Алгоритмы построения оптимального дерева декомпозиции ациклического гиперграфа

Авторы: Быкова В.В., Трубникова К.С.
Источник: Труды XIV международной ЭМ'2012 конференции. Под ред. Олега Воробьёва. – Красноярск: Крас. гос. торг. эконом. ин-т, Сиб. фед. ун-т, 2010, с. 33-36.

Аннотация

Быкова В.В., Трубникова К.С. .Алгоритмы построения оптимального дерева декомпозиции ациклического гиперграфа. *Рассмотрены и изучены основные алгоритмы построение графов.*

Структура многих NP-трудных задач комбинаторной оптимизации может быть описана гиперграфом. Такие задачи возникают в системах принятия решений, БД, при анализе информационных и коммуникационных сетей, конструкторском проектировании радиоэлектронной и вычислительной аппаратуры, лингвистической трансляции, при формировании трафика компьютерных сетей и т.д. Дерево декомпозиции гиперграфа дает возможность организовать процесс поиска оптимального решения по принципу «разделяй и властвуй». Если древовидная ширина гиперграфа ограничена сверху некоторой константой, то многие NP-трудные задачи комбинаторной оптимизации могут быть решены за полиномиальное время [1]. Древовидная ширина – это числовая характеристика гиперграфа, определяемая через оптимальное дерево декомпозиции. К сожалению, сама задача нахождения оптимального дерева деком- позиции также NP-трудная, поэтому в алгорит- мической практике востребованы эвристики, позволяющие получать хорошие деревья декомпозиции за разумное время.

В данной работе предлагается эвристический алгоритм CTDA (Computing Tree Decomposition by Acyclicity), основанный на пополнении гиперграфа до М-ациклического. Свойство М-ацикличности (называемое также a-ацикличностью) широко эксплуатируется в различных приложениях теории гиперграфов, так как обеспечивает полиномиальную вычислимость ряда важных характеристик и графических конструкций, связанных с гиперграфами [2–4]. Употребление данного свойства в алгоритме CTDA дает возможность создавать за полиномиальное время дерево декомпозиции гиперграфа с разной степенью приближения к оптимальному дереву декомпозиции.

Гиперграф и дерево декомпозиции. Используем терминологию и обозначения, принятые в [3–5]. Пусть задан гиперграф H=(X, U) с конечным множеством вершин X и ребер U. В общем случае U – конечное семейство произвольных подмножеств множества X. Гиперграф H=(Æ, Æ) считается пустым. Пусть U(x) – множество ребер, инцидентных в H вершине xÎX; X(u) – множество всех вершин, инцидентных в H ребру uÎU. Число ½U(x)½ определяет степень вершины x, а ½X(u)½ - степень ребра u. Элемент гиперграфа степени 0 считают голым, степени 1 – висячим. Два ребра u, vÎU кратны в H, если X(u)=X(v). Ребро u вложено в ребро v, когда X(u)ÌX(v). Гиперграф называется минимальным, если он не содержит голых элементов, вложенных и кратных ребер. Ранг гиперграфа H=(X, U) определяется как максимальная степень его ребра: r(H)=maxuÎU½X(u)½ .

Существуют различные способы задания гиперграфа. Так, если X={x1, x2, ..., xn}, n³1, и U={u1, u2, ..., um}, m³1, то (n, m)-гиперграф H=(X, U) однозначно описывается матрицей инциденций A(H)={aij}, где aij=1 при xiÎX(uj) и aij=0 при xiÏX(uj), i=1, 2, ..., n, j=1, 2, ..., m. Универсальным способом задания гиперграфа также является кенигово представление. Кенигово представление гиперграфа H=(X, U) – это обыкновенный двудольный граф K(H), отражающий отношение инцидентности различных элементов гиперграфа, с множеством вершин XÈU и долями X, U. Многие структурные свойства гиперграфа определяются через одноименные свойства кенигова представления. Так, гиперграф H считается связным, если граф K(H) связный. Далее в качестве исходных гиперграфов будем рассматривать, не нарушая общности, только непустые, минимальные и связные гиперграфы.

Частично структурные особенности гиперграфа H=(X, U) описывают ассоциированные с ним обыкновенные графы L(2)(H) и L(H). Граф L(2)(H) представляет отношение смежности вершин, а граф L(H) - отношение смежности ребер гиперграфа H. Граф L(H)=(U, E) полагают помеченным, если всякому его ребру {ui, uj}ÎE поставлена в соответствие метка fij=X(ui)ÇX(uj)¹Æ, 1£i

С гиперграфом связана еще одна графовая структура, именуемая деревом декомпозиции. Под деревом декомпозиции гиперграфа H=(X, U) понимают пару ({Xi, iÎI}, T=(I, E)), где {Xi, iÎI} – семейство мешков - непустых подмножеств множества X, T=(I, E) – дерево, удовлетворяющее условиям [1]:

- ÈiÎIXi=X, то есть множество мешков покрывает множество вершин гиперграфа;
- если uÎU, то всегда существует iÎI, такое, что X(u)ÍXi, то есть для всякого ребра гиперграфа всегда существует хотя бы один мешок, содержащий все вершины этого ребра;
- для любой вершины гиперграфа xÎX множество {iÎI | xÎXi} индуцирует связное поддерево дерева T=(I, E).

Алгоритм Грэхема является элиминационной схемой последовательного применения к гиперграфу следующих операций: СУВ – слабое удаление висячих вершин (без удаления инцидентных им ребер); СУР – слабое удаление кратных, вложенных ребер (без удаления инцидентных им вершин). Обозначим через red(H) гиперграф, полученный в результате применения алгоритма Грэхема к гиперграфу H. Говорят, что алгоритм Грэхема для H завершается успешно, если red(H)=(Æ, Æ). Алгоритм Грэхема всегда приводит к одному и тому же гиперграфу red(H) независимо от порядка и числа удаляемых элементов на каждом шаге. Кроме того, операции СУВ и СУР сохраняют связность гиперграфа. Все это свидетельствует о рекурсивном характере алгоритма Грэхема и наследственности свойства M-ацикличности относительно операций СУВ и СУР (все гиперграфы, полученные из М-ациклического гиперграфа путем применения к нему этих операций, также М-ацикличны). Алгоритм Грэхема прост в реализации и имеет полиномиальную временную сложность. Операция СУР алгоритма Грэхема осуществляет минимизацию текущего гиперграфа.

Многие известные эвристические алгоритмы построения дерева декомпозиции гиперграфа опираются на свойства триангулированных графов [1]. Суть их в следующем: вначале для заданного гиперграфа H находится минимальная триангуляция графа L(2)(H) (минимальное пополнение L(2)(H) до триангулированного графа), а затем создается дерево клик для минимальной триангуляции. При этом структурные особенности самого гиперграфа H эксплуатируются лишь частично. Напомним, что граф называется триангулированным, если всякий его цикл длиной k³4 обладает хордой - ребром, соединяющим две несмежные вершины данного цикла (сам цикл при этом называется хордовым).

Ситуация I. Гиперграф Bi некомплектен, а его граф L(2)(Bi) триангулированный.

В этом случае все бесхордовые М-циклы гиперграфа Bi имеют длину k=3.

Ситуация II. Гиперграф Bi комплектный, но граф L(2)(Bi) не является триангулированным.

В данном случае гиперграф Bi содержит бесхордовые М-циклы только длины k>3.

Ситуация III. Гиперграф Bi некомплектен, и L(2)(Bi) не является триангулированным графом.

В этой ситуации гиперграф Bi содержит хотя бы один бесхордовый М-цикл длины k=3 и не менее одного бесхордового М-цикла длины k>3.

Ситуация I самая простая. Поскольку граф L(2)(Bi) триангулированный, он содержит не более úXú=n максимальных клик и все они могут быть найдены за время O(n2). Если для какой-либо максимальной клики YÍX графа L(2)(Bi) в гиперграфе Bi нет такого ребра u, что YÍX(u), множество Y необходимо добавить в Uadd в качестве дополнительного ребра. Подобные ребра устраняют в Bi бесхордовые М-циклы длины k=3, точнее, они становятся хордами для этих циклов. Тем самым гиперграф Bi превращается в комплектный, а значит, и в М-ациклический гиперграф. Нетрудно убедиться, что хорды для Bi являются также хордами для соответствующих бесхордовых М-циклов исходного гиперграфа H.

Ситуацию I можно легко распознать с помощью свойств триангулированных графов: любой триангулированный граф имеет симплициальную вершину; свойство триангулированности не утрачивается при удалении из графа отдельной вершины. Вершина графа называется симплициальной, если ее окрестность – клика. Таким образом, если последовательный поиск в L(2)(Bi) симплициальных вершин и их удаление из L(2)(Bi) приводят к пустому графу, то L(2)(Bi) – триангулированный граф. Так как граф L(2)(Bi) содержит не более n вершин, распознать его триангулированность можно за время O(n2).

Ситуации II и III мало чем отличаются друг от друга, так как требуют прежде всего триангуляции графа L(2)(Bi) – приведения его к триангулированному графу. Процесс триангуляции графа L(2)(Bi) – это насыщение графа новыми ребрами (хордами), что может привести к появлению новых клик. Даже если гиперграф Bi ранее был комплектным, после триангуляции графа L(2)(Bi) он может утратить это свойство. Чрезвычайно важно выполнять триангуляцию графа L(2)(Bi) наилучшим образом.

Пусть L(2)(Bi)=(V, W), VÍX, и Gi=(V, WÈ ÈWadd) - триангулированный граф, полученный насыщением графа L(2)(Bi) множеством хорд Wadd. Известно, что задача нахождения наименьшей триангуляции произвольного графа (наименьшего пополнения графа до триангулированного) является NP-трудной. Между тем триангуляцию хорошего качества можно всегда отыскать за время O(n3). Для этого достаточно воспользоваться эвристикой «минимальная степень». Суть ее в следующем: в графе L(2)(Bi) выбирается вершина наименьшей степени, ее окрестность дополняется до клики; затем данная вершина удаляется из L(2)(Bi). Указанные действия повторяются до тех пор, пока L(2)(Bi) не выродится в пустой граф. Эвристика «минимальная степень» в большинстве случаев дает триангуляцию, близкую к наименьшей триангуляции. Когда триангуляция Gi=(V, WÈWadd) для L(2)(Bi) построена, ситуации II и III вырождаются в ситуацию I. Поскольку число блоков для гиперграфа B=red(H) не превышает úUú=m>1, все действия этапа 2 алгоритма CTDA можно реализовать за время O(n3m) или при m=O(nt), t³1, за время O(nt+3).

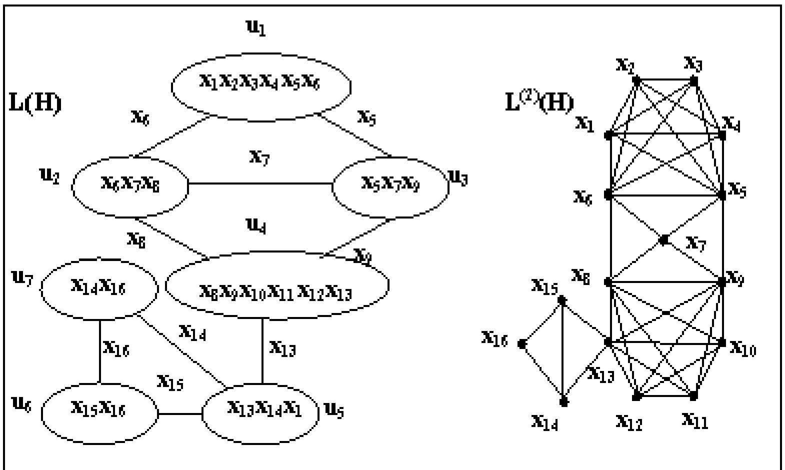

Рис. 1.

Результирующий гиперграф Hadd=(X, UÈ ÈUadd) является M-ациклическим. Его помеченный реберный граф L(Hadd) изображен на рисунке 2d. Остовное дерево наибольшего веса для L(Hadd) (оно выделено на рисунке 2d жирными линиями) определяет дерево декомпозиции гиперграфа H=(X, U) ширины 5. Построенное дерево декомпозиции имеет узлы с вложенными мешками, поэтому возможно сокращение числа узлов этого дерева без изменения его ширины.

После выделения блоков и без дальнейшего их анализа можно сразу образовать два дополнительных ребра – u¢8, u¢9, где X(u¢8)={x5, x6, x7, x8, x9} и X(u¢9)={x14, x15, x16}. Это приведет к дереву декомпозиции с меньшим числом узлов, чем на рисунке 2d, и той же ширины 5. Можно убедиться, что для заданного (16, 7)-гиперграфа H не существует дерева декомпозиции с шириной меньше 5. Таким образом, алгоритм CTDA в данном конкретном случае конструирует оптимальные деревья декомпозиции.

В заключение необходимо отметить, что представленный в работе эвристический алгоритм CTDA основан на характеризациях М-ациклических гиперграфов. В нем применяется эвристика «минимальная степень». Оптимальность алгоритма CTDA может быть потеряна только за счет этой эвристики. Основное преимущество алгоритма CTDA перед другими подобными алгоритмами - использование в полном объеме информации о структуре исходного гиперграфа. Алгоритм CTDA реализован в виде программы на языке C++. Вычислительные эксперименты показали, что алгоритм создает дерево декомпозиции, которое оптимально или близко к оптимальному, когда в исходном гиперграфе после предобработки алгоритмом Грэхема все ребра имеют приблизительно одну и ту же степень. Возможно включение в алгоритм CTDA новых эвристик, расширяющих область эффективного применения данного алгоритма.

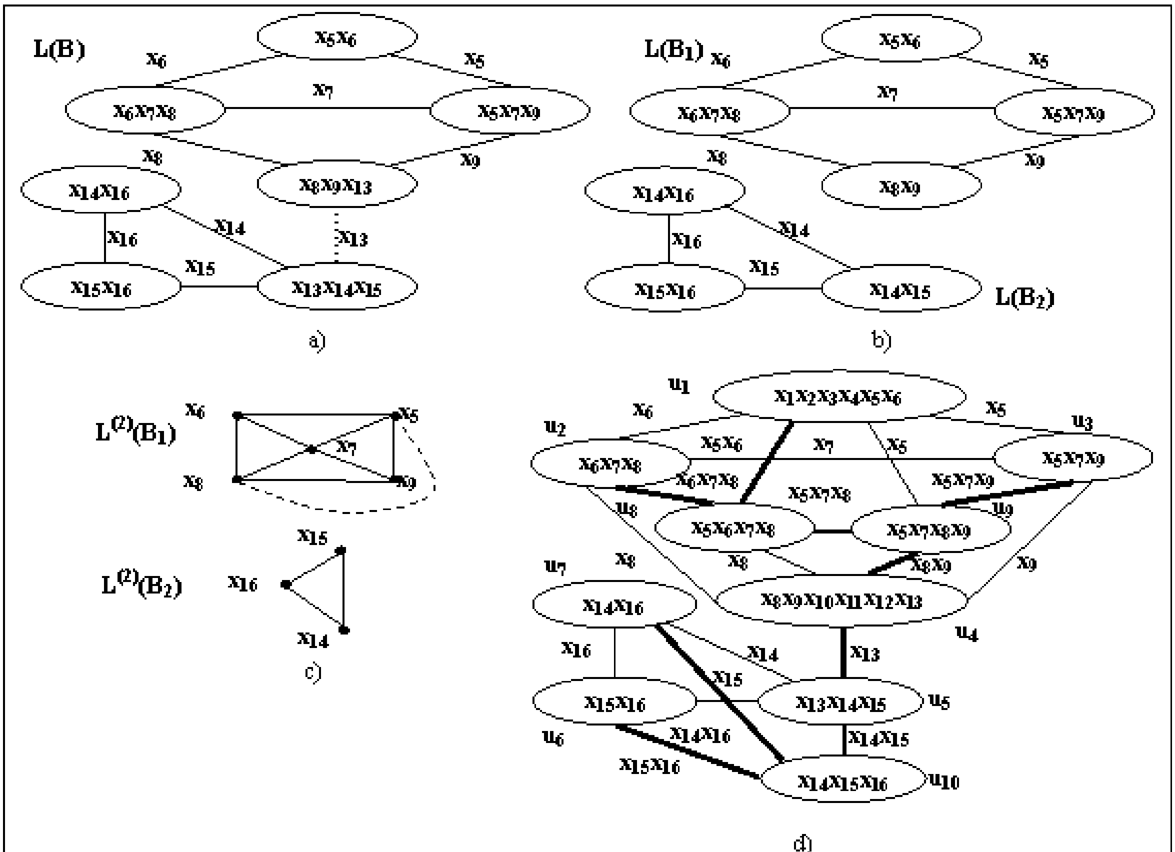

Рис. 2

Литература

1. Bodlaender H.L. Discovering treewidth. In Proceedings of the 31st Conference SOFSEM 2005, Springer-Verlag, Lecture

Notes in Computer Science 3381, 2005, pp. 1–16.

2. Мейер Д. Теория реляционных баз данных. М.: Мир, 1987.

3. Быкова В.В. Полиномиальные достаточные условия бихроматичности гиперграфа // Вест. КрасГУ: сер. Физ.-мат. науки. 2006. № 7. С. 98–106.

4. Быкова В.В. М-ациклические и древовидные гиперграфы // Изв. Томского политех. ун-та. 2010. Т. 317. № 2. С. 25–30.

5. Зыков А.А. Гиперграфы // Успехи математических наук. 1974. Т. 29. Вып. 6. С. 89–154.