

**УДК 629.7.07**

О. В. Лавренюк

Санкт-Петербургский Государственный Морской Технический Университет  
г. Санкт-Петербург, Россия

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРЕДЕЛОВ ПРОДАЖ  
АВИАБИЛЕТОВ С УЧЕТОМ СЕТЕВЫХ ЦЕН НА ПРОДУКТЫ**

*В статье рассмотрена задача определения оптимальных пределов продаж авиабилетов с учетом сетевых цен, определяемых через коэффициенты Лагранжа в задаче оптимизации. Проведено моделирование процесса продаж, показавшее высокую эффективность метода по сравнению с существующими подходами типа EMSR.*

Авиатранспортный рынок является наукоемкой и высокотехнологичной отраслью. Ситуация на современном рынке авиаперевозок требует от его участников применения всех доступных средств для увеличения прибыли. Поэтому российские авиакомпании активно перенимают опыт зарубежных в составлении оптимального расписания, в ценообразовании и в управлении доходами, используя различные математические модели [3].

В статье рассмотрена задача построения оптимальной стратегии продаж авиабилетов на продукты с учетом сетевых цен, вычисляемых с помощью коэффициентов Лагранжа (теневых цен) в задаче математического программирования. Оптимальная стратегия предполагает определение так называемой системы вложенных пределов бронирования авиабилетов для всех рейсов. Предел бронирования — количество мест на данном рейсе, выделяемых данному продукту для продажи. Вложенность означает, что на более дорогой билет всегда открыта продажа [2].

Пусть имеется полетное расписание, включающее в себя  $L$  рейсов. На базе этого расписания существует  $P$  продуктов. Покупатель приобретает не билет на

рейс, а определенную услугу по перелету — продукт, в который может входить несколько рейсов, а также сочетания этих рейсов могут различаться по классу обслуживания, например, бизнес и эконом классы. Предполагается, что спрос на продукт  $p \in P$  представляет собой нормально распределенную случайную величину с параметром положения  $m_p$  и параметром масштаба  $a_p$ . Цену на продукт  $p$  обозначим через  $f_p$ .

Пределы бронирования для двух ценовых классов с соотношением цен  $r_2 > r_1$  на каком-либо одном рейсе с вместимостью  $Cap_l$  определяет правило Литтлвуда [1] по формуле:

$$F_1(y_1) = 1 - r_2/r_1,$$

где  $F_i(x)$  — функция распределения спроса, и уровень защиты  $y_j$  показывает количество мест, зарезервированных для продажи данному классу  $j$ . Авиакомпании на практике используют гораздо больше ценовых классов и, соответственно, им требуется более сложные модели управления. Обобщением модели Литтлвуда для  $n$  ценовых классов является эмпирический метод EMSR (Expected Marginal Seat Revenue), имеющий различные версии. В дальнейшем в статье будет использован метод EMSRb [2].

В случае, когда авиакомпания продает билеты на продукты, а не на рейсы, возникает сложная структура взаимодействия прибыли от продажи этих продуктов между рейсами. И, чтобы воспользоваться методом EMSRb, необходимо найти сетевую цену продукта — доход от продажи данного продукта для конкретного рейса. Для нахождения сетевых цен продуктов необходимо решить задачу математического программирования, формулировка которой сводится к определению коэффициентов Лагранжа  $k_l$ , а также пределов бронирования  $x_p$ , обеспечивающих максимум ожидаемого дохода от продаж. Ожидаемый доход представляет собой скалярное произведение вектора доходов  $F_p$  от продажи одной единицы продукта типа  $p$  и вектора математических ожиданий  $M_p$  числа проданных на этот продукт билетов, при условии, что их может быть продано не более  $x_p$  [4].

$$\sum_{p=1}^P F_p M_p \rightarrow \max,$$

где

$$M_p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}a_p} \int_{-\infty}^{x_p} e^{-\frac{(x-m_p)^2}{2a_p^2}} dx + \frac{x_p}{2} \operatorname{Erf} \left( \frac{x_p - m_p}{\sqrt{2}a_p} \right).$$

Естественными ограничениями являются условия по вместимости воздушных судов (ВС) и неотрицательности пределов бронирования:

$$\sum_{p \in P_l} x_p \leq Cap_l$$

$$x_p \geq 0, \quad \forall p = 1, \dots, P$$

где  $P_l$  – множество всех продуктов, которые входят в рейс  $l$ .

Функция Лагранжа, в данном случае, примет вид:

$$F(\bar{x}, \bar{k}, \bar{b}) = \sum_{p=1}^P F_p M_p + \sum_{l=1}^L k_l g_l + \sum_{p=1}^P b_p w_p,$$

где  $g_l$  и  $w_p$  – условия ограничения по вместимости и неотрицательности пределов бронирования соответственно, а  $k_l$  и  $b_p$  – коэффициенты Лагранжа для данных ограничений. Для нахождения коэффициентов Лагранжа был разработан эффективный алгоритм, реализованный в компьютерной математической среде *Mathematica*.

Сетевая цена  $r_{pl}$  для продукта  $p$  на рейсе  $l$  вычисляется по формуле:

$$r_{pl} = f_p + k_l - \sum_{l \in L_p} k_l$$

где  $L_p$  – множество всех рейсов, в который входит продукт  $p$ .

Пределы бронирования продуктов на каждом рейсе вычисляются по методу EMSRb, при этом в качестве исходных данных используется вместимость  $Cap_l$ , сетевые цены  $r_{pl}$  и прогноз спроса с параметрами  $m_p$  и  $a_p$ .

Рассмотрим простой модельный пример. Возьмем два рейса: из пункта  $A$  в пункт  $B$  с вместимостью 50 человек и  $B - C$  с вместимостью 70 человек. Эти

рейсы образуют три маршрута (пары городов - пункт отправления и пункт прибытия). Предположим, что на каждом маршруте существует два ценовых класса, также у нас имеется прогноз пассажиропотока на эти продукты. Все эти данные указаны в таблице 1.

Таблица 1.

Продукт + Класс бронирования	Цена продукта RUR	Математическое ожидание спроса	СКВО
<i>A – B</i> Full	<b>4000</b>	<b>15</b>	<b>5</b>
<i>A – B</i> Sale	<b>2400</b>	<b>25</b>	<b>8</b>
<i>B – C</i> Full	<b>7000</b>	<b>30</b>	<b>9</b>
<i>B – C</i> Sale	<b>4200</b>	<b>40</b>	<b>13</b>
<i>A – B – C</i> Full	<b>10000</b>	<b>10</b>	<b>4</b>
<i>A – B – C</i> Sale	<b>6000</b>	<b>22</b>	<b>7</b>

После применения данной модели мы получим следующие результаты.

Коэффициенты Лагранжа для рейсов *A – B* **2017.18** и *B – C* **3801.75**.

Сетевые цены указаны в таблице 2.

Таблица 2. Сетевые цены.

	<i>A – B</i> Full	<i>A – B</i> Sale	<i>B – C</i> Full	<i>B – C</i> Sale	<i>A – B – C</i> Full	<i>A – B – C</i> Sale
<i>A – B</i>	<b>4000</b>	<b>2400</b>			<b>6198.25</b>	<b>2198.25</b>
<i>B – C</i>			<b>7000</b>	<b>4200</b>	<b>7982.82</b>	<b>3982.82</b>

Вычисленные пределы бронирования для всех продуктов указаны в таблице 3.

При этом использовано стандартное вложение [2].

Таблица 3. Система вложенных пределов бронирования по рейсам.

	<i>A – B – C</i> Full	<i>B – C</i> Full	<i>A – B</i> Full	<i>B – C</i> Sale	<i>A – B</i> Sale	<i>A – B – C</i> Sale
<i>A – B</i>	<b>50</b>		<b>41.4911</b>		<b>24.8696</b>	<b>2.70153</b>
<i>B – C</i>	<b>70</b>	<b>64.6382</b>		<b>31.9797</b>		<b>0</b>

Для определения эффективности данной стратегии был смоделирован процесс продажи билетов на продукты. Используя параметры прогноза спроса для каждого продукта, был сгенерирован поток запросов.

Продавая билет на продукт *p*, мы уменьшаем на единицу текущую вместимость всех рейсов, которые включают в себя этот продукт, поэтому

запрос на покупку принимается при условии, что все соответствующие текущие вместимости ВС и все пределы бронирования этого продукта положительны.

Далее рассчитаем доход, который можно получить, продавая билеты, пользуясь пределами бронирования, полученными после применения данного метода и доход, полученный по стратегии «первый пришел — первый купил» (FCFS). Согласно стратегии FCFS, запрос на покупку принимается, если все соответствующие текущие вместимости ВС, содержащие данный продукт, положительны.

После проведения 100 модельных расчетов были получены следующие результаты: средний доход с применением данного метода определения пределов бронирования составил **515184** RUR, без применения данной модели – **502486** RUR. Таким образом, использование оптимизационных методов повышает средний доход на **2.5 %**, что в объемах авиакомпании может принести существенную выгоду. Все приведенные в статье вычисления были выполнены с помощью компьютерной математической среды *Mathematica*.

#### **Список использованных источников**

1. К. Littlewood (1972) Forecasting and Control of Passenger Bookings. *Proceedings of the 12th AGIFORS Symposium, October 1972, Nathanya, Israel*, pp. 95-117
2. К. Т. Talluri, G.J. van Ryzin (2005) *The Theory and Practice of Revenue Management*, Springer, 714 p
3. Л. В. Винградов, Г. М. Фридман, С. М. Шебалов, Математическое моделирование в оптимизации планирования авиационных перевозок: формулировки и методы решения типовых задач, *Научный Вестник МГТУГА*, 2008, стр. 49-57
4. О. В. Лавренюк, «Стохастическая модель определения оптимальной стратегии продаж», *Научная сессия ТУСУР-2009, Ч. 4., В-Спектр, Томск, 2009*, стр. 279-281