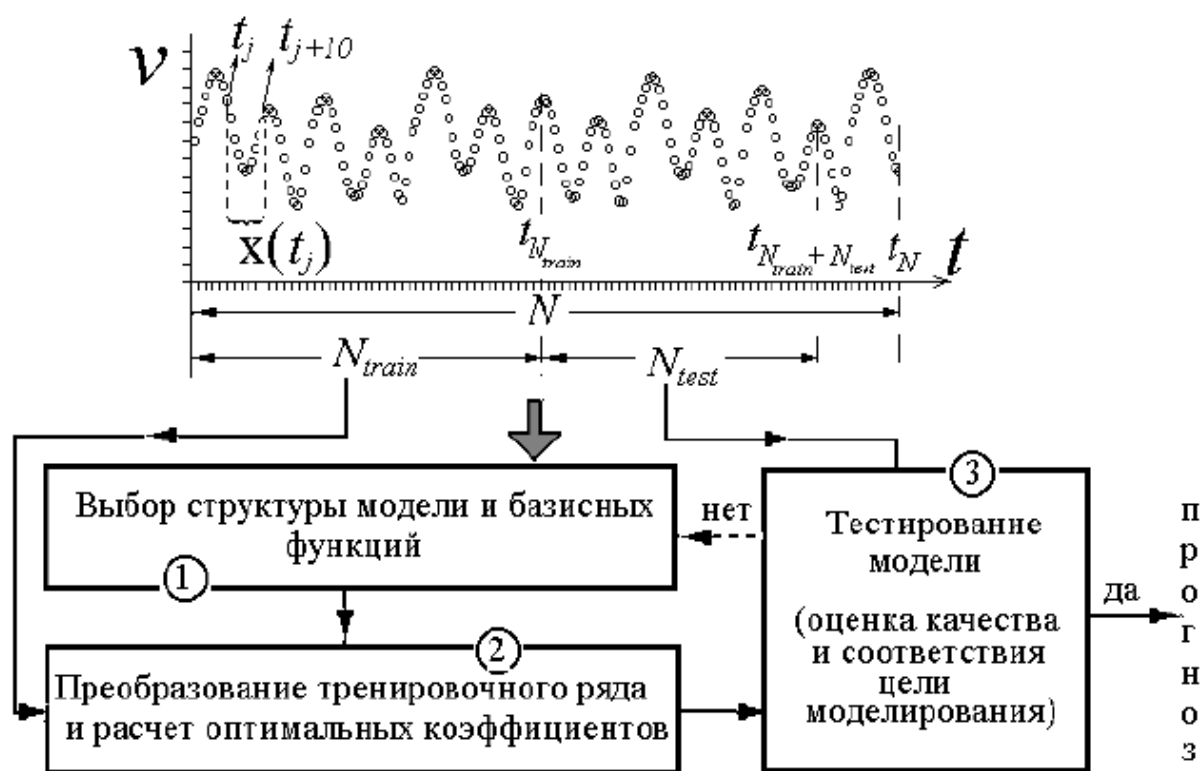


Рис.1. Схема процесса моделирования по временному ряду.

Реконструкция дифференциальных уравнений проводится по схеме (рис.1). На первом этапе (1) на основании априорных данных, по оценке размерности множественной структурой модели: ослабляются шумы, с

необходимой частотой выбираются точки, восстанавливаются дополнительные переменные и т.п. Далее, искомую функцию  $F$  представляют с помощью выбранных на первом этапе *базисных* функций с неизвестными коэффициентами и находят значения коэффициентов, которые обеспечивают наилучшее соответствие модели и экспериментальных данных. На третьем этапе результаты предсказания с помощью полученной модели сравниваются с данными тестовой части ряда. При этом оценивают качество получившейся модели, для чего используются критерии, определяемые целью моделирования.

Специфика восстановления дифференциальных уравнений в основном проявляется на втором этапе, при обработке исходного ряда. Так как операции численного дифференцирования критичны к выбору величины временного интервала между дискретными точками и приводят к усилению влияния высокочастотных шумов, здесь требуется проводить ряд специальных «мероприятий». На них мы обратим в данной работе особое внимание. Что касается выбора структуры модели, то здесь мы воспользуемся стандартной аппроксимацией зависимостей алгебраическими полиномами. Учитывая, что в практической части работы в качестве объекта моделирования используются эталонные уравнения, качество реконструкции будем оценивать, сравнивая полученную модель непосредственно с объектом.

## **2.2 Основные элементы процедуры для дифференциальных уравнений, стандартный подход**

Оставим пока трудные вопросы, встречающиеся при моделировании конкретных объектов, тем более реальных. Расширим представления о моделировании по рядам на анализе наиболее *простой ситуации*: имеется векторный временной ряд  $\{x_i\}_{i=1}^N$ , т.е. в каждый момент времени  $t_i$  наблюдению доступны  $D$  величин  $X_1(t_i), \dots, X_D(t_i)$ , однозначно определяющих состояние объекта; временные реализации достаточно гладкие, а интервал  $\Delta t$ , с которым они оцифровываются, мал по сравнению с характерными

масштабами их изменения. То есть имеются все основания искать модель в виде (2).

Для построения модели используем временной ряд из первых  $N_{train}$  значений каждой из наблюдаемых (назовем его «тренировочным»). Продолжение тренировочного временного ряда («тестовый» ряд длиной  $N_{test}$ ) используем *позже* для проверки эффективности построенной модели (рис.1).

В соответствии со схемой рис.1 процедура построения модели сводится к тому, чтобы

- по временному ряду  $\{x_i\}$  рассчитать временной ряд  $\frac{dx(t_i)}{dt}$
- подобрать функции  $F_j$ , аппроксимирующие зависимости  $dx_j/dt$  от  $x$ ,
- проверить эффективность построенной модели.

Первую задачу решают путем численного дифференцирования. В рассматриваемом случае можно использовать любой стандартный метод, при наличии шумов требуются специальные методы. *Стандартным* путем решения второй задачи является представление функций  $F_j$  полиномами порядков  $K_j$ :

$$F_j(x_1, x_2, \dots, x_D) = \sum_{l_1, l_2, \dots, l_D=0}^{K_j} c_{j, l_1, l_2, \dots, l_D} \prod_{k=1}^D x_k^{l_k}, \sum_{k=1}^D l_k \leq K_j. \quad (3)$$

Затем вычисляют значения коэффициентов, которые обеспечивают наилучшее соответствие модели и экспериментальных данных (*подгонка* модели к временному ряду). Обычно для этого используют метод наименьших квадратов, т.е. вычисляются такие значения коэффициентов  $c_{j, l_1, l_2, \dots, l_D}$ , которые минимизируют среднеквадратичные ошибки аппроксимации  $\varepsilon_j$  ( $j = 1, \dots, D$ ):

$$\varepsilon_j^2 = \frac{1}{N_{train} - m + 1} \sum_i \left[ \frac{dx_j(t_i)}{dt} - F_j(x_1(t_i), x_2(t_i), \dots, x_D(t_i)) \right]^2 = \min. \quad (4)$$

*В более трудном случае*, когда наблюдению доступен лишь скалярный временной ряд  $\{v_i\}_{i=1}^N$ , процедура построения модели (2) включает в себя еще один предварительный этап (по сравнению с моделированием по векторному ряду). Необходимо выяснить, как изменялся во времени вектор состояния

системы, т.е. по скалярному временному ряду  $\{v_i\}$  построить («восстановить») временной ряд векторов состояния  $\{x_i\}$ . Эту процедуру называют *реконструкцией фазовой траектории*. Один из часто используемых методов — метод последовательного дифференцирования, согласно которому координатами вектора состояния в момент времени  $t_i$  являются последовательные временные производные наблюдаемой в этот момент:

$$\begin{aligned} x_1(t_i) &= v(t_i), \\ x_2(t_i) &= \frac{dv(t_i)}{dt}, \\ &\dots, \\ x_D(t_i) &= \frac{d^{D-1}v(t_i)}{dt^{D-1}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Выбор размерности модели  $D$  можно осуществить на основе предварительного анализа временного ряда. Модель имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ &\dots \\ \dot{x}_D &= F_D(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $x_1 = v$ , а  $F_D$  — искомая функция, аппроксимирующая зависимость  $X_D(x)$  (отметим, что в данном случае нужно аппроксимировать только одну зависимость), она может быть представлена, например, полиномом (3) некоторого порядка  $K$ , значения коэффициентов которого также определяются методом наименьших квадратов.

Уравнения (6) представляют собой частный случай системы  $\dot{x} = F(x)$ , но какова степень их общности? Приведем сначала несколько примеров систем такого «стандартного» вида. В качестве первого примера можно указать осциллятор Ван-дер-Поля:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \lambda(1 - x^2)y. \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнения (7) являются частным случаем уравнений (6) если  $D = 2$ , функция  $F$  — полином порядка 3 и в качестве наблюдаемой  $v$  выбрана координата  $x$ .

К виду (6) можно привести и уравнения системы Ресслера:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + a \cdot y, \\ \dot{z} &= b - cz + xz.\end{aligned}\tag{8}$$

Если перейти к другим переменным — последовательным производным координаты  $y$ , то уравнения (8) можно переписать [7] в виде:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= -b - cx_1 + (ac - 1)x_2 + (a - c)x_3 - ax_1^2 + (a^2 + 1)x_1x_2 - ax_1x_3 - ax_2^2 + x_2x_3,\end{aligned}\tag{9}$$

где  $x_1 = y$ . Уравнения (9) — частный случай уравнений (6), если  $D = 3$ , а функция  $F$  — полином порядка 2.

Для последовательных производных координаты  $X$  уравнения Ресслера переписутся как

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= ab - cx_1 + (ac - 1)x_2 + (a - c)x_3 + x_1^2 - ax_1x_2 + x_1x_3 - \\ &\quad - \frac{x_2(x_1 + b - ax_2 + x_3)}{a + c - x_1},\end{aligned}\tag{10}$$

где  $x_1 = x$ . Уравнения (10) — частный случай уравнений (6), если  $D = 3$ , а функция  $F$  — дробно-рациональная функция с полиномом порядка 3 в числителе и полиномом порядка 1 в знаменателе (это легко увидеть, если правую часть последнего уравнения (10) привести к общему знаменателю).

Для производных переменной  $z$  системы Ресслера также можно записать уравнения (8) в виде, аналогичном (9) и (10) с  $D = 3$  и дробно-рациональной функцией в правой части.

Таким образом, уравнения (6) обладают достаточно большой степенью общности. К такому виду можно привести любую систему уравнений  $\dot{x} = F(x)$ , но в общем случае размерность  $D$  системы (6) должна быть больше,

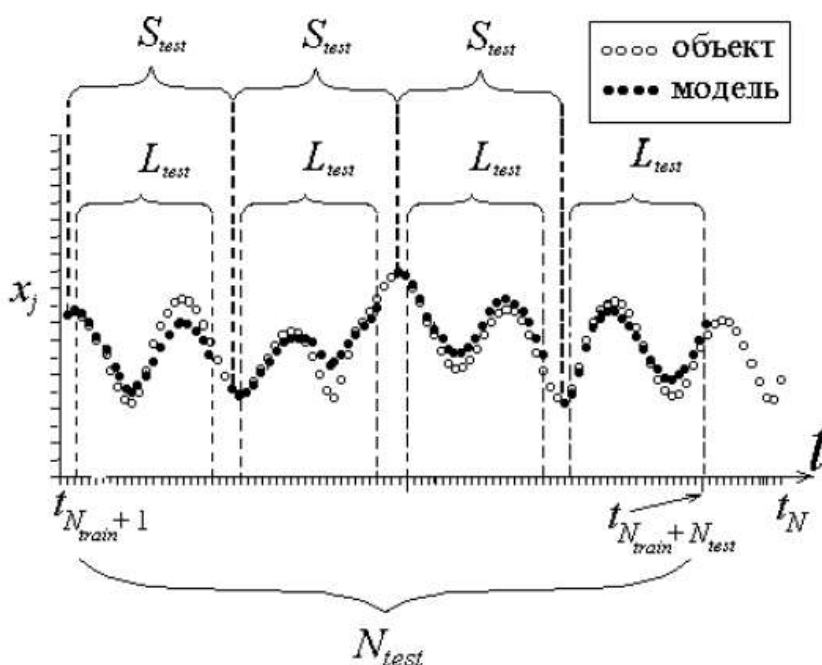


чем размерность  $d$  исходной системы (согласно теореме Такенса достаточно потребовать  $D > 2d + 1$ , но иногда это оказывается слишком строгим требованием).

### 2.3 Критерии эффективности модели

После того, как модель построена (значения всех коэффициентов вычислены), необходимо проверить ее работоспособность. Как уже говорилось, критерии эффективности модели определяются целями моделирования. Далее мы обсудим несколько возможных критериев (на примере модели (2),(3), построенной по векторному ряду):

- погрешности аппроксимации  $\varepsilon_j$  ( $j = 1, \dots, D$ ),
- погрешности аппроксимации  $s_{test}^j$ , рассчитанные по тестовому ряду,
- дальность прогноза, обеспечиваемого моделью,
- качественное соответствие поведения модели и объекта;
- в некоторых примерах (где это возможно) будем также сравнивать полученные значения коэффициентов с их истинными значениями.



**Рис.2.** Иллюстрация к вычислению дальности прогноза по тестовому временному ряду.

Здесь светлыми кружками показана временная реализация объекта (одной из наблюдаемых величин), черными — прогноз для отдельных участков. В данном случае длина одного тестового участка  $L_{test}=20$ , общее количество тестовых участков  $K_{test}=4$ , сдвиг между соседними участками  $S_{test}=23$ , длина тестового ряда  $N_{test}=23$

Обсудим подробнее каждый из перечисленных критериев

1) Величина погрешности аппроксимации по исходному, тренировочному ряду  $S_j$  может служить показателем качества модели. Удобно использовать нормированную величину  $\varepsilon_j/S_j$  (где

$$S_j = \sqrt{\frac{1}{N_{train}} \sum_{t=1}^{N_{train}} (\dot{x}_j(t) - \bar{\dot{x}}_j)^2}$$

стандартное отклонение производной  $X_j$  от ее среднего значения) и выражать ее в процентах. Если нормированная погрешность аппроксимации превышает, скажем, 50 %, то трудно рассчитывать на эффективность модели.

2) Казалось бы, чем меньше величины  $\varepsilon_j$ , тем лучше модель. Однако обратим внимание, что  $\varepsilon_j$  может обратиться и в ноль, если количество коэффициентов модели очень велико (равно  $N_{train}-m+1$ ). Но такая громоздкая модель наверняка не будет сколько-нибудь эффективной для описания исходной системы. Используя значения коэффициентов  $c_{j,1,1,2,\dots,D}$ , рассчитанные по тренировочному ряду, можно вычислить погрешность аппроксимации зависимости  $dx_j/dt$  от  $\mathbf{x}$  ( $\varepsilon_{test,j}$ ) по тестовому временному ряду:

$$\varepsilon_{test,j}^2 = \frac{1}{N_{test}} \sum_{i=N_{train}+1}^{N_{train}+N_{test}} [\dot{x}_j(t_i) - F_j(\mathbf{x}(t_i))]^2. \quad (11)$$

Это более надежная характеристика качества модели, т.к. тестовый ряд не используется для подгонки значений коэффициентов.

3) Для расчета дальности прогноза используем следующий подход [3]. Рассчитаем среднеквадратичную ошибку прогноза, обеспечиваемого моделью, на определенное число выборочных интервалов вперед. Причем для проверки будем использовать различные участки тестового временного ряда.

Зададим начальные условия модели, используя первые значения наблюдаемых из тестового ряда:

$$x_1 = x_1(t_{N_{train}+1}), x_2 = x_2(t_{N_{train}+1}), \dots, x_D = x_D(t_{N_{train}+1})$$

Численно интегрируя модельные уравнения, получим временную реализацию модели длиной  $L_{test}$  интервалов выборки. Эта реализация содержит *предсказанные* значения наблюдаемых в моменты времени  $t_{N_{train}+2}, \dots, t_{N_{train}+1+L_{test}}$ . Сравним ее с соответствующим участком тестового

ряда (рис.2). Обозначим  $\hat{x}_j(t_{N_{train}+1}, T)$  — предсказанное с помощью модели значение наблюдаемой  $x$ , на  $T$  интервалов выборки вперед (т.е. *прогноз с упреждением*  $T$ ), начиная с момента времени  $t_{N_{train}+1}$ . Квадрат ошибок прогноза с упреждением  $T$  ( $1 < T < L_{test}$ ) определяется выражением

$$\sigma_j^2(t_{N_{train}+1}, T) = (\hat{x}_j(t_{N_{train}+1}, T) - x_j(t_{N_{train}+1+T}))^2, j = 1, \dots, D.$$

Определенная таким образом ошибка прогноза зависит от выбранного начального момента времени, с которого мы начинаем прогнозировать процесс.

Выберем теперь другие начальные условия, сместившись по тестовому ряду на  $S_{test}$  интервалов  $At$  (см. рис.2):  $x_1 = x_1(t_{N_{train}+1+S_{test}}), \dots, x_D = x_D(t_{N_{train}+1+S_{test}})$ .

Вновь рассчитаем квадрат ошибки прогноза:

$$\sigma_j^2(t_{N_{train}+1+S_{test}}, T) = (\hat{x}_j(t_{N_{train}+1+S_{test}}, T) - x_j(t_{N_{train}+1+S_{test}+T}))^2.$$

И так далее рассчитаем ошибки прогноза  $\sigma$ , для  $K_{test}$  различных начальных условий (различных участков тестового ряда, каждый из которых смещен на  $S_{test}$  шагов относительно предыдущего). В итоге рассчитаем нормированную *среднеквадратичную* ошибку прогноза в зависимости от упреждения  $T$ :

$$\sigma_j(T) = \sqrt{\frac{1}{K_{test}} \sum_{i=1}^{K_{test}} \sigma_j^2(t_{N_{train}+1+S_{test}(i-1)}, T)} / S_j^2}, \quad (12)$$

Дальность прогноза  $T_{pred}$  наблюдаемой  $x$ , определяется как время возрастания величины  $\sigma_j(T)$  от нуля (при  $T = 0$ ) до определенного критического значения  $C_c$ :  $C_j(r_{pred} j) = c_c$ . Это критическое значение определяется тем, какая погрешность прогноза допустима. Мы примем значение  $C_c = 0.05$  (т.е.

допустима погрешность 5 % от общего размаха колебаний).

Обращаем ваше внимание на то, что время прогноза хаотических процессов даже с использованием «идеальной» модели принципиально ограничено и это надо учитывать при оценке качества модели. Для оценки предельно возможной дальности прогноза можно использовать выражение

$$\tau_{pred.j} = \frac{1}{2\lambda_+} \ln \frac{\sigma_c^2 \cdot S_j^2}{\sigma_v^2 + \sigma_\mu^2 + \sigma_{\Delta M}^2}, \quad (13)$$

где  $\lambda_+$  — старший ляпуновский показатель,  $\sigma_v^2$  определяет флуктуации в системе,  $\sigma_\mu^2$  — погрешности измерительных приборов,  $\sigma_{\Delta M}^2$  — погрешность модели («шумы незнания»).

4) Для качественного сравнения режимов поведения модели и объекта нужно задать начальные условия для модели (из тестового ряда) и получить ее фазовую траекторию. Затем сравнить проекции фазовых портретов объекта и модели на плоскость  $(x_1, x_2)$ .

5) Если реконструируется известная математическая конструкция, критерием качества модели может служить относительная погрешность определения значения некоторого коэффициента, которая определяется как

$$\varepsilon_{coeff}^{(i)} = \frac{|c_i - c_i^{(0)}|}{|c_i^{(0)}|} \quad (14)$$

в случае  $c_i^{(0)} \neq 0$ , где  $c_i^{(0)}$  — истинное значение данного коэффициента. Если  $c_i^{(0)} = 0$ , то ошибку восстановления значения коэффициента определяют как

$$\varepsilon_{coeff}^{(i)} = |c_i|. \quad (15)$$

Общую ошибку восстановления значений коэффициентов по временному ряду  $\varepsilon_{coeff}$  можно определить, например, как среднее значение индивидуальных ошибок или как максимальную из всех индивидуальных ошибок:

$$\varepsilon_{coeff} = \max_{i=1, \dots, m} \varepsilon_{coeff}^{(i)} \quad (16)$$

Приведенный перечень критериев не является исчерпывающим. Заметим, что введенные выше обозначения используются далее в описаниях программ для конструирования модельных уравнений (приложения).

### 3.1 Процедура получения временного ряда производных, борьба с шумами

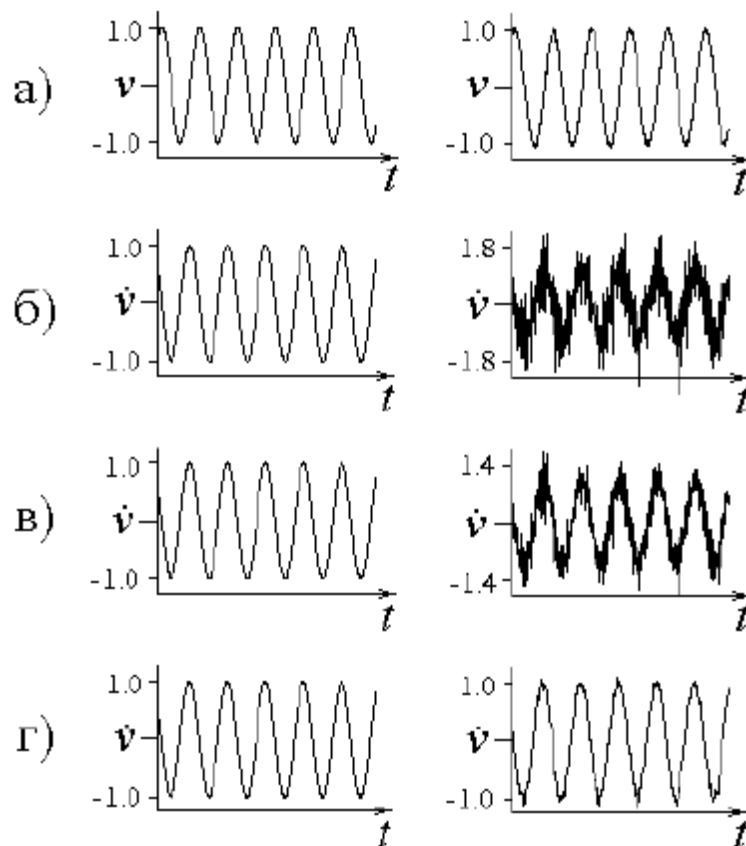
В отсутствие шумов для численного дифференцирования исходного ряда можно использовать, например, формулу

$$\dot{x}_1(t_i) = \frac{x_1(t_{i+1}) - x_1(t_i)}{\Delta t}. \quad (17)$$

Погрешность вычисления производной для данной схемы составляет  $O(\Delta t)$ . Точность можно увеличить, если от (17) перейти к схеме

$$\dot{x}_1(t_i) = \frac{x_1(t_{i+1}) - x_1(t_{i-1}))}{2 \cdot \Delta t}, \quad (18)$$

для нее погрешность составляет  $O(\Delta t)$ . Однако в обоих упомянутых случаях предполагается, что шумы в системе отсутствуют.



**Рис.3.** В левом столбце (а)представлен график наблюдаемого сигнала  $v(t) = \sin(t)$ ,справа показан тот же сигнал добавленным к нему нормальным белым шумом, стандартное отклонение которого составляет примерно 3 % от стандартного отклонения сигнала (отношение сигнал/шум примерно 30 дБ). Ниже (б,в,г)представлены графики первых производных этих сигналов,вычисленных с использованием формул (17), (18) и (19)при  $m = 9$ .

При наличии шумов погрешности дифференцирования с помощью формул (16) или (17) будут очень велики (см. рис.3а-в). Поэтому на практике используют другие методы расчета производных, которые связаны с усреднением шума.

В данной работе будет использован следующий подход. Для расчета производной в момент времени  $t_i$  используется  $m$  значений наблюдаемой величины в окрестности  $t_i$ . Предпочтительнее использовать нечетное значение  $m$ , так как тогда используется равное количество значений слева и справа от рассматриваемой точки:  $x_1(t_{i-(m-1)/2}), \dots, x_1(t_{i-1}), x_1(t_i), x_1(t_{i+1}), x_1(t_{i+(m-1)/2})$  (центрированная схема). Этот «короткий ряд» из  $m$  значений (наблюдаемая реализация в окрестности точки  $t_i$ ) на основании разложения в ряд Тейлора аппроксимируется функцией

$$x_1(t) = a_0 + a_1(t - t_i) \dots \dots \dots (19)$$

Коэффициенты  $a_0$  и  $a_1$  рассчитываются методом наименьших квадратов (должно быть  $m > 2$ ). Значение производной определяется как  $xc_1(t_j) = a_1$ . Чем выше уровень шума, тем большее значение  $m$  следует выбирать. Однако оно не должно быть слишком большим, иначе не будет эффективной линейная аппроксимация (19). Отметим, что точность вычисления производной зависит также от такого параметра, как количество измеренных значений на характерном периоде колебаний. Опыт показывает, что если на один период приходится менее 30-40 точек, то точность вычисления производной не велика; желательно, чтобы было не менее 100 точек на периоде.

Пусть единственной информацией об объекте является скалярный временной ряд  $v_i$   $i=1$   $N$ . Для реконструкции недостающих координат вектора состояния используется метод последовательного дифференцирования (5), а модель строится в виде (6). Обратим внимание, что первые  $D - 1$  уравнений в

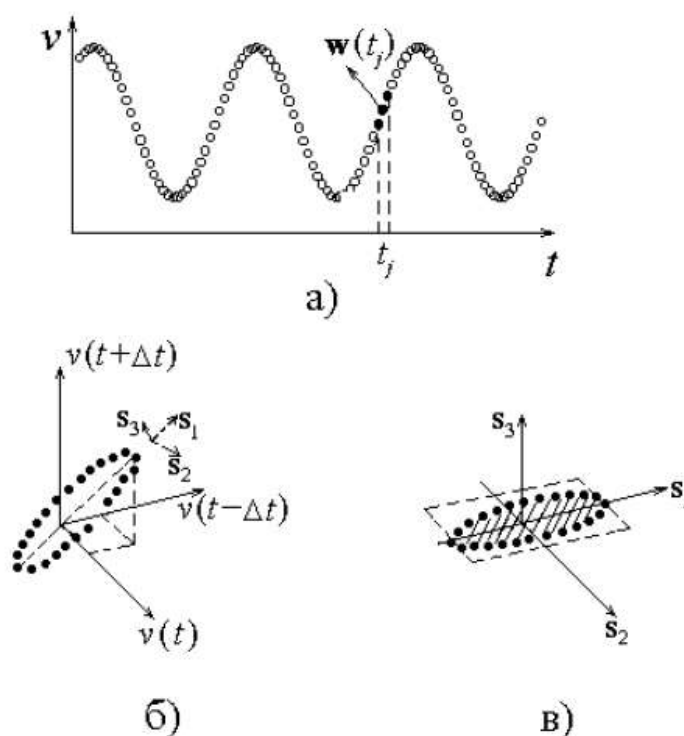
(б) имеют заданный простейший вид, но за это надо «платить» необходимостью вычисления по исходному ряду производных высокого

порядка – до  $\dot{x}_D = \frac{d^D v}{dt^D}$

При наличии шума это может оказаться весьма непростой задачей, так как требует принять меры для уменьшения влияния шума.

Рассмотрим метод вычисления нескольких производных наблюдаемой  $v$  при наличии шума, который включает в себя метод Брумхеда-Кинга для оценки размерности движения.

#### 4.1 Метод Брумхеда-Кинга



**Рис.5.** Гармонические колебания при отсутствии шума: а) восстановление векторов  $w$  методом задержек по скалярному ряду ( $m = 3$ ), б) восстановленная фазовая траектория представляет собой плоский эллипс, вытянутый вдоль главной диагонали пространства  $R^m$ , в) положение фазовой траектории в новой системе координат — после преобразования поворота (составляющая векторов вдоль направления равна нулю).

Идея метода Брумхеда-Кинга состоит в следующем. Сначала по скалярному ряду восстанавливаются методом задержек векторы  $w(t)$  в пространстве вложения достаточно большой размерности (на рис .5 для наглядности представлен случай гармонических колебаний при отсутствии

шума и при размерности вложения  $m = 3$ ). Затем в этом пространстве производится преобразование поворота, причем направления новых осей координат (на рис. 5б, в это  $\{s_1, s_2, s_3\}$ ) выбираются в соответствии с теми направлениями, вдоль которых наиболее интенсивно развивается движение. Оценкой сверху для размерности служит количество направлений, вдоль которых имеется существенная протяженность траектории (на рис. 5в движение развито только вдоль направлений  $s_1$  и  $s_2$ ). Составляющие векторов вдоль тех направлений, которые слабо «осваиваются траекторией» (на рис. 5в это направление  $s_3$ ) списываются на влияние шума и ими пренебрегают.

Для вычисления нескольких производных наблюдаемой  $v$  в момент времени  $t_j$  используются несколько первых (главных) компонент вектора  $w(t_j)$  в системе координат  $\{s_i\}$ . Далее будет более подробно изложен данный подход.

1) По исходной реализации восстанавливаются векторы в пространстве достаточно большой размерности  $m$  методом временных задержек. Время задержки полагают равным интервалу выборки  $\Delta t$ . Получают временной ряд  $m$ - мерных векторов  $\{w(t_i)\}$  (рис. 5а, б). Восстановленные векторы выражаются при нечетном  $m$  как

$$w(t_i) = \begin{pmatrix} v(t_{i-(m-1)/2}) \\ \dots \\ v(t_{i-1}) \\ v(t_i) \\ v(t_{i+1}) \\ \dots \\ v(t_{i+(m-1)/2}) \end{pmatrix}, \quad (20)$$

а при четном  $m$ :



$$\mathbf{w}(t_i) = \begin{pmatrix} v(t_{i-m/2+1}) \\ \dots \\ v(t_{i-1}) \\ v(t_i) \\ v(t_{i+1}) \\ \dots \\ v(t_{i+m/2}) \end{pmatrix}. \quad (21)$$

2) Оценкой сверху для размерности наблюдаемого движения может служить размерность подпространства, которому принадлежит полученная траектория. Для того чтобы найти размерность этого подпространства, определяется максимальное количество линейно независимых векторов траектории  $\{\mathbf{w}(t_i)\}$ . Можно показать, что при отсутствии шума это число равно рангу матрицы ко- вариаций  $\Theta$  наблюдаемого процесса:

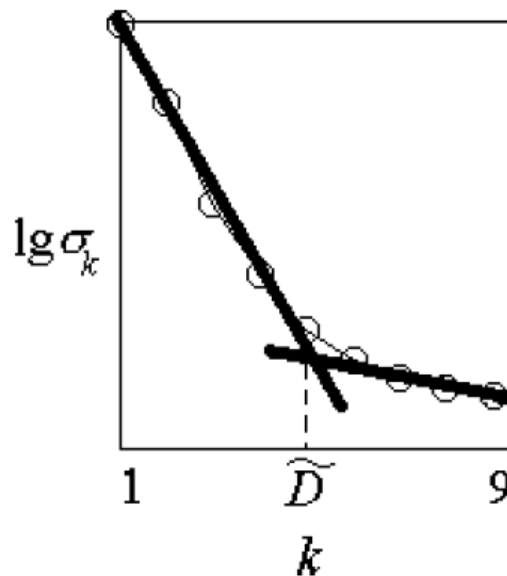
$$\Theta = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N_{train}-m+1} v_i v_i & \sum_{i=1}^{N_{train}-m+1} v_i v_{i+1} & \dots & \sum_{i=1}^{N_{train}-m+1} v_i v_{i+m-1} \\ \sum_{i=1}^{N_{train}-m+1} v_{i+1} v_i & \sum_{i=1}^{N_{train}-m+1} v_{i+1} v_{i+1} & \dots & \sum_{i=1}^{N_{train}-m+1} v_{i+1} v_{i+m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^{N_{train}-m+1} v_{i+m-1} v_i & \sum_{i=1}^{N_{train}-m+1} v_{i+m-1} v_{i+1} & \dots & \sum_{i=1}^{N_{train}-m+1} v_{i+m-1} v_{i+m-1} \end{pmatrix}. \quad (22)$$

3) Матрица  $\Theta$  (размерности  $m \times m$ ) — симметричная, вещественная, положительно определенная. Следовательно, ее собственные векторы образуют полный ортонормированный базис пространства  $\mathbb{R}^m$ , а ее собственные значения являются неотрицательными величинами. Обозначим  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_m^2$  — собственные значения  $\Theta$  (в порядке убывания),  $s_1, s_2, \dots, s_m$  — соответствующие собственные векторы:

$$s_i = \begin{pmatrix} \mu_{i1} \\ \mu_{i2} \\ \dots \\ \mu_{im} \end{pmatrix}. \quad (23)$$

При переходе к базису  $\{s_i\}$  матрица  $\Theta$  примет диагональный вид:

$$\Theta = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_m^2 \end{pmatrix}. \quad (24)$$



**Рис.6.** Возможный качественный характер зависимости значений собственных чисел матрицы ковариаций (расположенных в порядке убывания) от их номера. «Точка излома»  $D$  на графике служит оценкой размерности наблюдаемого движения.

Диагональные элементы матрицы  $\Theta$  в новом базисе — это средние квадраты проекций восстановленной фазовой траектории на координатные оси  $\{s_i\}$ . Они определяют протяженность траектории вдоль соответствующего направления. Ранг матрицы  $\Theta$  равен числу ненулевых собственных значений (для ситуации, представленной на рис.5, ненулевыми будут только  $\sigma$  и  $\sigma^2$ ) и равен размерности подпространства, в котором содержится траектория.

4) При наличии шума все  $C$  отличны от нуля, так как в направлениях, которые не “осваиваются” детерминированной составляющей траектории, представлена шумовая компонента. В этом случае размерность движения оценивают как число  $D$  существенных собственных значений матрицы  $\Theta$  (иллюстрацию для произвольного случая см. на рис.6). Проекции вектора  $w(t_i)$  на соответствующие направления называют его главными компонентами. Остальные собственные значения составляют так называемый “шумовой пьедестал”.

5) Задают размерность модели  $D$  (если нет других соображений, то можно, например, положить ее равной  $D$  — числу главных компонент). Производят переход от стандартного ортонормированного базиса пространства  $R^m$  к базису  $\{s_i\}$  (преобразование поворота, см. рис.5б,в) и ограничиваются только первыми  $D+1$  координатами. Получают новый векторный временной ряд  $\{z(t_i)\}$  из  $(D+1)$ -мерных векторов:

$$z_k(t_i) = \mathbf{w}(t_i) \mathbf{s}_k, k = 1, \dots, D + 1. \quad (25)$$

Описанная процедура позволяет получить более гладкую траекторию. Выражение (25) аналогично операции усреднения с некоторыми весами .

## 4.2 Вычисление нескольких производных наблюдаемой

Для вычисления всех  $D$  производных в момент времени  $t_i$  используют разложение наблюдаемой временной зависимости в ряд Тейлора (при условии достаточной малости выборочного интервала  $\Delta t$ ):

$$v(t_i + j\Delta t) = \sum_{k=0}^D \frac{(j\Delta t)^k}{k!} \frac{d^k v(t_i)}{dt^k}, \quad (26)$$

где отброшены члены порядка  $(j\Delta t)^{D+1}$  и выше (см. рис.7). Подставляя (26) в (25) с использованием (20) или (21), получают линейную связь между компонентами вектора  $z(t_i)$  и компонентами вектора  $x(t_i)$  (вектора последовательных производных наблюдаемой величины  $v$ ):

$$z_k(t_i) = \sum_{j=1}^{D+1} u_{kj} \frac{d^{j-1}v(t_i)}{dt^{j-1}}, \quad k=1, \dots, D+1, \quad (27)$$

где  $u_{kj}$  — элементы некоторой матрицы  $U$ , равные (при нечетном  $m$ )

$$u_{kj} = \sum_{l=1}^m \mu_{kl} \frac{((l-1-(m-1)/2)\Delta t)^{j-1}}{(j-1)!}. \quad (28)$$

Можно записать обратное к (28) соотношение, и таким образом перейти от ряда  $\{z(t_i)\}$  к ряду из векторов последовательных производных  $\{x(t_i)\}$ :

$$\mathbf{x}(t_i) = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{z}(t_i), \quad (29)$$

где  $\mathbf{U}^{-1}$  — матрица, обратная к  $U$ .

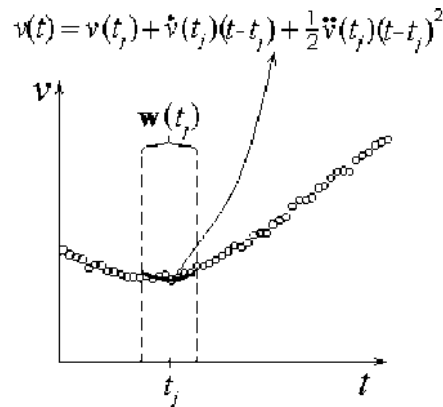


Рис.7. Иллюстрация к вычислению сразу двух производных наблюдаемой при наличии шума. Для расчета производных в момент времени  $t_j$  используется три главных компоненты вектора  $w(t_j)$ , а для восстановления этого вектора нужны  $m$  соседних значений величины  $v$  (в данном случае  $m = 9$ ).

Варьируя первоначальную размерность вложения  $m$ , тем самым меняют количество точек в окрестности  $t_i$ , используемых для вычисления производных, что позволяет существенно снизить влияние шумов.

Теперь построение модели сводится к вычислению коэффициентов функции  $F_D$  методом наименьших квадратов (подгонке). Для проверки эффективности модели используются критерии, изложенные в разделе 2.3.

## ВЫВОД

Во время выполнения научно-исследовательской работы были проведены исследования в области методов реконструкции обыкновенных дифференциальных уравнений по временным рядам.

Полученные мною знания в дальнейшем я бы хотела применить в дальнейших исследованиях моей дипломной работы.

## ПЕРЕЧЕНЬ ССЫЛОК

1. [http://www.neuroproject.ru/forecasting\\_tutorial.php#holt](http://www.neuroproject.ru/forecasting_tutorial.php#holt)
2. [http://www.aup.ru/books/m163/3\\_3\\_1.htm](http://www.aup.ru/books/m163/3_3_1.htm)
3. Курс лекций «Анализ временных рядов» физический факультет МГУ
4. Б.П. Безручко, Д.А. Смирнов «Реконструкция обыкновенных дифференциальных уравнений по временным рядам»