УДК 517.911:519.622

ТЕСТЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ПРАКТИКУМА ПО ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

О. Б. Арушанян[1], С. Ф. Залёткин[1], Н. Н. Калиткин[2]

Приводятся тестовые задачи для выявления рабочих характеристик и областей применимости программ решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Значения конца интервала интегрирования и значения параметров тестовых задач могут варьироваться для получения более полной информации о свойствах исследуемых программ и реализованных в них численных методов.

При проведении занятий по вычислительному практикуму весьма важным является всестороннее тестирование студенческих программ. Таким образом достигается закрепление не только знаний теоретического курса по методам вычислений, но и приемов грамотного программирования. В этом отношении особенный интерес представляет практикум по решению задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений одношаговыми разностными методами [1].

В настоящей работе предлагается набор тестов, составленных для выявления рабочих характеристик программ и анализа их поведения в зависимости от свойств решаемой задачи. Рассматриваемые здесь тесты (более широкий их набор опубликован в [2, 3]) были в разные годы применены для сертификации программ Библиотеки численного анализа НИВЦ МГУ [4] из главы "Обыкновенные дифференциальные уравнения". Эти программы в версиях на языках Фортран и Си помещены на научно-образовательном сервере НИВЦ МГУ по численному анализу (http://www.srcc.msu.su/num_anal) и доступны для общего использования стандартными средствами компьютерной сети Интернет.

Тест 1.

$$
\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= \mu_0 y_1,\\
\frac{dy_2}{dx} &= (\mu_0-\mu_1)y_1 + (\mu_1+\nu_1)y_2 - \nu_1 y_3,\\
\frac{dy_3}{dx} &= (\mu_0-\mu_1-\nu_1)y_1 + 2\nu_1 y_2 + (\mu_1-\nu_1)y_3,\\
\frac{dy_4}{dx} &= (\mu_0-\mu_1-\nu_1)y_1 + 2\nu_1 y_2 + (\mu_1-\nu_1-\mu_2)y_3 + (\mu_2+\nu_2)y_4 - \nu_2 y_5,\\
\frac{dy_5}{dx} &= (\mu_0-\mu_1-\nu_1)y_1 + 2\nu_1 y_2 + (\mu_1-\nu_1-\mu_2-\nu_2)y_3 + 2\nu_2 y_4 + (\mu_2-\nu_2)y_5.
\end{aligned}
$$

Пусть $y_2(0)=y_3(0)$ и $y_4(0)=y_5(0)$. Тогда точное решение этой линейной системы имеет вид $(0\leqslant x\leqslant 1)$

$$
\begin{aligned}
y_1(x) &= y_1(0)e^{\mu_0 x},\\
y_2(x) &= y_1(x) + \big(y_2(0)-y_1(0)\big)e^{\mu_1 x}\cos\nu_1 x,\\
y_3(x) &= y_1(x) + \sqrt{2}\,\big(y_2(0)-y_1(0)\big)e^{\mu_1 x}\sin\nu_1(x+\pi/4),\\
y_4(x) &= y_3(x) + \big(y_4(0)-y_2(0)\big)e^{\mu_2 x}\cos\nu_2 x,\\
y_5(x) &= y_3(x) + \sqrt{2}\,\big(y_4(0)-y_2(0)\big)e^{\mu_2 x}\sin\nu_2(x+\pi/4).
\end{aligned}
$$

Собственные значения матрицы системы равны $\lambda_1=\mu_0$, $\lambda_{2,3}=\mu_1\pm i\nu_1$, $\lambda_{4,5}=\mu_2\pm i\nu_2$. Тестовый пример подобран таким образом, чтобы его решение при различных значениях параметров содержало

[1] Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119992, Москва; e-mail: arush@srcc.msu.su

[2] Институт математического моделирования РАН, 125047, Москва, Миусская пл., 4, корп. А; kalitkin@imamod.ru

чисто вещественную компоненту (растущую или затухающую) и компоненты, носящие периодический характер.

Случай 1: плохо обусловленная задача. Начальные условия:

$$y_1(0) = 0.1, \quad y_2(0) = y_3(0) = 1, \quad y_4(0) = y_5(0) = 0.5\,.$$

Значения параметров:

$$\mu_0 = 10, \quad \mu_1 = 4, \quad \nu_1 = 20\pi, \quad \mu_2 = 5, \quad \nu_2 = 100\,.$$

В этом случае в решении присутствуют быстро растущие компоненты и периодические компоненты.

Случай 2: мягкая (хорошо обусловленная) задача. Начальные условия:

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = y_3(0) = 1.5, \quad y_4(0) = y_5(0) = 2.5\,.$$

Значения параметров:

$$\mu_0 = -2, \quad \mu_1 = 1, \quad \nu_1 = 1, \quad \mu_2 = -1, \quad \nu_2 = 10\,.$$

В этом случае в решении присутствуют слабо растущие компоненты и слабо затухающие компоненты.

Случай 3: быстроосциллирующая задача. Начальные условия:

$$y_1(0) = 0.5, \quad y_2(0) = y_3(0) = 0.8, \quad y_4(0) = y_5(0) = 2\,.$$

Значения параметров:

$$\mu_0 = -2, \quad \mu_1 = 1, \quad \nu_1 = 1, \quad \mu_2 = -1, \quad \nu_2 = 1000\,.$$

В этом случае в решении присутствуют медленно меняющиеся и быстро меняющиеся компоненты (последние определяют трудоемкость задачи).

Случай 4: жесткая задача. Начальные условия:

$$y_1(0) = 10, \quad y_2(0) = y_3(0) = 11, \quad y_4(0) = y_5(0) = 111\,.$$

Значения параметров:

$$\mu_0 = -100, \quad \mu_1 = -1, \quad \nu_1 = 1, \quad \mu_2 = -10\,000, \quad \nu_2 = 10 \ \ (\text{или} \ \ \nu_2 = 1000)\,.$$

В этом случае в решении присутствуют сильно затухающие компоненты, которые быстро осциллируют, причем за одну осцилляцию соответствующая компонента существенно затухает.

Случай 5: жесткоосциллирующая задача. Начальные условия:

$$y_1(0) = 100, \quad y_2(0) = y_3(0) = 101, \quad y_4(0) = y_5(0) = 201\,.$$

Значения параметров:

$$\mu_0 = -10\,000, \quad \mu_1 = 1, \quad \nu_1 = 1, \quad \mu_2 = -100, \quad \nu_2 = 1000\,.$$

В этом случае в решении присутствуют сильно затухающие компоненты, которые быстро осциллируют, причем за одну осцилляцию соответствующая компонента мало затухает.

Тест 2.

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= \mu_1 y_1, \\
\frac{dy_2}{dx} &= y_1 + \mu_1 y_2, \\
\frac{dy_3}{dx} &= \mu_2 y_3, \\
\frac{dy_4}{dx} &= y_3 + \mu_2 y_4, \\
\frac{dy_5}{dx} &= 2y_4 + \mu_2 y_5, \\
\frac{dy_6}{dx} &= 3y_5 + \mu_2 y_6.
\end{aligned}$$

Точное решение этой линейной системы, у которой матрица правой части состоит из двух жордановых клеток, имеет вид ($0 \leqslant x \leqslant 1$)

$$
\begin{aligned}
y_1(x) &= y_1(0)e^{\mu_1 x},\\
y_2(x) &= \big(y_2(0) + y_1(0)x\big)e^{\mu_1 x},\\
y_3(x) &= y_3(0)e^{\mu_2 x},\\
y_4(x) &= \big(y_4(0) + y_3(0)x\big)e^{\mu_2 x},\\
y_5(x) &= \big(y_5(0) + 2y_4(0)x + y_3(0)x^2\big)e^{\mu_2 x},\\
y_6(x) &= \big(y_6(0) + 3y_5(0)x + 3y_4(0)x^2 + y_3(0)x^3\big)e^{\mu_2 x}.
\end{aligned}
$$

При начальных условиях

$$y_1(0) = y_2(0) = 1, \quad y_3(0) = y_4(0) = y_5(0) = y_6(0) = 1000$$

данная линейная система является жесткой, если значения параметров равны

$$\mu_1 = -1, \quad \mu_2 = -10\,000\,.$$

Тест 3.

$$
\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= 6y_1 + 3y_2 + 6\cos x + 4\sin x,\\
\frac{dy_2}{dx} &= 4y_1 + 5y_2 + 3\cos x + 5\sin x.
\end{aligned}
$$

При начальных условиях

$$y_1(0) = -1, \quad y_2(0) = 0$$

решение системы имеет вид

$$y_1 = -\cos x, \quad y_2 = -\sin x.$$

Из общего решения системы

$$y_1 = C_1e^{2x} + C_2e^{9x} - \cos x, \quad y_2 = -\frac{4}{3}\,C_1e^{2x} + C_2e^{9x} - \sin x$$

видно, что частное решение системы (рассматриваемое на всей положительной полуоси) является неустойчивым по отношению к начальным данным и ошибкам округления.

Тест 4.

$$
\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= 4y_1 - 3y_2 + \sin x,\\
\frac{dy_2}{dx} &= 2y_1 - y_2 - 2\cos x.
\end{aligned}
$$

При начальных условиях

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 2$$

решение системы имеет вид

$$y_1 = \cos x - 2\sin x, \quad y_2 = 2\cos x - 2\sin x.$$

Из общего решения системы

$$y_1 = C_1e^{x} + 3C_2e^{2x} + \cos x - 2\sin x, \quad y_2 = C_1e^{x} + 2C_2e^{2x} + 2\cos x - 2\sin x$$

видно, что частное решение системы (рассматриваемое на всей положительной полуоси) является неустойчивым по отношению к начальным данным и ошибкам округления.

Тест 5.

$$
\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= y_1^2 y_2,\\
\frac{dy_2}{dx} &= -\frac{1}{y_1}.
\end{aligned}
$$

При начальных условиях

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1$$

решение системы имеет вид

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = e^{-x}.$$

Имеем случай, когда одна компонента решения и ее производная быстро растут, а другая компонента решения и ее производная быстро убывают.

Тест 6.

$$\frac{dy_1}{dx} = -\frac{2}{x}\, y_1 + 1,$$
$$\frac{dy_2}{dx} = \frac{x+2}{x}\, y_1 + y_2 - 1.$$

При начальных условиях

$$y_1(-10) = -10/3, \quad y_2(-10) = 10/3$$

решение системы имеет вид

$$y_1 = x/3, \quad y_2 = -x/3.$$

Из общего решения системы

$$y_1 = \frac{x}{3} + \frac{C_1}{x^2}, \quad y_2 = -\frac{x}{3} - \frac{C_1}{x^2} + C_2 e^x$$

видно, что из-за члена C_1/x^2 частное решение системы чувствительно к ошибкам округлений при значениях x, достаточно близких к нулю. Погрешность вычислений правой части системы выражается через погрешность ее решения δ_1 и δ_2 следующим образом: $-2\delta_1/x$ для y_1' и $\delta_1 + 2\delta_1/x + \delta_2$ для y_2'. Следовательно, эта погрешность становится большой при $x \to 0$ и может привести к появлению в численном решении члена C_1/x^2.

Тест 7.

$$\frac{dy_1}{dx} = -\frac{y_2}{x},$$
$$\frac{dy_2}{dx} = -\frac{y_1}{x}.$$

При начальных условиях

$$y_1(-10) = -10/3, \quad y_2(-10) = 10/3$$

решение системы имеет вид

$$y_1 = x/3, \quad y_2 = -x/3.$$

Из общего решения системы

$$y_1 = C_1 x + \frac{C_2}{x}, \quad y_2 = -C_1 x + \frac{C_2}{x}$$

видно, что из-за члена C_2/x частное решение системы чувствительно к ошибкам округлений при значениях x, достаточно близких к нулю. Погрешность вычислений правой части системы выражается через погрешность ее решения δ_1 и δ_2 следующим образом: $-\delta_2/x$ для y_1' и $-\delta_1/x$ для y_2'. Следовательно, эта погрешность становится большой при $x \to 0$ и может привести к появлению в численном решении члена C_2/x.

Тест 8.

$$\frac{dy_1}{dx} = y_1 \cos x,$$
$$\frac{dy_2}{dx} = y_1 e^{-\sin x}.$$

При начальных условиях

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1$$

решение системы имеет вид

$$y_1 = e^{\sin x}, \quad y_2 = x + 1.$$

Данный тест соответствует случаю, когда решение имеет периодическую компоненту.

Тест 9.

$$\frac{dy_1}{dx} = -3y_2 + \cos x,$$
$$\frac{dy_2}{dx} = 4y_2 - \cos x.$$

При начальных условиях

$$y_1(0) = -3/17, \quad y_2(0) = 4/17$$

решение системы имеет вид

$$y_1 = \frac{5}{17}\sin x - \frac{3}{17}\cos x, \quad y_2 = -\frac{1}{17}\sin x + \frac{4}{17}\cos x.$$

Из общего решения системы

$$y_1 = \frac{5}{17}\sin x - \frac{3}{17}\cos x + C_1 + 3C_2e^{4x}, \quad y_2 = -\frac{1}{17}\sin x + \frac{4}{17}\cos x - 4C_2e^{4x}$$

видно, что частное решение системы (рассматриваемое на всей положительной полуоси) является неустойчивым по отношению к начальным данным и ошибкам округления.

Тест 10.

$$\frac{dy_1}{dx} = -5y_1 - 2y_2,$$
$$\frac{dy_2}{dx} = y_1 - 7y_2.$$

При начальных условиях

$$y_1(0) = 2, \quad y_2(0) = 0$$

решение системы имеет вид

$$y_1 = (2\sin x + 2\cos x)\,e^{-6x}, \quad y_2 = 2\sin x\,e^{-6x}$$

и является быстрозатухающим.

Тест 11.

$$\frac{dy_1}{dx} = -3y_1 - 4y_2,$$
$$\frac{dy_2}{dx} = -2y_1 - 5y_2.$$

При начальных условиях

$$y_1(0) = 3, \quad y_2(0) = 0$$

решение системы имеет вид

$$y_1 = 2e^{-x} + e^{-7x}, \quad y_2 = -e^{-x} + e^{-7x}$$

и является быстрозатухающим.

Тест 12.

$$\frac{dy_1}{dx} = y_1 - y_2,$$
$$\frac{dy_2}{dx} = y_1 + y_2.$$

При начальных условиях

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = -1$$

решение системы имеет вид

$$y_1 = e^x(\sin x + \cos x), \quad y_2 = e^x(\sin x - \cos x).$$

Данный тест соответствует случаю систем с быстрорастущими или имеющими характер быстронарастающих колебаний решениями.

Тест 13.

$$\frac{dy}{dx} = y - \frac{2x}{y}.$$

При начальном условии $y(0) = 1$ решение уравнения имеет вид

$$y = \sqrt{2x+1}.$$

Общее решение уравнения:

$$y = \pm\sqrt{2x+1+Ce^{2x}}$$

Правая часть уравнения вдоль частного решения записывается так:

$$y - \frac{2x}{y} = \sqrt{2x+1} - \frac{2x}{\sqrt{2x+1}} = \sqrt{2x+1} - \frac{\sqrt{2x+1}}{1+1/(2x)}$$

Следовательно, правая часть является разностью двух близких величин при достаточно больших x, а это приводит к тому, что ошибки округления при ее вычислении будут значительными. Эти ошибки в конечном счете приведут к появлению в численном решении экспоненты Ce^{2x}. Поэтому частное решение уравнения (хотя оно и не является быстрорастущим) неустойчиво на всей положительной полуоси по отношению к начальным данным и ошибкам округления.

Тест 14.

$$\frac{dy}{dx} = a\left(y - x^2\right).$$

При начальном условии $y(0) = 2/a^2$ решение уравнения имеет вид

$$y = \frac{2}{a^2} + \frac{2}{a}\,x + x^2.$$

Из общего решения

$$y = \frac{2}{a^2} + \frac{2}{a}\,x + x^2 + Ce^{ax}$$

следует, что при $a > 0$ частное решение неустойчиво на положительной полуоси по отношению к начальным данным и ошибкам округления. Кроме того, при значениях a, много больших длины интервала интегрирования, появляющаяся из-за ошибок округления экспонента Ce^{ax} может достичь значительных размеров, даже если интервал интегрирования мал.

Тест 15.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-x}.$$

При начальном условии $y(0) = 1$ решение уравнения имеет вид

$$y = 1 - \ln(1-x).$$

Данный тест соответствует случаю уравнений, правые части которых имеют особенности.

Тест 16.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\sin 2x - y\cos x.$$

При начальном условии $y(0) = 0$ решение уравнения имеет вид

$$y = \sin x - 1 + e^{-\sin x}.$$

Данный тест соответствует случаю уравнений, решения которых имеют периодические компоненты.

Тест 17.

$$\frac{dy}{dx} = e^{-\sin x} - y\cos x.$$

При начальном условии $y(0) = 1$ решение уравнения имеет вид

$$y = (x+1)e^{-\sin x}.$$

Данный тест соответствует случаю уравнений, решения которых имеют характер нарастающих колебаний.

Тест 18.

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + 3y - 4.$$

При начальном условии $y(0) = -3$ решение уравнения имеет вид

$$y = \frac{1 - 16e^{5x}}{1 + 4e^{5x}}.$$

Это частное решение асимптотически приближается к прямой $y = -4$.

Тест 19.

$$\frac{dy}{dx} = xy^2 + 3xy.$$

При начальном условии $y(0) = -1$ решение уравнения имеет вид

$$y = \frac{3}{-2e^{-3x^2/2} - 1}.$$

Это частное решение асимптотически приближается к прямой $y = -3$.

Тест 20.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{x^2}\, y.$$

При начальном условии $y(1) = e$ решение уравнения имеет вид

$$y = xe^{1/x}.$$

Это частное решение асимптотически приближается к прямой $y = x$.

Тест 21.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{x^2+1}\, y + \frac{2x^2}{x^2+1}.$$

При начальном условии $y(0) = 0$ решение уравнения имеет вид

$$y = \frac{2}{3}\,\frac{x^3}{x^2+1}.$$

Это частное решение асимптотически приближается к прямой $y = 2x/3$.

Тест 22.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{x^2-1}\, y + \frac{\cos x}{x^2-1}.$$

При начальном условии $y(0) = 1$ решение уравнения имеет вид

$$y = \frac{-1 + \sin x}{x^2 - 1}.$$

Данный тест соответствует случаю уравнений, правые части которых имеют особенности.

Тест 23.

$$\frac{dy_1}{dx} = -20y_1 + y_2,$$
$$\frac{dy_2}{dx} = -y_1 - 20y_2,$$
$$\frac{dy_3}{dx} = -21y_1 - 19y_2.$$

При начальных условиях

$$y_1(0) = 10, \quad y_2(0) = 0, \quad y_3(0) = 0$$

решение системы имеет вид

$$y_1 = 10e^{-20x}\cos x, \quad y_2 = -10e^{-20x}\sin x, \quad y_3 = y_1 + y_2 - 10.$$

Матрица системы имеет следующие собственные значения: $\lambda_1 = -20 + i$, $\lambda_2 = -20 - i$, $\lambda_3 = 0$. Видно, что большие по модулю собственные значения обладают большими отрицательными вещественными частями. Таким образом, заключаем, что данная система является жесткой.

Тест 24.

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = 2y_2' + y_1 - \frac{(1-\mu)(y_1+\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(y_1-1+\mu)}{r_2^3}, \quad r_1^2 = (y_1+\mu)^2 + y_2^2,$$
$$\frac{d^2y_2}{dx^2} = -2y_1' + y_2 - \frac{(1-\mu)y_2}{r_1^3} - \frac{\mu y_2}{r_2^3}, \qquad r_2^2 = (y_1-1+\mu)^2 + y_2^2.$$

При начальных условиях

$$y_1(0) = 0.994, \quad y_1'(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = -2.0317326295573368$$

и при $\mu = 0.012277471$ система описывает движение по замкнутой орбите с периодом $T = 11.124340337266$ (параметры теста даны здесь приближенно).

Малые изменения порядка 10^{-n} ($n = 4, 8, 12, 16$) в начальной скорости $y_2'(0)$ вызывают большие изменения в y_1, y_1' и y_2' в конце периода. Данная система имеет следующий интеграл:

$$J(y_1, y_2, y_1', y_2') = \frac{1}{2}\left({y_1'}^2 + {y_2'}^2 - y_1^2 - y_2^2\right) - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}.$$

Этот интеграл (называемый интегралом Якоби) может быть использован для проверки точности приближенного решения.

Тест 25.

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{a}{b}\, y_2 + \lambda y_1 \left(\sqrt{(y_1/a)^2 + (y_2/b)^2} - 1\right),$$
$$\frac{dy_2}{dx} = -\frac{b}{a}\, y_1 + \lambda y_2 \left(\sqrt{(y_1/a)^2 + (y_2/b)^2} - 1\right).$$

Пусть заданы начальные условия

$$y_1(0) = y_{10}, \quad y_2(0) = y_{20}.$$

Тогда точное решение имеет вид

$$y_1(x) = a\rho(x)\sin(x+\varphi_0), \quad y_2(x) = b\rho(x)\cos(x+\varphi_0),$$

где

$$\rho(x) = \frac{\rho_0}{\rho_0 - (\rho_0 - 1)\exp(\lambda x)}, \quad \rho_0 = \sqrt{(y_{10}/a)^2 + (y_{20}/b)^2}, \quad \varphi_0 = \operatorname{arctg}\frac{by_{10}}{ay_{20}}.$$

При вещественных значениях $\lambda < 0$ решение имеет устойчивый предельный цикл — эллипс с полуосями a и b:

$$(y_{1\infty}/a)^2 + (y_{2\infty}/b)^2 = 1.$$

При $\lambda \ll -1$ задача является жесткой.

Пример: взять $\lambda = -1000$, $a = 1$, $b = 100$, $y_{10} = 5$, $y_{20} = 0.001$; вычислить решение и построить его на фазовой плоскости.

Тест 26.

$$\frac{dy}{dx} = \lambda\left(y^2 - a^2\right), \quad a > 0, \quad y(0) = y_0.$$

Задача имеет точное решение

$$y(x) = a\,\frac{y_0 + a + (y_0 - a)\exp(2\lambda a x)}{y_0 + a - (y_0 - a)\exp(2\lambda a x)}$$

и два предельных решения $y(x) = a$ и $y(x) = -a$. При $\lambda < 0$ первое предельное решение устойчиво, второе неустойчиво; при начальных данных из диапазона $-a < y_0 < +\infty$ решение сходится к первому предельному, при $-\infty < y_0 < -a$ быстро уходит на минус бесконечность. Если $\lambda \ll -1$, то в диапазоне $0 < y_0 < +\infty$ задача жесткая, в диапазоне $-\infty < y_0 < 0$ плохо обусловленная. Таким образом, если $-a < y_0 < 0$, то задача сначала плохо обусловлена, но по ходу расчета становится жесткой.

Тест 27.

$$\frac{dy_1}{dx} = \big(a - b\cos(2\omega x)\big)\, y_1 + \big(b\sin(2\omega x) + \omega\big)\, y_2,$$
$$\frac{dy_2}{dx} = \big(b\sin(2\omega x) - \omega\big)\, y_1 + \big(a + b\cos(2\omega x)\big)\, y_2;$$
$$y_1(0) = y_{10}, \quad y_2(0) = y_{20}.$$

Матрица системы явно зависит от x, но ее собственные значения постоянны: $\lambda_{1,2} = a \pm \sqrt{b^2 - \omega^2}$; подбором параметров их нетрудно сделать вещественными. Однако точное решение при этом будет осциллирующим:

$$y_1(x) = y_{20} \sin(\omega x) e^{(a+b)x} + y_{10} \cos(\omega x) e^{(a-b)x},$$
$$y_2(x) = y_{20} \cos(\omega x) e^{(a+b)x} - y_{10} \sin(\omega x) e^{(a-b)x}.$$

Можно выбрать такие параметры, когда спектр матрицы будет жестким, а задача — плохо обусловленной (например, $a = -51$, $b = 61$, $\omega = 60$; $\lambda_1 = -40$, $\lambda_2 = -62$, $a + b = 10$, $a - b = -112$).

Тест 28.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{(y-b)^n}, \quad y(0) = y_0, \quad a > 0, \quad n > 0 \text{ (четное целое)}.$$

Точное решение имеет вид (оно монотонно возрастает)

$$y(x) = b + \left((y_0 - b)^{n+1} + (n+1)\,ax\right)^{1/(n+1)}.$$

Если выбрать $y_0 < b$, то решение имеет бесконечную производную при

$$x_* = \frac{(b - y_0)^{n+1}}{a(n+1)},$$

причем $y(x_*) = b$. Цель теста: проверка того, как различные численные методы проходят эту особенность.

Тест 29.

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{a^3}{3b^3} \frac{y_2^3}{y_1^2} + \lambda y_1 \left(\sqrt{(y_1/a)^6 + (y_2/b)^6} - 1\right),$$
$$\frac{dy_2}{dx} = -\frac{b^3}{3a^3} \frac{y_1^3}{y_2^2} + \lambda y_2 \left(\sqrt{(y_1/a)^6 + (y_2/b)^6} - 1\right).$$

Пусть заданы начальные условия

$$y_1(0) = y_{10}, \quad y_2(0) = y_{20}.$$

Точное решение имеет вид

$$y_1(x) = a\rho(x)\big(\sin(x + \varphi_0)\big)^{1/3}, \quad y_2(x) = b\rho(x)\big(\cos(x + \varphi_0)\big)^{1/3},$$

где

$$\rho(x) = \left(\frac{\rho_0}{\rho_0 - (\rho_0 - 1)\exp(3\lambda x)}\right)^{1/3}, \quad \rho_0 = \sqrt{(y_{10}/a)^6 + (y_{20}/b)^6}, \quad \varphi_0 = \operatorname{arctg}\left(\frac{by_{10}}{ay_{20}}\right)^3.$$

При вещественных значениях $\lambda < 0$ решение имеет устойчивый предельный цикл

$$(y_{1\infty}/a)^2 + (y_{2\infty}/b)^2 = 1.$$

Трудным является прохождение точек, в которых $y_1(x) = 0$ или $y_2(x) = 0$, поскольку при этом производные решения бесконечны. При $\lambda \ll -1$ задача является жесткой.

Пример: взять $\lambda = -300$, $a = 1$, $b = 5$, $y_{10} = 2$, $y_{20} = 0.01$; вычислить решение и построить его на фазовой плоскости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арушанян О.Б., Залёткин С.Ф.* Практикум на ЭВМ. Решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений одношаговыми разностными методами. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989.
2. *Арушанян О.Б., Залёткин С.Ф., Захаров А.Ю., Калиткин Н.Н.* О тестировании программ решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Препринт ИПМ АН СССР им. М.В. Келдыша, № 139. М., 1983.
3. *Залёткин С.Ф.* Коллекция дифференциальных уравнений для тестирования вычислительных алгоритмов и программ // Вопросы конструирования библиотек программ. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. 54–71.
4. *Арушанян О.Б.* Автоматизация конструирования библиотек программ. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.

Поступила в редакцию
25.03.2000