

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Вейвлеты и их использование

И.М. Дремин, О.В. Иванов, В.А. Нечитайло

*Цель этого обзора состоит в том, чтобы дать полезное пособие тем, кто собирается применять дискретное вейвлет-преобразование в практических расчетах. Введено понятие вейвлетов и кратко описано их использование в практических вычислениях и различных приложениях без строгих доказательств математических утверждений, ссылки на которые приведены в цитируемой литературе. Многомасштабный анализ и быстрое вейвлет-преобразование стали практически синонимом дискретного вейвлет-преобразования. Правильный выбор вейвлета и использование нестандартного матричного умножения оказываются зачастую весьма существенными для решения поставленной задачи. Анализ различных функций с помощью вейвлетов позволяет выявить фрактальные свойства, особенности функции и т.п. Вейвлет-преобразование операторных выражений помогает в решении некоторых уравнений. В практических приложениях приходится часто иметь дело с дискретными наборами чисел, и тогда возникает проблема устойчивости вейвлет-преобразования и соответствующих численных алгоритмов. После обсуждения всех этих вопросов мы переходим к практическим применениям вейвлет-анализа. Они столь многочисленны, что нам приходится ограничить себя несколькими примерами. Мы будем благодарны всем за конкретные предложения, которые позволили бы приблизиться к цели, сформулированной в первой фразе аннотации.*

PACS numbers: 02.60. – x, 02.70. – c, 05.40. – a, 87.57. – s \

Содержание

1. Введение (465).
2. Вейвлеты для начинающих (467).
3. Основные понятия и вейвлеты Хаара (469).
4. Многомасштабный анализ и вейвлеты Добеши (472).
5. Быстрое вейвлет-преобразование и койфлеты (475).
6. Выбор вейвлета (476).
7. Многомерные вейвлеты (478).
8. Преобразование Фурье и вейвлет-преобразование (479).
9. Вейвлеты и операторы (481).
10. Нестандартное матричное умножение (482).
11. Регулярность и дифференцируемость (483).
12. Дважды микролокальный анализ (484).
13. Вейвлеты и фракталы (487).
14. Дискретизация и устойчивость (488).
15. Некоторые применения (490).
  - 15.1. Физика. 15.2. Авиация (турбины). 15.3. Медицина и биология. 15.4. Сжатие данных. 15.5. Фокусировка микроскопа.
16. Заключение (498).
17. Приложение (499).

- 17.1. Многомасштабный анализ. 17.2. Операторы Калдерона – Зигмунда. 17.3. Связь с разложением Литтлвуда – Пали.
- Список литературы (500).

1. Введение

Вейвлеты стали необходимым математическим инструментом во многих исследованиях. Их используют в тех случаях, когда результат анализа некоего сигнала<sup>1</sup> должен содержать не только простое перечисление его характерных частот (масштабов), но и сведения об определенных локальных координатах, при которых эти частоты проявляют себя. Таким образом, анализ и обработка нестационарных (во времени) или неоднородных (в пространстве) сигналов разных типов представляют собой основное поле применений вейвлет-анализа. Общий принцип построения базиса вейвлет-преобразования состоит в использовании масштабного преобразования и смещений. Любой из наиболее часто применяемых вейвлетов порождает полную ортонормированную систему функций с конечным носителем,

И.М. Дремин, О.В. Иванов, В.А. Нечитайло. Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, 117924 Москва, Ленинский просп. 53, Российская Федерация  
Тел. (095) 132-29-29. Факс (095) 135-85-53  
E-mail: dremin@lpi.ru

Статья поступила 13 декабря 2000 г.

<sup>1</sup> Термин "сигнал" применяется нами для обозначения любого упорядоченного набора численно зафиксированной информации о каком-либо процессе, объекте, функции и т.п. Сигнал может быть функцией каких-либо переменных, будь то время, пространственные координаты или какие-то другие (вообще говоря, *n*-мерные) величины. Под "анализом" сигнала имеется в виду не только его чисто математическое преобразование (в частности, вейвлет-преобразование), но и получение на основе этого преобразования выводов о специфике соответствующего процесса или объекта.

построенных с использованием масштабного преобразования и сдвигов. Именно за счет изменения масштабов вейвлеты способны выявить различие в характеристиках на разных шкалах, а путем сдвига проанализировать свойства сигнала в разных точках на всем изучаемом интервале. В силу свойства полноты этой системы возможно сделать обратное преобразование. При анализе нестационарных сигналов за счет свойства локальности вейвлеты получают существенное преимущество перед преобразованием Фурье, которое дает нам только глобальные сведения о частотах (масштабах) исследуемого сигнала, поскольку используемая при этом система функций (синусы, косинусы или комплексные экспоненты) определена на бесконечном интервале<sup>2</sup>. Однако, как мы увидим в дальнейшем, используются и более общие определения вейвлетов и их разные модификации, допускающие применение довольно широкого класса функций. Согласно И. Мейеру [1], "вейвлет-базисы обладают универсальной применимостью: "все, что попадает под руку", будь то обычная или обобщенная функция, представимо в виде вейвлет-ряда, и, в отличие от ситуации с рядами Фурье, коэффициенты вейвлет-рядов передают свойства функции или распределения просто, точно и надежно".

Литература, посвященная вейвлетам, весьма обширна, и нетрудно получить огромное количество ссылок на нее, посплав соответствующий запрос в Интернет. Математические проблемы подробно рассмотрены во многих монографиях (см., например, [1–5]). Вводные курсы по вейвлетам читатель может найти в книгах [6–9]. Прекрасная обзорная статья, ориентированная на начинающих заниматься этим предметом и интересующихся его применением, с демонстрацией вейвлет-преобразований некоторых сигналов, была опубликована в этом журнале около четырех лет тому назад [10] и вызвала широкий интерес. Однако в ней были рассмотрены в основном лишь непрерывные вейвлет-преобразования, а дискретные упомянуты только вскользь<sup>3</sup>. Такой выбор был продиктован тем, что непрерывные вейвлеты допускают несколько более наглядное и зрелищное представление результатов анализа данного сигнала в виде локальных максимумов и скелетонных графиков вейвлет-коэффициентов при непрерывных переменных.

В то же время в основной своей массе статьи, касающиеся практического использования вейвлет-преобразования, содержат результаты расчетов, в которых применяются дискретные вейвлеты. Именно они и будут являться предметом этой статьи. Такое предпочтение, отдаваемое дискретным вейвлетам, связано с тем, что обычно используемые базисы на основе непрерывных вейвлетов не являются, строго говоря, ортонормированными, поскольку элементы базиса бесконечно дифференцируемы и экспоненциально спадают на бесконечности,

что противоречит строгой ортонормируемости. С дискретными вейвлетами этих проблем не возникает. В силу этого дискретные вейвлеты приводят обычно к более точному преобразованию и представлению сигнала и в особенности к его обратному восстановлению после процедуры сжатия. Более того, они лучше подходят для теории и практики передачи информации. Эти замечания отнюдь не означают, что мы настаиваем на использовании только дискретных вейвлетов для анализа сигналов. Наоборот, иногда непрерывные вейвлеты приводят к более ясному и аналитически представимым результатам при анализе сигналов, нежели дискретные вейвлеты.

Выбор конкретного вейвлета, будь то дискретный или непрерывный, зависит от данного анализируемого сигнала. Разные функции удается анализировать тем или иным способом, и критерием успеха обычно является простота получаемого разложения. Интуиция и практический опыт исследователя оказываются при этом решающим фактором. В качестве аналога зачастую приводится пример с использованием систем исчисления. Применение десятиричной либо двоичной системы, либо системы с натуральным логарифмом в качестве основания определяется удобством и традициями. Однако применение римских цифр, например, оказывается абсолютно исключенным, когда начинают иметь дело с умножением чисел. В то же время решение разных задач и их графическое представление может потребовать больших или меньших усилий в зависимости от правильности выбора соответствующей системы, и наша интуиция при этом играет важную роль.

Программы, в которых употребляются вейвлеты, находят широкое применение не только в научных разработках, но и в чисто коммерческих проектах. Некоторые из них уже описаны в книгах (см., например, [11]). В то же время прямой переход от чистой математики к компьютерным программам и практическим приложениям отнюдь не тривиален и зачастую требует как индивидуального подхода к изучаемой задаче, так и правильного выбора используемого вейвлета. Наша основная цель здесь состоит в том, чтобы описать подходящим способом тот "мост", который соединяет математическое конструирование вейвлетов и построение базисов вейвлет-преобразований с практической обработкой сигналов. Именно практические приложения, рассмотренные А. Гроссманом и Ж. Морле [12, 13], привели к быстрому прогрессу в теории вейвлетов, связанному с работами И. Мейера, И. Добеши и др.

Дискретные вейвлеты выглядят вначале несколько необычными для тех, кто привык иметь дело с аналитическими вычислениями, потому что они не могут быть записаны в аналитической форме (кроме простейшего из них) или же представлены в виде решений каких-то дифференциальных уравнений, а характеризуются набором численных коэффициентов в некоторых функциональных уравнениях, содержащих изменение масштаба и сдвиг аргументов. Более того, в практических вычислениях конкретная форма вейвлетов даже не выписывается, а используются только величины этих коэффициентов функциональных уравнений. Вейвлет-базис задается с помощью итерационного алгоритма с изменением масштаба и сдвигом единственной функции. Это приводит к исключительно важной процедуре многомасштабного анализа, который в свою очередь делает возможными быстрые численные расчеты локальных

<sup>2</sup> Сравнение вейвлет-преобразования с так называемым оконным (на конечном интервале) преобразованием Фурье будет обсуждено кратко в дальнейшем.

<sup>3</sup> В целях краткости изложения мы будем в дальнейшем употреблять термины "дискретные" и "непрерывные" вейвлеты, всегда подразумевая под этим "вейвлеты, служащие для проведения дискретных и непрерывных преобразований". Хотя "дискретные" вейвлеты могут обладать достаточно высокой степенью гладкости, это не приведет к неоднозначности, так как мы будем использовать словосочетание "непрерывные вейвлеты" только в указанном выше смысле.

характеристик на разных масштабах. Каждая шкала содержит независимую неперекрывающуюся информацию о сигнале в виде вейвлет-коэффициентов, которые легко вычисляются с помощью итерационной процедуры, известной под названием *быстрого вейвлет-преобразования*. В совокупности они решают проблему полного анализа сигнала и соответственно существенно упрощают *диагноз* вызвавшего его процесса.

После того как такой анализ проведен, можно, если необходимо, *сжать* полученные данные, отбросив некоторую несущественную часть *закодированной* информации. Это делается с помощью так называемой процедуры *квантования*, в процессе которой обычно приписываются разные весовые множители различным полученным вейвлет-коэффициентам. Это помогает, в частности, удалить некоторые статистические флуктуации и повысить роль динамических характеристик сигнала. В то же время это может привести к неправильному диагностированию, если сжатие информации проведено неаккуратно. Аккуратно проведенная процедура приводит обычно к существенному сокращению необходимой компьютерной *памяти* и требований к *передаче* информации, а значит, и к заметному уменьшению расходов. Число нулевых моментов у вейвлетов играет важную роль на этом этапе. К сожалению, при сжатии неизбежно появляются систематические ошибки. Получающиеся погрешности пропорциональны величине отброшенных вейвлет-коэффициентов, и потому становится особенно существенным знание нерегулярностей в поведении сигнала. Конечно, качество воспроизводства сигнала после процедуры сжатия уже не может быть идеальным. Ясно, что эти две цели являются антагонистическими. Тем не менее обратное преобразование (*синтез*) все еще остается достаточно устойчивым и воспроизводит наиболее важные характеристики начального исследуемого сигнала, если используются правильные методы. Свойства регулярности используемых вейвлетов становятся особенно существенными на этапе восстановления сигнала. Искажения в реконструированном сигнале, возникающие в результате квантования, можно сделать сравнительно небольшими даже при весьма заметном сжатии. Поскольку та часть сигнала, которая при этом не воспроизводится, часто является шумом, оказывается, что в результате такой операции мы избавляемся от шумовых помех. Именно на этом этапе преимущество дискретных вейвлетов проявляется особенно ярко.

Таким образом, задачи обработки сигналов состоят в точном преобразовании, эффективном сжатии, быстрой передаче и, наконец, аккуратном восстановлении начального сигнала в точке его назначения. Иногда для решения поставленной задачи и достижения цели достаточно только первого этапа преобразования сигнала с последующей интерпретацией полученных результатов (диагностикой).

Было доказано, что любую функцию можно представить в виде суперпозиции вейвлетов, и существует устойчивый численный алгоритм вычисления коэффициентов при таком разложении. Более того, эти коэффициенты полностью характеризуют функцию, и ее можно восстановить численно устойчивым способом непосредственно по этим коэффициентам. Из-за их уникальных свойств вейвлеты нашли применение в функциональном анализе в математике, при изучении (мульти)фрактальных характеристик, сингулярностей и

сильных локальных осцилляций функций, для решения некоторых дифференциальных уравнений, в распознавании образов, при сжатии изображений и звука, при цифровой обработке геометрических объектов, для решения многих задач в физике, биологии, медицине, технике и других областях (см. недавно опубликованные книги [11, 14–17]). Этот список, конечно, неполон.

Следует, однако, подчеркнуть, что несмотря на мощь этого метода цели вейвлет-анализа довольно скромные. Он помогает распознать и описать некоторые до толе скрытые характеристики сигнала, в частности, его симметрии, но не претендует на объяснение лежащей в их основе динамики и физической природы, хотя и может дать некоторые ценные указания в этом направлении. Вейвлеты предоставляют новые возможности в оптимизации такого описания, поскольку во многих случаях дают нам наилучшее из известных представление сигнала. С помощью вейвлетов мы просто начинаем видеть привычные вещи несколько отчетливее. Для описания же динамики при обычном подходе разрабатываются модели процесса, которые по своей идее должны содержать основные механизмы, приводящие к наблюдаемым эффектам. С целью выявления оптимальных алгоритмов вейвлет-преобразования были разработаны некоторые (все еще дебатлируемые) энергетические и энтропийные критерии. Они являются внутренними критериями по отношению к самим алгоритмам. Однако выбор наилучшего алгоритма обусловлен также объективно поставленной целью его практического применения, т.е. некоторыми внешними критериями. Именно поэтому при практическом использовании того или иного "теоретически идеального алгоритма" необходимо проверить его работоспособность, подвергнув его всесторонней оценке экспертов и пользователей для выяснения его преимуществ по сравнению с использовавшимися ранее методами.

Несмотря на очень активные исследования и полученные впечатляющие результаты разнообразие подходов при вейвлет-анализе наводит на мысль, что, возможно, эти исследования еще не вошли в завершающую стадию. Мы попытаемся описать ситуацию в ее *status nascendi*.

Основная часть этой обзорной статьи (разделы 2–14) посвящена описанию общих свойств вейвлетов и использованию вейвлет-преобразования в компьютерных расчетах. Некоторые применения к решению разнообразных задач приведены в разделе 15.

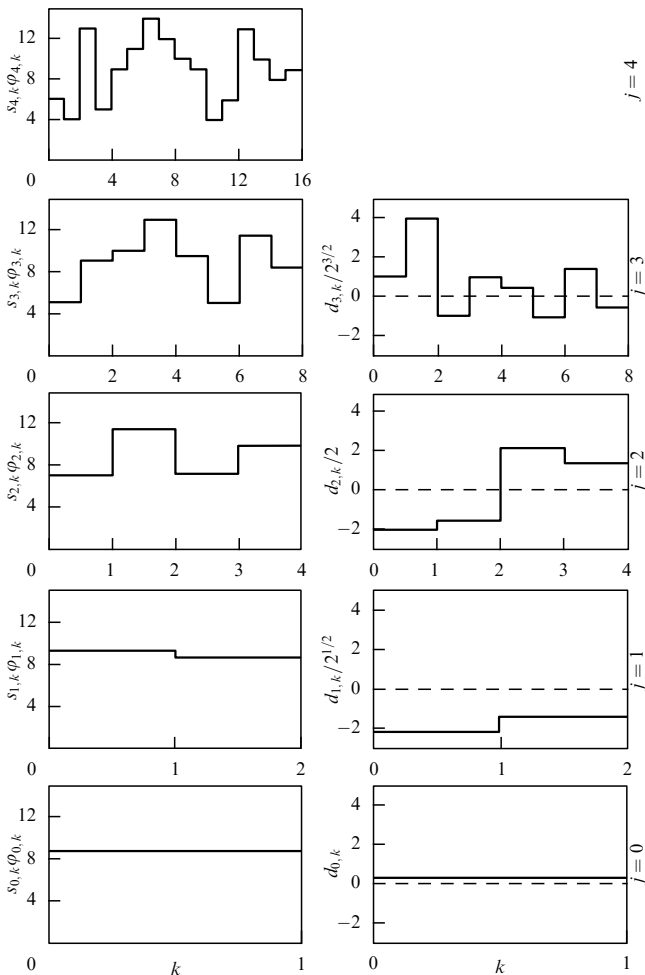
## 2. Вейвлеты для начинающих

Каждый сигнал можно охарактеризовать его средними (по некоторым интервалам) значениями (в англоязычной литературе при этом говорят о "тренде") и его изменениями вокруг тренда. Эти колебания вокруг усредненных значений мы будем называть *флуктуациями* независимо от причины их появления, будь они вызваны динамическими, стохастическими, психологическими, физиологическими или какими-то другими факторами. При обработке сигнала обычно интересуются величиной флуктуаций на разных масштабах, потому что по ним можно получить сведения о происхождении этих флуктуаций. Цель вейвлет-анализа как раз и состоит в том, чтобы предоставить средства для проведения такого исследования.

На самом деле физики, имеющие дело с экспериментальными гистограммами, анализируют полученные данные на разных масштабах, проводя усреднение по интервалам с разными размерами. Именно такой упрощенный конкретный пример вейвлет-анализа и рассматривается в этом разделе. Для определенности вообразим ситуацию, когда некоторый экспериментатор измеряет определенную зависимость  $f(x)$  на интервале  $0 \leq x \leq 1$ , и наилучшее разрешение по  $x$ , допустимое используемым им прибором, ограничено 1/16-й от всего интервала. Таким образом, полученный результат состоит из 16 чисел, представляющих усредненные значения  $f(x)$  в каждом из этих интервалов и может быть изображен в виде гистограммы с 16 отрезками, показанной в верхней части рис. 1. Она описывается следующей формулой:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{15} s_{4,k} \varphi_{4,k}(x), \tag{2.1}$$

где  $s_{4,k} = f(k/16)/4$  и  $\varphi_{4,k}$  определяется как "ступенька" с единичной нормой (т.е. высотой 4) и шириной 1/16,



**Рис. 1.** Гистограмма и ее вейвлет-разложение. Начальная гистограмма показана в верхней части рисунка. Она соответствует уровню  $j = 4$  с 16 интервалами (формула (2.1)). Следующий уровень  $j = 3$  показан ниже. Средние значения по двум соседним интервалам предыдущего уровня приведены слева. Они отвечают восьми членам первой суммы в формуле (2.4). Справа показаны вейвлет-коэффициенты  $d_{3,k}$ . Остальные рисунки для уровней  $j = 2, 1, 0$  получаются тем же способом.

отличная от нуля только на  $k$ -м отрезке. При произвольном  $j$  это условие записывается в виде  $\int |\varphi_{j,k}|^2 dx = 1$ , где интегрирование ведется по интервалам длины  $\Delta x_j = 1/2^j$ . Соответственно функции  $\varphi_{j,k}$  имеют вид  $\varphi_{j,k} = 2^{j/2} \varphi(2^j x - k)$ , где функция  $\varphi$  представляется "ступенькой" единичной высоты на таком интервале. Индекс  $j = 4$  связан с полным числом шагов в выбранном примере при последующей процедуре усреднения. На следующем уровне изучения поведения функции в интервалах длины 1/8 проводится усреднение по двум соседним интервалам начальной гистограммы, как это показано на гистограмме, приведенной на рис. 1 под начальной гистограммой. С точностью до нормировочного множителя полученные средние значения задаются коэффициентами  $s_{3,k}$ , а разность между этими уровнями, показанная справа от второй гистограммы, обозначается как  $d_{3,k}$ . В общем случае при произвольном  $j$  запишем нормированные суммы и разности в виде

$$s_{j-1,k} = \frac{1}{\sqrt{2}} [s_{j,2k} + s_{j,2k+1}], \quad d_{j-1,k} = \frac{1}{\sqrt{2}} [s_{j,2k} - s_{j,2k+1}], \tag{2.2}$$

или, для обратного преобразования (синтеза),

$$s_{j,2k} = \frac{1}{\sqrt{2}} (s_{j-1,k} + d_{j-1,k}), \quad s_{j,2k+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (s_{j-1,k} - d_{j-1,k}). \tag{2.3}$$

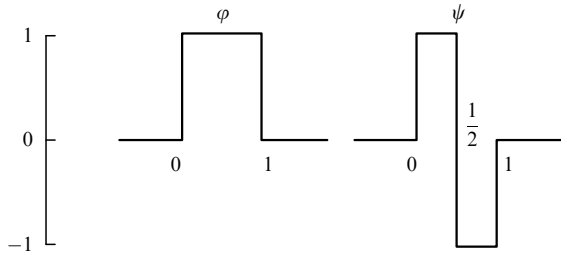
Поскольку при попарном разбиении интервалов эта нормированная разность имеет противоположные знаки в соседних интервалах начального уровня, введем функцию  $\psi$ , равную 1 и  $-1$  соответственно в этих интервалах, а также нормированные функции  $\psi_{j,k} = 2^{j/2} \psi(2^j x - k)$ . Это позволит записать ту же самую функцию  $f(x)$  в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^7 s_{3,k} \varphi_{3,k}(x) + \sum_{k=0}^7 d_{3,k} \psi_{3,k}(x). \tag{2.4}$$

Последовательно перейдем тем же способом к более "широким" уровням  $j = 2, 1, 0$ , проводя усреднения в интервалах длины 1/4, 1/2 и 1 соответственно, как это указано на рис. 1, где всюду справа приводятся соответствующие разности. На уровне с наибольшей шириной 1 имеется только одно среднее значение по всему интервалу, которое обозначается как  $s_{0,0}$ , и функция  $f(x)$  переписывается в виде

$$f(x) = s_{0,0} \varphi_{0,0}(x) + d_{0,0}(x) \psi_{0,0}(x) + \sum_{k=0}^1 d_{1,k} \psi_{1,k}(x) + \sum_{k=0}^3 d_{2,k} \psi_{2,k}(x) + \sum_{k=0}^7 d_{3,k} \psi_{3,k}(x). \tag{2.5}$$

Функции  $\varphi_{0,0}(x)$  и  $\psi_{0,0}(x)$  приведены на рис. 2. Функции  $\varphi_{j,k}(x)$  и  $\psi_{j,k}(x)$  описывают нормированные условием сохранения нормы, сжатые в  $2^j$  раз и смещенные по оси  $x$  модификации этих функций. В следующем разделе мы приведем явные формулы для них в этом частном случае, назвав их скейлинг-функциями (или масштабными функциями) и вейвлетами Хаара. При практическом анализе сигналов они (и их более сложные варианты) называются широкополосными и узкополосными фильтрами соответственно, потому что они отфильтровывают компоненты сигнала на больших и малых масштабах. Последующие слагаемые в уравнении (2.5) указывают на флуктуации (разности  $d_{j,k}$ ) во все



**Рис. 2.** Скайлинг-функция  $\varphi(x) \equiv \varphi_{0,0}(x)$  и "материнский вейвлет"  $\psi(x) \equiv \psi_{0,0}(x)$  Хаара.

более мелких интервалах с большими  $j$ . Во всех случаях (2.1)–(2.5) остается ровно 16 коэффициентов, описывающих одну и ту же функцию. В общем случае всего имеется  $2^j$  коэффициентов  $s_{j,k}$  и  $2^{j_n} - 2^j$  коэффициентов  $d_{j,k}$ , где  $j_n$  обозначает начальный уровень с наименьшими интервалами (в приведенном выше примере  $j_n = 4$ ).

Все эти записи функции  $f(x)$  (соотношения (2.1)–(2.5)) абсолютно эквивалентны математически. Однако последняя из них, представляющая результат вейвлет-преобразования изучаемой функции, напрямую вскрывает флуктуационную структуру сигнала на разных масштабах  $j$  и в разных точках  $k$ , содержащуюся в наборе коэффициентов  $d_{j,k}$ , тогда как начальная гистограмма (2.1) скрывает флуктуационную картину под большим фоном общего тренда. Окончательная формула (2.5) содержит общую среднюю величину сигнала по всему интервалу, представленную коэффициентом  $s_{0,0}$ , и все его флуктуации с четко указанным масштабом и положением каждой из них в 15 нормированных коэффициентах  $d_{j,k}$ , а начальная гистограмма указывает только на нормированные средние величины  $s_{j,k}$  в 16 изученных интервалах. Более того, при практическом использовании последнее вейвлет-представление предпочтительнее, так как для достаточно гладких функций, сильно меняющихся только при некоторых дискретных значениях их аргументов, многие из  $d$ -коэффициентов в соотношениях типа формулы (2.5) при большом разрешении  $j$  оказываются очень маленькими по сравнению с "информативными"  $d$ -коэффициентами и ими можно пренебречь, что упрощает расчеты и хранение информации. Полосы нулей (или близких к нулю значений коэффициентов) указывают те области, где функция достаточно гладкая.

На первый взгляд этот упрощенный пример кажется довольно тривиальным. Однако для более сложных функций при большом числе измеренных значений с использованием некоторых более сложных вейвлетов такая процедура приводит к детальному анализу сигнала с возможностью впоследствии сжать полученную информацию, а затем и воспроизвести сигнал с хорошей точностью. Этот пример служит также хорошей иллюстрацией подхода с рассмотрением последовательных приближений к  $f$  на разных масштабах, носящего название *многомасштабного анализа* и обсуждаемого подробнее в дальнейшем.

### 3. Основные понятия и вейвлеты Хаара

При анализе любого сигнала надо прежде всего выбрать соответствующий базис, т.е. систему функций, которые будут играть роль "функциональных координат". В

большинстве случаев нам приходится иметь дело с сигналами, которые представлены квадратично-интегрируемыми функциями, определенными на вещественной оси (или квадратично-суммируемыми последовательностями комплексных чисел). Они образуют бесконечномерное гильбертово пространство  $L^2(R)$  ( $l^2(Z)$ ). Для них определено скалярное произведение в виде

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \bar{g}(x) dx, \tag{3.1}$$

где черта сверху обозначает операцию комплексного сопряжения. Гильбертово пространство всегда имеет ортонормальные базисы, т.е. семейства векторов (или функций)  $e_n$  таких, что

$$\langle e_n, e_m \rangle = \delta_{nm}, \tag{3.2}$$

$$\|f\|^2 = \int |f(x)|^2 dx = \sum_n |\langle f, e_n \rangle|^2. \tag{3.3}$$

В гильбертовом пространстве существуют и более общие семейства линейно независимых базисных векторов, носящие название базиса Рисса (Riesz), для которых условие (3.3) обобщается на два неравенства

$$\alpha \|f\|^2 \leq \sum_n |\langle f, e_n \rangle|^2 \leq \beta \|f\|^2 \tag{3.4}$$

с  $\alpha > 0$ ,  $\beta < \infty$ . Это безусловные базисы в том смысле, что для них порядок размещения векторов не играет никакой роли. Любой ограниченный оператор, у которого его обратный оператор также ограничен, преобразует ортонормальный базис в общем случае в базис Рисса.

Кроме того, иногда мы будем рассматривать и пространства  $L^p(R)$  ( $1 \leq p < \infty$ ;  $p \neq 2$ ), у которых норма определена как

$$\|f\|_{L^p} = \left[ \int |f(x)|^p dx \right]^{1/p}, \tag{3.5}$$

а также и некоторые другие банаховы пространства<sup>4</sup> (см. разделы 11, 12).

Преобразование Фурье с его бесконечно протяженным тригонометрическим базисом хорошо подходит для анализа стационарных сигналов. При этом норму  $\|f\|$  часто называют энергией. Для нестационарных сигналов оказывается, например, важным определить момент времени, когда та или иная частотная характеристика внезапно изменилась. Поэтому базисные функции должны иметь конечную область определения. Как раз такими функциями и являются вейвлеты. С их помощью можно покрыть все пространство, используя смещение по-разному сжатых вариантов одной-единственной функции. Именно благодаря этому можно каждый

<sup>4</sup> Это линейные пространства, у которых норма определена, но не выводится непосредственно из скалярного произведения. Они обладают свойством полноты по отношению к норме (пространства  $L^p(R)$  ( $1 \leq p < \infty$ ;  $p \neq 2$ ) являются, в частности, представителями таких пространств).

сигнал разложить в вейвлет-ряд (или интеграл). При этом каждая частотная компонента изучается с разрешением, отвечающим исследуемому масштабу. Описанная выше процедура нормировки функций  $\varphi_{j,k}$  непосредственно связана с требованием сохранения нормы сигнала при разных формах его разложения.

Однако выбор анализирующего вейвлета не определен заранее. Его следует выбирать в соответствии с решаемой проблемой. Простота оперирования с вейвлетом (в частности, численных расчетов) и представления результатов (минимизация используемых параметров) играет важную роль. Неудачный выбор конкретной формы вейвлета может даже привести к невозможности решения задачи, как это было продемонстрировано в указанном выше примере с римскими цифрами. Имеется несколько методов оценки того, насколько хорошо выбранная функция подходит для решения данной проблемы (см. раздел 6).

Теперь же давайте попытаемся построить функции, удовлетворяющие выдвинутым выше критериям. "Интеллектуальная догадка" подскажет нам, что хорошо было бы связать эту функцию  $\varphi(x)$  с ее же сдвинутыми и сжатыми модификациями. Простейшее линейное соотношение с числом коэффициентов  $2M$  можно записать в виде

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2M-1} h_k \varphi(2x - k) \quad (3.6)$$

с двоичным изменением масштаба (фактор 2) и целочисленными трансляциями  $k$ . На первый взгляд выбранная нормировка коэффициентов  $h_k$  с выделением множителя  $\sqrt{2}$  выглядит весьма произвольной. В действительности же она определяется *a posteriori* традиционной формой быстрых алгоритмов для их вычисления (см. ниже уравнения (5.2) и (5.3)), а также нормировкой функций  $\varphi_{j,k}(x), \psi_{j,k}(x)$ . Она используется во всех упомянутых выше монографиях. Однако иногда (см. [2, гл. 7]) она заменяется на  $c_k = \sqrt{2}h_k$ .

При дискретных значениях параметров сжатия и сдвига получаем дискретные вейвлеты. Величина масштабирующего множителя определяет размер ячеек выбранной решетки. Целое число  $M$  определяет число коэффициентов  $h_k$  и длину области задания вейвлета. Они взаимосвязаны, потому что из определения  $h_k$  для ортонормальных базисов

$$h_k = \sqrt{2} \int \varphi(x) \bar{\varphi}(2x - k) dx \quad (3.7)$$

следует, что только конечное число коэффициентов  $h_k$  отличны от нуля, если  $\varphi$  заданы на конечном интервале. Условие нормировки задается в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1. \quad (3.8)$$

Функция  $\varphi(x)$ , получаемая из решения уравнения (3.6), называется *скейлинг-функцией* или *масштабной функцией*<sup>5</sup>. Если она уже известна, то можно построить

базисный вейвлет (или "материнский вейвлет")  $\psi(x)$  по формуле

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2M-1} g_k \varphi(2x - k), \quad (3.9)$$

где

$$g_k = (-1)^k h_{2M-k-1}. \quad (3.10)$$

Простейший пример, естественно, получается при  $M = 1$  с двумя отличными от нуля коэффициентами  $h_k$ , равными  $1/\sqrt{2}$ , т.е. при уравнении, приводящем к скейлинг-функции Хаара  $\varphi_H(x)$ :

$$\varphi_H(x) = \varphi_H(2x) + \varphi_H(2x - 1). \quad (3.11)$$

Решением этого функционального уравнения является функция

$$\varphi_H(x) = \theta(x) \theta(1 - x), \quad (3.12)$$

где  $\theta(x)$  обозначает функцию Хевисайда, равную 1 при положительных значениях аргумента и 0 при отрицательных. Условия на границах имеют вид  $\varphi_H(0) = 1, \varphi_H(1) = 0$ . Эти условия оказываются важными для упрощения численных расчетов вейвлет-коэффициентов, когда рассматриваются два соседних интервала.

"Материнский вейвлет" выглядит как

$$\psi_H(x) = \theta(x) \theta(1 - 2x) - \theta(2x - 1) \theta(1 - x) \quad (3.13)$$

с условиями на границах  $\psi_H(0) = 1, \psi_H(1/2) = -1, \psi_H(1) = 0$ . Это и есть *вейвлет Хаара* [18], известный с 1910 г. и широко использовавшийся в функциональном анализе. Именно этот пример и был рассмотрен в предыдущем разделе при разложении гистограмм. Скейлинг-функция  $\varphi_H(x)$  и "материнский вейвлет"  $\psi_H(x)$  показаны на рис. 2. Это — первые вейвлеты из семейства вейвлетов с конечным носителем  $M\psi = {}_1\psi$ . Вейвлет обладает свойством локальности, так как его область задания ограничена, поскольку  $2M - 1 = 1$ .

Масштабированные и смещенные версии скейлинг-функции  $\varphi$  и "материнского вейвлета"  $\psi$  выглядят как

$$\varphi_{j,k} = 2^{j/2} \varphi(2^j x - k), \quad (3.14)$$

$$\psi_{j,k} = 2^{j/2} \psi(2^j x - k). \quad (3.15)$$

Они образуют ортонормальный базис, как это можно (и нетрудно в случае вейвлетов Хаара) проверить<sup>6</sup>. Выбор в качестве масштабирующего множителя  $2^j$  с целочисленными значениями  $j$  приводит к однозначной и самосогласованной процедуре вычисления вейвлет-коэффициентов. В принципе существует алгоритм получения вейвлетов с конечным носителем для произвольного рационального числа вместо 2. Однако только для этого множителя удалось показать, что имеется такой алгоритм, при котором гладкость вейвлета линейно растет с ростом его носителя. Например, при множе-

<sup>5</sup> Очень часто ее называют также "отцовским вейвлетом", но мы не будем пользоваться этим термином.

<sup>6</sup> Мы опять перешли к общему случаю и потому опустили индекс  $H$ , поскольку те же формулы будут использоваться и для других вейвлетов.

ле 3 эта гладкость возрастает лишь логарифмически с ростом области задания. По-видимому, фактор 2 здесь выделен так же, как в музыке, где октавы играют определяющую роль. Если масштабный множитель равен 2, то фурье-образ "материнского вейвлета" сосредоточен в основном на интервале от  $\pi$  до  $2\pi$ . Однако в некоторых практических приложениях бывает необходимо получить лучшую локализацию по частоте, и потому полезно иметь вейвлет-базисы с более узкой частотной полосой. Одним из решений этой проблемы является использование вейвлетов с дробными масштабными множителями, но существуют и другие возможности.

Как и всякий вейвлет, вейвлет Хаара знакопеременен, так что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0. \tag{3.16}$$

Это условие является общим для всех вейвлетов. Оно называется *условием осцилляций* или *знакопеременности*. Из него становится понятным выбор названия "вейвлет", переводимого на русский язык как "маленькая волна". Вейвлет можно представить себе как некоторую функцию, осциллирующую в ограниченном интервале подобно волне и затухающую вне него. Это — абсолютно необходимое условие для построения безусловного устойчивого базиса. Мы приходим к заключению, что при специальном выборе коэффициентов  $h_k$  получаются "материнские вейвлеты" конкретного вида, образующие ортонормальный базис.

Любую функцию  $f$  из  $L^2(R)$  можно разложить на некотором заданном уровне разрешения  $j_n$  в ряд вида

$$f = \sum_k s_{j_n, k} \varphi_{j_n, k} + \sum_{j \geq j_n, k} d_{j, k} \psi_{j, k}. \tag{3.17}$$

На самом детальном уровне  $j_n = j_{\max}$  остаются только  $s$ -коэффициенты и получается так называемое представление скейлинг-функцией

$$f(x) = \sum_k s_{j_{\max}, k} \varphi_{j_{\max}, k}. \tag{3.18}$$

В случае вейвлетов Хаара оно в точности совпадает с изначальной экспериментальной гистограммой при наилучшем доступном разрешении. Поскольку мы заинтересованы в анализе этой гистограммы на разных уровнях разрешения, такое представление используется только в качестве начального условия. Конечное представление тех же самых данных в виде (3.17) выявляет все флуктуации, имеющиеся в сигнале. Вейвлет-коэффициенты  $s_{j, k}$  и  $d_{j, k}$  можно вычислить по формулам

$$s_{j, k} = \int f(x) \varphi_{j, k}(x) dx, \tag{3.19}$$

$$d_{j, k} = \int f(x) \psi_{j, k}(x) dx. \tag{3.20}$$

Однако при этом компьютерные расчеты занимают довольно длительное время, и потому на практике их значения находятся с помощью быстрого вейвлет-преобразования, обсуждаемого ниже.

Со ссылкой на конкретный частный случай вейвлетов Хаара эти коэффициенты зачастую называют суммами ( $s$ ) и разностями ( $d$ ), связывая со средними значениями и флуктуациями соответственно.

Физики, знакомые с экспериментальными гистограммами, легко признают здесь обобщение того частного примера, который был рассмотрен в предыдущем разделе. Первая сумма в (3.17) со скейлинг-функциями  $\varphi_{j, k}$  содержит средние<sup>7</sup> значения  $f$  по диадным интервалам  $[k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$ . Второй член содержит все флуктуации  $f$  на данном интервале. Эти флуктуации проистекают из всех меньших интервалов, заключенных внутри данного и соответствующих большим значениям параметра масштабирования  $j$ . Можно сказать, что этот член как бы "фокусирует" наше внимание на все более тонких деталях изучаемого сигнала. Это последовательное изучение свойств сигнала происходит через равные промежутки, как следует из постоянства масштабирующего множителя, причем детали размером  $2^{-j}$  располагаются в точках  $k2^{-j}$ . На низшем уровне разрешения  $j_0$  (наиболее широких интервалах) первая сумма содержит всего один член, дающий общее усредненное взвешенное значение сигнала  $\langle f \rangle = s_{j_0, k_0}$ , где  $k_0$  обозначает центр гистограммы. Вторая сумма в (3.17) показывает флуктуации на всех без исключения уровнях. На следующем уровне с более мелким разбиением  $j_1 > j_0$  в первой сумме содержатся два члена, отвечающих за средние значения  $f$  в полуинтервалах с центрами, расположенными в  $k_1, k_2$ . Число членов во второй сумме уменьшается на единицу — исчезает член, который раньше показывал величину флуктуаций на половинном масштабе. Общее число членов в разложении остается неизменным. Здесь же мы только вкратце упомянем, что согласно формуле (3.17) число членов в каждой сумме зависит от выбранного уровня разрешения. Меняя на единицу этот уровень, мы передвигаем некоторые члены в другую сумму, причем каждое из этих представлений является "истинным" представлением исходной гистограммы на разных уровнях разрешения.

Формально эту процедуру можно провести и в обратном направлении, переходя ко все более широким интервалам усреднения, т.е. к уровням разрешения  $j < j_0$ . Даже если мы "исчерпали" всю область задания  $f$ , можно пытаться продолжить этот "трюк" с усреднением. Тогда среднее значение уменьшается, и в  $L^2$ -смысле можно пренебречь первой суммой в формуле (3.17), потому что ее  $L^2$ -норма (3.3) стремится к нулю. В примере с гистограммой оно падает как  $|\langle f \rangle| \propto N^{-1}$  и  $|\langle f \rangle|^2 \propto N^{-2}$ , тогда как область интегрирования пропорциональна  $N$ , т.е.

$$||\langle f \rangle||^2 \propto N^{-1} \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty.$$

Вот почему зачастую рассматривается только вторая сумма в (3.17) и результат называют вейвлет-разложением  $f$ . Это справедливо также и для функций  $f$  из пространств  $L^p(R)$  с  $1 < p < \infty$ , но неприменимо к функциям из  $L^1(R)$  или  $L^\infty(R)$ . Например, если  $f \equiv 1$ , то все вейвлет-коэффициенты  $d_{j, k}$  равны нулю, и остается только первая сумма. На языке гистограмм отбрасывание этой суммы означает, что нас интересует не среднее значение, а только форма функции, задаваемая ее флуктуациями вокруг этого среднего на всевозможных уровнях разрешения. Любую функцию можно аппроксимировать с точностью  $2^{j/2}$  (т.е. с произвольно высокой точностью при  $j \rightarrow -\infty$ ) конечной линейной комбинацией вейвлетов Хаара.

<sup>7</sup> Усреднение проводится с весовыми функциями  $\varphi_{j, k}(x)$ .

Вейвлеты Хаара хорошо подходят также и для изучения функций, принадлежащих к пространствам  $L^p$ , т.е. обладающих достаточно высокими моментами.

Хотя вейвлеты Хаара служат хорошим "обучающим примером" ортонормальных базисов, у них имеется слишком много недостатков, которые мешают их широкому применению. Одним из них являются плохие аналитические свойства с резким перепадом на границах интервалов, т.е. их плохая гладкость. При этом все моменты конечного ранга для вейвлетов Хаара отличны от нуля и только нулевой момент, т.е. интеграл (3.16) от самого вейвлета, обращается в нуль. Это означает, что они не ортогональны никаким полиномам, кроме тривиальной константы. Вейвлеты Хаара не обладают достаточно хорошей локализацией по частоте. Их фурье-образ падает всего лишь как  $|\omega|^{-1}$  при  $\omega \rightarrow \infty$ .

Желательно построить вейвлеты, обладающие лучшей регулярностью. По сравнению с вейвлетами Хаара они приводили бы к меньшему числу заметно отличных от нуля вейвлет-коэффициентов, которые надо было бы учитывать, и были бы применимы в большем числе функциональных пространств, а не только в  $L^2$ . Первый из этих результатов следует из того факта, что вейвлет-коэффициенты существенно отличны от нуля лишь вблизи сингулярностей  $f$  (сильные флуктуации). Поэтому вейвлет-ряды обычных гладких функций очень "разрежены", в отличие от рядов Фурье, которые довольно плотные для достаточно регулярных функций. Последнее свойство позволяет нам детально исследовать локальные и глобальные особенности изучаемых функций. Путь к реализации этой программы был открыт с развитием многомасштабного анализа.

#### 4. Многомасштабный анализ и вейвлеты Добеши

Соотношение (3.17) означает, что произвольная функция  $f$  может быть аппроксимирована набором очень простых функций  $\varphi_{j,k}, \psi_{j,k}$ . Рассмотренный выше пример показал, что функции Хаара локальны и полностью покрывают пространство  $L^2(\mathbb{R})$  за счет смещений  $k$ . Они ортогональны на разных уровнях  $j$ . Переход от  $j$  к  $j+1$  эквивалентен замене  $x$  на  $2x$ , т.е. перемасштабированию, приводящему к анализу на разных уровнях разрешения.

Однако вейвлеты Хаара оказались чересчур упрощенными и потому недостаточно гладкими. Наша цель заключается в том, чтобы найти общий класс таких функций, которые удовлетворяли бы требованиям локальности, регулярности и знакопеременности (с не всегда обязательным свойством ортонормальности). Они должны быть достаточно простыми в том смысле, что представляемы простыми алгоритмами и довольно регулярны для того, чтобы они полностью определялись их значениями на решетке с шагом, определенным множителем  $2^j$ .

Общий подход, учитывающий эти требования, известен под названием *многомасштабного (multiresolution) анализа*. Он определен более строго математически в разделе 17.1. Здесь же мы вкратце опишем только основные идеи.

Многомасштабный анализ проводится с помощью набора последовательных аппроксимирующих пространств  $V_j$ , которые представляют собой отмасштабированные и инвариантные относительно смещений на

целые числа разновидности одного центрального функционального пространства  $V_0$ . Для иллюстрации этого положения на простом примере мы показываем на рис. 3, как выглядели бы проекции некоторой функции на пространства Хаара  $V_0, V_1$ . В них легко распознать гистограммное приближение к этой функции. Сопоставление гистограмм на этих двух уровнях показывает, что первая сумма в соотношении (3.17) приводит к "размытому изображению", или к "сглаженным средним" функции  $f(x)$  на каждом интервале, тогда как вторая сумма в этом соотношении добавляет все более подробные детали на все меньших интервалах. При этом общее распределение разлагается на последовательность правильно расположенных флуктуаций с формой, соответствующей выбранным вейвлетам.

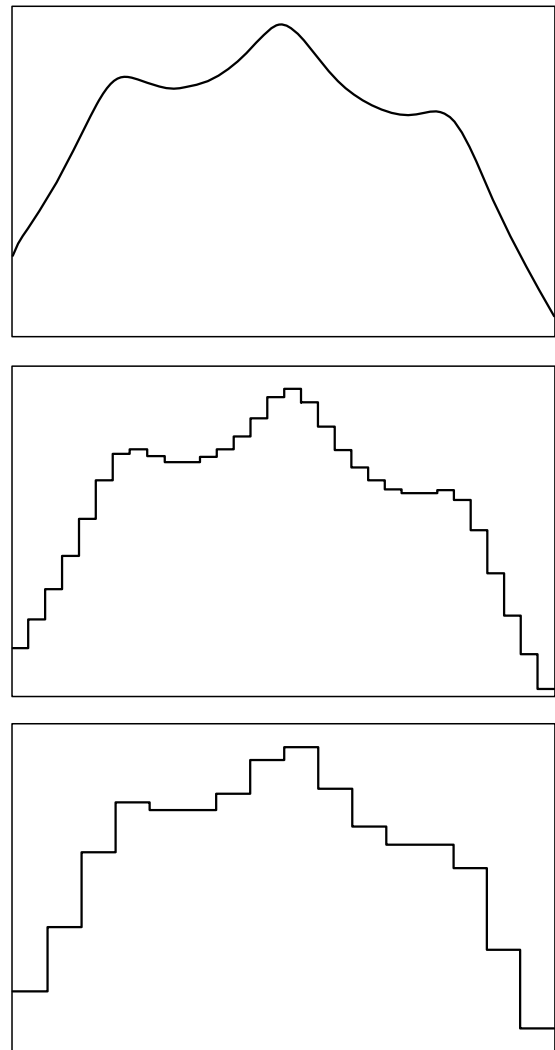
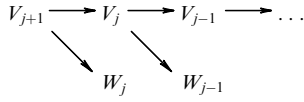


Рис. 3. Анализируемая функция (вверху) и ее хааровские проекции на два последовательных пространства Хаара,  $V_0$  и  $V_1$ .

Функции  $\varphi_{j,k}$  образуют ортонормальный базис  $V_j$ . Ортогональное дополнение  $V_j$  в  $V_{j+1}$  называется  $W_j$ . Подпространства  $W_j$  образуют взаимно ортогональный набор. Последовательность  $\psi_{j,k}$  формирует ортонормальный базис  $W_j$  при любом заданном  $j$ . Полный набор функций  $\psi_{j,k}$  и  $\varphi_{j,k}$  при всех  $j$  образует ортонормальный базис  $L^2(\mathbb{R})$ . Все это убеждает нас в том, что



разработан подход с многомасштабным анализом и функции  $\psi_{j,k}$  и  $\varphi_{j,k}$  служат высокочастотными и низкочастотными фильтрами соответственно. Графически всю процедуру можно было бы представить так, как это изображено на рис. 4.



**Рис. 4.** Графическое представление многомасштабного анализа с разложением пространства  $V_{j+1}$  на его подпространство  $V_j$  и ортогональное дополнение  $W_j$  с итерацией на более низкие уровни.

В согласии с поставленной выше целью можно дать определение понятия вейвлетов (см. раздел 17.1) таким образом, что функции  $2^{j/2}\psi(2^jx - k)$  являются вейвлетами, порожденными одним "материнским вейвлетом"  $\psi$  (основным вейвлетом), обладающим свойствами, ответственными за регулярность, локальность и знакопеременность.

На первый взгляд, из нашего примера с вейвлетами Хаара можно сделать вывод, что коэффициенты  $h_k$  можно выбирать по собственному желанию. Это впечатление, однако, полностью ошибочно. Общие свойства скейлинг-функций и вейвлетов однозначно определяют эти коэффициенты в рамках многомасштабного анализа.

Покажем, как эта программа многомасштабного анализа работает на практике при ее использовании для определения коэффициентов любого фильтра  $h_k$  и  $g_k$ . Их можно вычислить непосредственно, зная определения и свойства дискретных вейвлетов. Напомним определение этих коэффициентов (3.6) и (3.9):

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_k h_k \varphi(2x - k), \quad \psi(x) = \sqrt{2} \sum_k g_k \varphi(2x - k), \tag{4.1}$$

где  $\sum_k |h_k|^2 < \infty$ . Из свойства ортогональности масштабных функций

$$\int \varphi(x) \varphi(x - m) dx = \delta_{0m} \tag{4.2}$$

получаем следующее уравнение на коэффициенты:

$$\sum_k h_k h_{k+2m} = \delta_{0m}. \tag{4.3}$$

Ортогональность вейвлетов масштабным функциям

$$\int \psi(x) \varphi(x - m) dx = 0 \tag{4.4}$$

дает уравнение

$$\sum_k h_k g_{k+2m} = 0, \tag{4.5}$$

решением которого является следующее выражение:

$$g_k = (-1)^k h_{2M-1-k}. \tag{4.6}$$

Таким образом, коэффициенты  $g_k$  для вейвлетов однозначно определяются коэффициентами  $h_k$  для скейлинг-функции.

Условие ортогональности вейвлета полиномам до степени  $M - 1$ , определяющее его гладкость и знакопеременность,

$$\int x^n \psi(x) dx = 0, \quad n = 0, \dots, M - 1, \tag{4.7}$$

сводится к соотношению

$$\sum_k k^n g_k = 0, \tag{4.8}$$

или, с учетом (4.6), к

$$\sum_k (-1)^k k^n h_k = 0. \tag{4.9}$$

Условие нормировки

$$\int \varphi(x) dx = 1 \tag{4.10}$$

дает еще одно уравнение на  $h_k$ :

$$\sum_k h_k = \sqrt{2}. \tag{4.11}$$

Выпишем теперь уравнения (4.3), (4.9), (4.11) для  $M = 2$  в явном виде:

$$\begin{aligned} h_0 h_2 + h_1 h_3 &= 0, \\ h_0 - h_1 + h_2 - h_3 &= 0, \\ -h_1 + 2h_2 - 3h_3 &= 0, \\ h_0 + h_1 + h_2 + h_3 &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Решением этой системы будет

$$\begin{aligned} h_3 &= \frac{1}{4\sqrt{2}} (1 \pm \sqrt{3}), \quad h_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} + h_3, \\ h_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} - h_3, \quad h_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}} - h_3, \end{aligned} \tag{4.12}$$

что в случае знака минус приводит к хорошо известному фильтру

$$\begin{aligned} h_0 &= \frac{1}{4\sqrt{2}} (1 + \sqrt{3}), \quad h_1 = \frac{1}{4\sqrt{2}} (3 + \sqrt{3}), \\ h_2 &= \frac{1}{4\sqrt{2}} (3 - \sqrt{3}), \quad h_3 = \frac{1}{4\sqrt{2}} (1 - \sqrt{3}). \end{aligned} \tag{4.13}$$

Эти коэффициенты определяют простейший вейвлет  $D^4$  (или  ${}_2\psi$ ) из известного семейства ортонормальных вейвлетов Добеши с конечным носителем. Он показан в верхней части рис. 5 штриховой линией, а соответствующая скейлинг-функция — сплошной линией. Некоторые вейвлеты высшего порядка также приведены на этом рисунке. Из него отчетливо видно, что вейвлеты (особенно  $D^4$ ) оказываются более гладкими в одних точках по сравнению с другими. Выбор знака плюс в выражении для  $h_3$  не изменит общего вида скейлинг-функции и вейвлета  $D^4$ , а только перенумерует коэффициенты. В результате получатся функции, отличающиеся от первоначальных тем, как если бы были изменены на противоположные знаки по горизонтальной и вертикальной

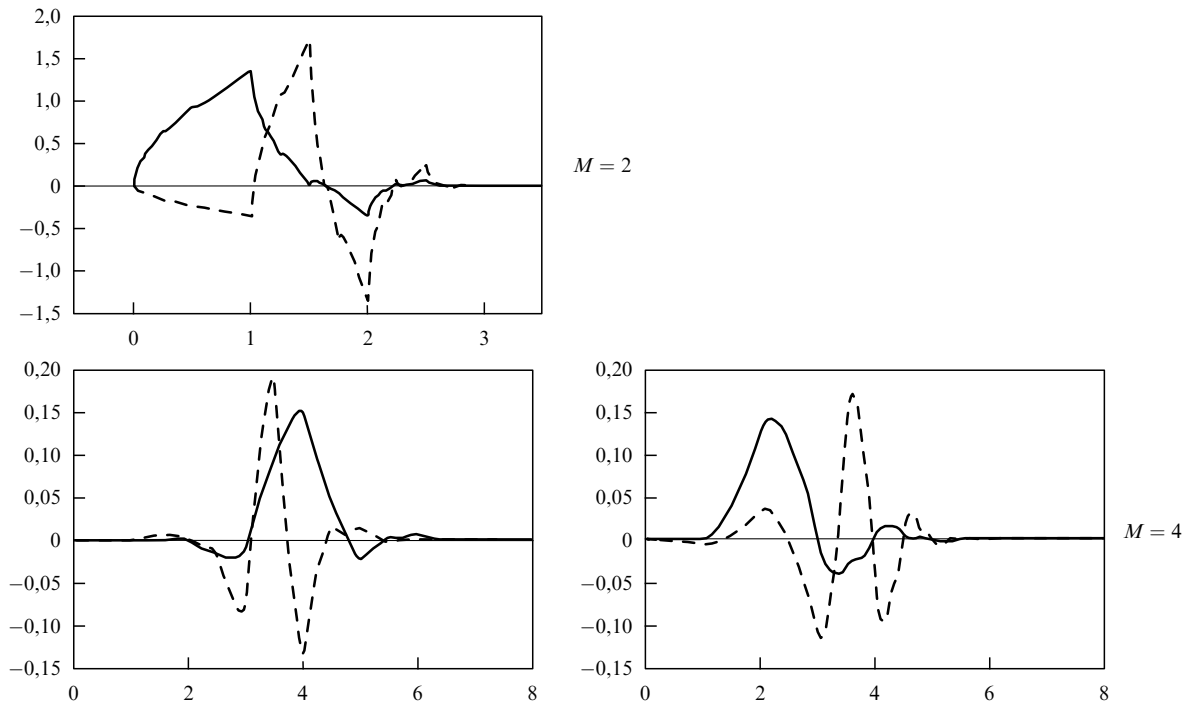


Рис. 5. Скейлинг-функции (сплошные линии) и вейвлеты Добеши (штриховые линии) при  $M = 2, 4$ .

осям соответственно. Однако для вейвлетов более высокого порядка выбор того или иного знака уже сказывается на их форме. Набор всех возможностей задает полную систему вейвлетов данного порядка. Приведенный пример показывает, что вейвлеты с компактным носителем определяются однозначно для данного многомасштабного анализа с точностью до сдвига аргумента (смещения), который и так уже содержится в них. Масштабный множитель должен быть числом рациональным в рамках многомасштабного анализа. Заметим, что  $2\varphi$  непрерывен по Гельдеру с глобальным показателем  $\alpha = 0,55$  (см. условие (11.1) ниже) и имеет разные локальные показатели Гельдера на определенных фрактальных множествах. Обычно вейвлеты более регулярны на одних наборах точек и менее — на других.

Коэффициенты для фильтров более высокого порядка по  $M$ , т.е. для вейвлетов Добеши более высокого порядка, могут быть получены аналогично. Однако из-за необходимости решать уравнение  $M$ -й степени в общем случае для них можно выписать лишь численные значения, хотя и с любой заданной точностью. Область задания вейвлета равна  $2M - 1$ . Она шире, чем у вейвлетов Хаара. Однако и регулярность этих вейвлетов выше. Вейвлеты более высокого порядка более гладкие по сравнению с  $D^4$ , как это видно на рис. 5. Вейвлеты Добеши с  $M$  нулевыми моментами имеют  $\mu M$  непрерывных производных, где при больших  $M$  имеем  $\mu \approx 0,2$ , как было выяснено с помощью численных расчетов<sup>8</sup>. Это значит, что около 70–80 % нулевых моментов "уходит

впустую". По мере роста гладкости вейвлета обычно увеличивается и размер его области определения. Для достаточно гладких функций вейвлет-коэффициенты Добеши намного меньше (в  $2^{Mj}$  раз) вейвлет-коэффициентов Хаара, т.е. сигнал можно сжать намного сильнее при помощи вейвлетов Добеши. Поскольку эти вейвлеты и заметно более гладкие, обратное преобразование (синтез) также проходит эффективнее.

Можно задать вопрос: что важнее — свойство гладкости или число зануляющихся моментов? Ответ зависит от конкретного использования вейвлета и не всегда ясен. Вероятно, число нулевых моментов более важно для достижения более сильного сжатия сигнала (изображения), которое увеличивается при большом числе нулевых моментов, тогда как гладкость вейвлета становится важнее при обратном преобразовании (синтезе), когда необходимо сгладить ошибки, вызванные сжатием (отбрасыванием малых вейвлет-коэффициентов).

В принципе, решая функциональное уравнение (3.6), можно найти явный вид скейлинг-функции и с учетом соотношения (3.9) определить вид "материнского вейвлета". Для компактно заданных вейвлетов  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  не удастся написать замкнутые аналитические выражения (за исключением вейвлетов Хаара). Тем не менее можно построить графики  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  в случае, если они непрерывны, с любой наперед заданной точностью, используя каскадный алгоритм с вейвлет-разложением  $\varphi(x)$ , который является частным случаем процедуры усреднения (более подробно см. в [2]). Вместо каскадного алгоритма можно вычислить непосредственно  $\varphi(2^{-j}k)$  из уравнения (3.9), начиная с подходящих  $\varphi(n)$ .

Однако в практических приложениях используются только вейвлет-коэффициенты  $h_k$ , без вычисления конкретной формы вейвлета.

За исключением вейвлетов Хаара все вещественные ортонормальные вейвлеты с компактным носителем

<sup>8</sup> Эта асимптотическая оценка снизу получена с помощью преобразования Фурье [2]. Более точные методы при конечных значениях  $M$  позволяют найти связь гладкости с числом нулевых моментов. В области максимальных практически используемых значений  $6 < M < 12$  линейная интерполяция дает  $\mu \approx 0,275$ .

асимметричны, т.е. у них нет ни оси симметрии, ни оси антисимметрии (см. рис. 5). Отклонение формы вейвлета от симметричной проверяется тем, насколько сильно отклоняется от линейной зависимости фаза выражения  $m_0(\omega) = \sum_k h_k \exp(-ik\omega)$ . "Наименее асимметричные" вейвлеты получаются при минимизации этой фазы. Лучшая симметрия вейвлета неизбежно влечет за собой более симметричные коэффициенты  $h_k$ , но обратное утверждение не всегда оказывается верным.

**5. Быстрое вейвлет-преобразование и койфлеты**

После того как вычислены коэффициенты  $h_k$  и  $g_k$ , т.е. выбран определенный вейвлет, можно проводить вейвлет-преобразование сигнала  $f(x)$ , поскольку задан ортонормальный вейвлет-базис  $(\psi_{j,k}, \varphi_{j,k})$ . Любая функция  $f \in L^2(R)$  полностью характеризуется ее вейвлет-коэффициентами разложения по этому базису и потому может быть представлена формулой (3.17). Зададим все пределы суммирования в этой формуле. Функцию  $f(x)$  можно рассматривать на любом  $n$ -м уровне разрешения  $j_n$ . Тогда разделение между ее усредненными значениями на этом уровне и флуктуациями вокруг них выглядит как

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_{j_n,k} \varphi_{j_n,k}(x) + \sum_{j=j_n}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k} \psi_{j,k}(x). \quad (5.1)$$

На бесконечном интервале первая сумма может быть опущена, как мы уже обсуждали выше, и в результате получается "чистое" вейвлет-разложение. Как мы уже подчеркивали, коэффициенты  $s_{j,k}$  и  $d_{j,k}$  содержат информацию о составе сигнала на разных масштабах. Их можно вычислить, непосредственно используя формулы (3.19), (3.20). Однако этот алгоритм неудобен, так как при вычислении потребуется провести много ( $N^2$ ) операций, где  $N$  обозначает число имеющихся значений функции. Мы опишем намного более быстрый алгоритм. Он пояснен на рис. 6, а соответствующие формулы для быстрого алгоритма приводятся ниже.

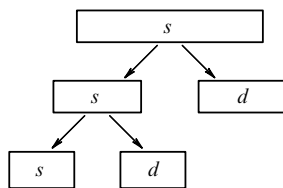


Рис. 6. Алгоритм быстрого вейвлет-преобразования.

В реальных ситуациях с оцифрованным сигналом мы всегда имеем дело с конечным набором цифр (точек). Поэтому всегда существует наилучший уровень разрешения, когда каждый интервал содержит по одному числу. Соответственно и суммирование по  $k$  будет идти в конечных пределах. Удобно изменить шкалу разрешения (или шкалу  $f$ ), приписав значение  $j=0$  этому наилучшему уровню разрешения. В этом случае легко вычислить вейвлет-коэффициенты для более усредненных уровней  $j \geq 1$ .

Многомасштабный анализ приводит естественным путем к иерархической и быстрой схеме вычисления

вейвлет-коэффициентов заданной функции. Функциональные уравнения (3.6), (3.9) и формулы для вейвлет-коэффициентов (3.19), (3.20) приводят (например, для вейвлетов Хаара) к соотношениям (2.2) или, для обратного преобразования (синтеза), (2.3).

В общем случае итерационные формулы быстрого вейвлет-преобразования имеют вид

$$s_{j+1,k} = \sum_m h_m s_{j,2k+m}, \quad (5.2)$$

$$d_{j+1,k} = \sum_m g_m s_{j,2k+m} \quad (5.3)$$

с

$$s_{0,k} = \int f(x) \varphi(x-k) dx. \quad (5.4)$$

Эти уравнения обеспечивают быстрые алгоритмы (так называемые пирамидальные алгоритмы) вычисления вейвлет-коэффициентов, поскольку требуют теперь только  $O(N)$  операций для своего завершения. Начав с  $s_{0,k}$ , мы вычислим все другие вейвлет-коэффициенты, если параметры вейвлета  $h_m, g_m$  известны. Явный вид вейвлета при этом не используется. Простая форма полученных итерационных уравнений служит единственным оправданием введения множителя  $\sqrt{2}$  в функциональное уравнение (3.6). В принципе коэффициенты  $h_m, g_m$  можно было бы перенормировать. Однако уравнения (5.2), (5.3) используются на практике заметно чаще других, и потому эту нормировку не изменяют. После того как выбран определенный вейвлет, т.е. выбраны коэффициенты  $h_m, g_m$ , для вычисления вейвлет-коэффициентов используются только уравнения (5.2), (5.3). Поэтому любые дополнительные сомножители в них могут привести лишь к усложнению численных расчетов.

Остающиеся проблемы связаны с начальными данными. Если известен явный вид функции  $f(x)$ , то коэффициенты  $s_{0,k}$  можно вычислить, используя формулу (5.4). Но ситуация отличается от этой, если доступны только дискретные значения  $f(x)$ . Чтобы достичь высокой точности, хорошо бы задать очень малые интервалы (плотную решетку), но это зачастую недоступно из-за конечности интервалов сбора информации. В таком случае простейшее принимаемое решение состоит в непосредственном использовании величин  $f(k)$  из доступного набора данных в виде коэффициентов  $s_{0,k}$  и применении быстрого вейвлет-преобразования с использованием формул (5.2), (5.3). Это безопасная операция, так как пирамидальный алгоритм обеспечивает полную реконструкцию сигнала, а коэффициенты  $s_{0,k}$  по сути представляют собой локальные средние значения сигнала, взвешенные со скейлинг-функцией.

В общем случае можно выбрать

$$s_{0,k} = \sum_m c_m f(k-m). \quad (5.5)$$

Рассмотренная выше ситуация отвечает условию  $s_{0,k} = f(k)$ , что соответствует  $c_m = \delta_{0m}$ . Это условие может оказаться практически точным при некотором специфическом выборе скейлинг-функции, приводящем к койфлетам (этот термин предложен в честь Р. Койфмана, идеи которого побудили И. Добеши построить такие вейвлеты). Оказывается, можно провести многомасштаб-

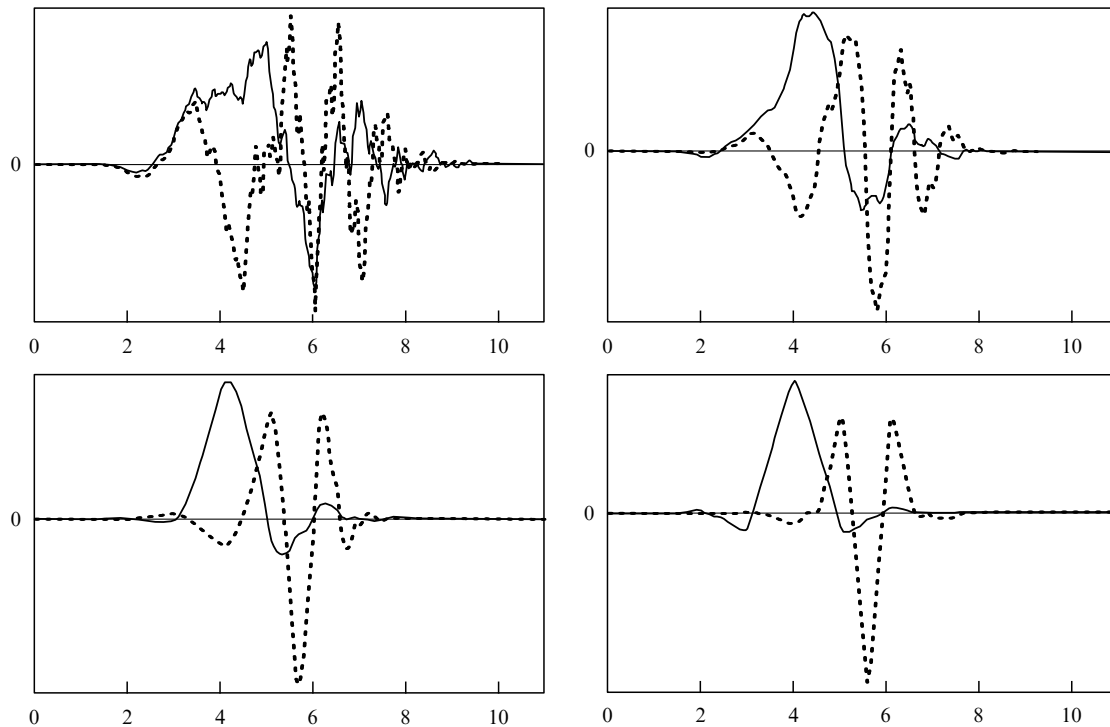


Рис. 7. Койфлеты (штриховые линии) и их скейлинг-функции (сплошные линии) при  $M = 4$ .

ный анализ со скейлинг-функцией, обладающей набором нулевых моментов, т.е. такой, что

$$\int x^m \varphi(x) dx = 0, \quad 0 < m < M. \quad (5.6)$$

Для построения таких вейвлетов (койфлетов) надо добавить к прежним условиям для определения коэффициентов  $h_k$  еще дополнительные требования

$$\sum_k h_k k^m = 0, \quad 0 < m < M, \quad (5.7)$$

вытекающие из условий (5.6).

Койфлеты более симметричны, нежели вейвлеты Добеши, как это наглядно видно из рис. 7, если сравнить его с рис. 5. Последние не удовлетворяют условиям (5.6). Цена, которую приходится платить за это новое требование, состоит в том, что койфлеты длиннее, чем вейвлеты Добеши. Если для последних длина области задания равна  $2M - 1$ , то для койфлетов она становится равной  $3M - 1$ . Ошибка в оценке коэффициентов  $s_{j,k}$  уменьшается с ростом числа нулевых моментов как  $O(2^{-jM})$ . В то же время разброс по гладкости у койфлетов данного порядка больше, чем у вейвлетов Добеши того же порядка.

Существуют другие предложения улучшить первый шаг в этой итерационной процедуре быстрого вейвлет-преобразования, например, сформулированное для  $T$ -полиномов Свелденсом [19] и с использованием так называемых "ленивых" вейвлетов, предложенные Годакером и Ивановым [20]. Последнее наиболее удобно при одновременном анализе на разных уровнях разрешения, в частности для неоднородных решеток.

Обратное быстрое вейвлет-преобразование позволяет реконструировать функцию по значениям ее вейвлет-коэффициентов.

## 6. Выбор вейвлета

Выше мы продемонстрировали три примера дискретных ортонормальных вейвлетов с компактным носителем. Свойство регулярности, число нулевых моментов и число вейвлет-коэффициентов, превышающих некоторое пороговое значение, были предложены в качестве возможных критериев для выбора конкретного вейвлета, не говоря уже о требуемых вычислительных затратах. Иногда для выбора используется так называемый функционал информационной ценности. Пытаются минимизировать его и таким способом отобрать оптимальный базис. В частности, рассматривается энтропийный критерий вероятностного распределения вейвлет-коэффициентов [4, 11]. Энтропия функции  $f$  по отношению к вейвлет-базису отражает число существенных членов в разложении (3.17). Она определяется как  $\exp(-\sum_{j,k} |d_{j,k}|^2 \log |d_{j,k}|^2)$ . Если мы имеем набор ортонормальных базисов, то выберем для анализа функции  $f$  тот, который приводит к наименьшей энтропии.

Число возможных вейвлетов в нашем распоряжении намного больше, чем приведено в предыдущих примерах. Мы не будем обсуждать все, а лишь упомянем некоторые, отсылая читателя к процитированным монограммам.

- Во-первых, следует упомянуть сплайны, которые приводят к вейвлетам с некомпактным носителем, но с экспоненциальным спадом на бесконечности и с некоторым (ограниченным) числом непрерывных производных. Там используется специальный прием ортогонализации. По сути дела сплайны тесно связаны с обсуждавшимися выше интерполяционными схемами нахождения более точных начальных значений  $s_{0,k}$  посредством связи их с некоторыми линейными комбинациями оцифрованного набора  $f(x)$ .

• Чтобы обеспечить полную симметрию и точную реконструкцию одновременно, применяют так называемые биортогональные вейвлеты. При этом используется два дуальных вейвлет-базиса,  $\psi_{j,k}$  и  $\tilde{\psi}_{j,k}$ , связанных с двумя разными многомасштабными лестницами. Их свойства регулярности могут заметно отличаться друг от друга. Функция  $f$  может быть записана в двух видах, абсолютно эквивалентных до тех пор, пока не производится компрессия:

$$f = \sum_{j,k} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \tilde{\psi}_{j,k}, \tag{6.1}$$

$$f = \sum_{j,k} \langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle \psi_{j,k}, \tag{6.2}$$

где вейвлет  $\psi$  и дуальный ему удовлетворяют требованию биортогональности  $\langle \psi_{j,k} | \tilde{\psi}_{j',k'} \rangle = \delta_{j,k;j',k'}$ . В отличие от вейвлетов Добеши, у которых их регулярность тесно связана с числом обращающихся в нуль моментов, биортогональные вейвлеты обладают большей свободой выбора. Если один из них обладает гладкостью порядка  $r$ , то дуальный ему вейвлет автоматически имеет по крайней мере  $r$  нулевых моментов. Если  $\tilde{\psi}_{j,k}$  оказывается намного более регулярной функцией, то  $\psi_{j,k}$  имеет намного больше нулевых моментов, чем  $\tilde{\psi}_{j,k}$ . Это позволяет нам выбрать, например,  $\tilde{\psi}_{j,k}$  в виде очень гладкой функции и иметь  $\psi_{j,k}$  с большим числом нулевых моментов. Большое число нулевых моментов у  $\psi_{j,k}$  приводит к лучшим результатам при сжатии информации для достаточно гладкой  $f$ . Если же сжатие было проведено, то формула (6.1) оказывается заметно полезнее формулы (6.2). Число существенных членов в ней намного меньше, и, более того, лучшая гладкость  $\tilde{\psi}_{j,k}$  помогает восстановить  $f$  с более высокой точностью. Биортогональные базисы близки к ортонормальному базису. Оба вейвлета можно сделать симметричными. Симметричные биортогональные вейвлеты, близкие к ортонормальному базису, похожи на койфлеты. Построение биортогональных вейвлет-базисов обычно оказывается более простым, чем соответствующая процедура для ортонормальных базисов.

• Наличие соотношений на двух масштабах является характерной чертой построения вейвлет-пакетов. Основная идея их создания состоит в последовательном итерировании расщепления полосы частот при сохранении одной и той же пары фильтров. Введенная выше скейлинг-функция приобретает наименование  $w_0$ , а сам пакет строится исходя из нее с помощью соотношений

$$w_{2n}(x) = \sum_k h_k w_n(2x - k), \tag{6.3}$$

$$w_{2n+1}(x) = \sum_k g_k w_n(2x - k). \tag{6.4}$$

Обычный "материнский вейвлет" записан как  $w_1$ . Это семейство вейвлетов образует ортонормальный базис в  $L^2(R)$ , который называется *базисом вейвлет-пакетов* с фиксированным масштабом. Построение вейвлет-пакетов показано на рис. 8.

• Можно отказаться от свойства ортонормальности и сконструировать неортогональные вейвлеты, которые называются *фреймами*. Важный особый класс фреймов представлен базисами Рисса в  $L^2(R)$ . Базис Рисса

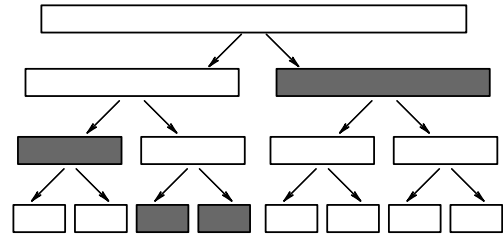


Рис. 8. Построение вейвлет-пакетов.

является фреймом, но обратное утверждение неверно. Фреймы удовлетворяют следующему требованию:

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{j \in J} |\langle f, \varphi_j \rangle|^2 \leq B \|f\|^2. \tag{6.5}$$

Постоянные  $A$  и  $B$  называются *границами фрейма*. При  $A = B$  говорят о *жестких фреймах*. Случай  $A = B = 1$  соответствует *ортонормальным вейвлетам*.

• При действии (сингулярными) операторами зачастую получаются бесконечные выражения, если использовать обычные вейвлеты. В этих случаях можно подобрать некую сглаживающую функцию  $b(x)$ , чтобы наложить дополнительные условия, которые будут необходимы и достаточны для того, чтобы результат воздействия (сингулярного интегрального) оператора оказался непрерывным на пространстве  $L^2$ . В этом случае выбирают так называемые вейвлеты, подогнанные под  $b$ . Любая функция  $f$  снова разлагается по формуле

$$f(x) = \sum_{\lambda} a(\lambda) \psi_{\lambda}^{(b)}(x), \tag{6.6}$$

но вейвлет-коэффициенты вычисляются теперь следующим образом:

$$a_{\lambda} = \int b(x) f(x) \psi_{\lambda}^{(b)}(x) dx. \tag{6.7}$$

Они удовлетворяют условию нормировки

$$\int b(x) \psi_{\lambda}^{(b)}(x) \psi_{\lambda'}^{(b)}(x) dx = \delta_{\lambda, \lambda'}. \tag{6.8}$$

Условие на знакопеременность выглядит при этом так:

$$\int b(x) \psi_{\lambda}^{(b)}(x) dx = 0. \tag{6.9}$$

Как мы видим, осцилляции вейвлета также подогнаны под функцию  $b$  (вообще говоря, под "комплексную меру"  $b(x) dx$ ).

• До сих пор мы рассматривали вейвлеты с масштабным множителем, равным 2. Они наиболее удобны для численных расчетов. Однако можно доказать [2, 21], что в рамках многомасштабного анализа этот множитель должен быть рациональным числом и никаких других требований не налагается. Поэтому можно построить схемы с другими целыми или дробными масштабными множителями. Иногда их использование может привести к лучшей локализации по частоте. Для вейвлетов с масштабным множителем 2 их фурье-образ сосредоточен в основном в пределах одной октавы между  $\pi$  и  $2\pi$ , тогда как вейвлет базисы с дробными множителями

могут иметь ширину полосы пропускания, более узкую, чем октава.

• Более того, можно использовать непрерывные вейвлеты, как это подробнее описано в обзоре [10]. Тогда элемент вейвлет-базиса записывается в виде

$$\psi_{a,b}(x) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right). \quad (6.10)$$

Прямое и обратное вейвлет-преобразования выглядят так:

$$W_{a,b} = |a|^{-1/2} \int f(x) \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) dx, \quad (6.11)$$

$$f(x) = C_\psi^{-1} \int W_{a,b} \psi_{a,b}(x) \frac{da db}{a^2}. \quad (6.12)$$

Здесь

$$C_\psi = \int |\psi(\omega)|^2 \frac{d\omega}{|\omega|} = \left| \int \exp(-ix\omega) \psi(x) dx \right|^2 \frac{d\omega}{|\omega|}. \quad (6.13)$$

Отсюда легко распознать, что знакопеременность вейвлетов, требуемая условием (3.16), является их общим свойством. Обращение в нуль фурье-образа вейвлета  $\psi(\omega)$  при  $\omega \rightarrow 0$ , что полностью отвечает условию (3.16), обеспечивает конечность значения  $C_\psi$  в формуле (6.13). Одним из специальных и часто используемых примеров непрерывных вейвлетов является вторая производная гауссовой функции, известная здесь под названием "мексиканская шляпа" (МНАТ) из-за ее формы. В действительности, как было показано Добеши, ее можно рассматривать как некий специальный фрейм. Процедура восстановления (синтеза) может оказаться, однако, неустойчивой в этом случае. Тем не менее ее часто используют для анализа сигналов. Формула (6.11) представляет нечто вроде свертки. Именно поэтому общая теория так называемых операторов Калдерона – Зигмунда [3] (см. раздел 17.2) применима, в частности, к проблемам разложения по вейвлетам.

## 7. Многомерные вейвлеты

Многомасштабный анализ можно проводить и с многомерными функциями. Существует два способа [4] обобщить его, скажем, на двумерный случай, но мы рассмотрим наиболее часто используемое построение, заданное тензорными произведениями. Метод тензорного произведения предоставляет непосредственный путь к развитию  $r$ -регулярного многомасштабного разложения, которое приводит к появлению многомерных вейвлетов с компактным носителем. Это дает нам возможность проанализировать любое пространство обычных или обобщенных функций в  $n$  измерениях с регулярностью вплоть до  $r$ .

Тривиальный путь построения двумерного ортонормального базиса исходя из одномерного ортонормального вейвлет-базиса  $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k)$  состоит в том, чтобы путем тензорного произведения образовать соответствующие функции из двух одномерных базисов:

$$\Psi_{j_1, k_1; j_2, k_2}(x_1, x_2) = \psi_{j_1, k_1}(x_1) \psi_{j_2, k_2}(x_2). \quad (7.1)$$

В этом базисе две переменные,  $x_1$  и  $x_2$ , сжимаются по-разному.

Большой интерес для многих приложений имеет другая конструкция, в которой масштабирование полученного ортонормального вейвлет-базиса происходит по обоим переменным одинаковым образом и двумерные вейвлеты задаются следующим выражением:

$$2^j \Psi(2^j x - k, 2^j y - l), \quad j, k, l \in \mathbb{Z}, \quad (7.2)$$

но  $\Psi$  уже не является единственной функцией, наоборот, она будет сформирована из трех элементарных вейвлетов. Чтобы создать ортонормальный базис  $W_0$ , теперь придется использовать три семейства,

$$\varphi(x-k)\psi(y-l), \quad \psi(x-k)\varphi(y-l), \quad \psi(x-k)\psi(y-l).$$

Тогда двумерные вейвлеты запишутся в виде

$$2^j \varphi(2^j x - k) \psi(2^j y - l), \quad 2^j \psi(2^j x - k) \varphi(2^j y - l),$$

$$2^j \psi(2^j x - k) \psi(2^j y - l).$$

На двумерной плоскости происходит анализ по горизонталям, вертикалям и диагоналям с одинаковым разрешением в соответствии с тремя выписанными выше вейвлетами.

Рисунок 9 демонстрирует, как выглядит вся эта конструкция. Схематическое представление такой процедуры на рисунке показывает, как распределены соответствующие вейвлет-коэффициенты при разных уровнях разрешения ( $j=1$  и  $j=2$ ). На рисунке приведено разложение по двум уровням некоторого набора геометрических объектов. Ясно видно, как вертикальные, горизонтальные и диагональные структуры подчеркиваются в соответствующих областях. Следует также обратить внимание на то, как горизонтальная полоса на этом рисунке расщепляется на две полосы при соответствующем разрешении на определенном уровне.

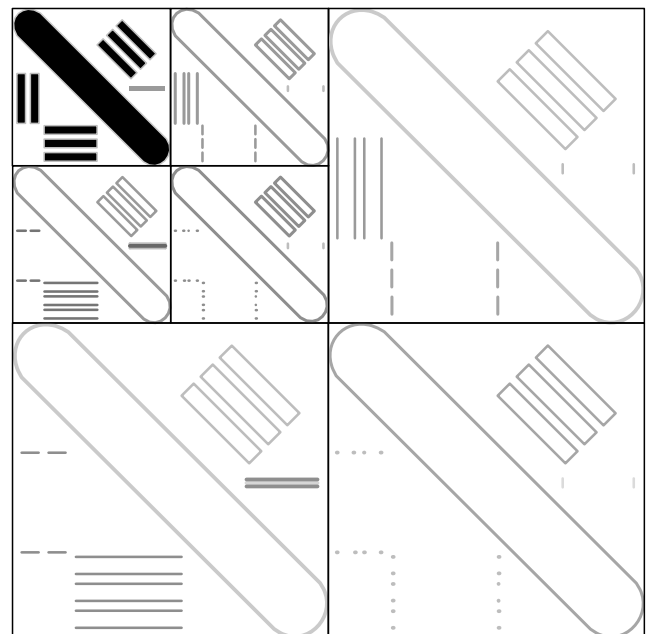


Рис. 9. Пример вейвлет-анализа двумерного изображения. Видно, что либо горизонтальные, либо вертикальные детали рисунка выделяются наиболее четко соответствующими вейвлет-коэффициентами. В зависимости от выбранного уровня разрешения также лучше разрешаются крупные или мелкие детали.