Модел. и анализ информ. систем. Т. **19**, № **4** (2012) 144–153

УДК 519.17+519.716.5

Конструктивная классификация графов

Иорданский М.А.

Нижегородский государственный педагогический университет

e-mail: iordanski@mail.ru

получена 9 января 2012

Ключевые слова: граф, операция склейки, замкнутый класс, элементный и операционный базисы, конструктивное описание, характеристическое свойство

Рассматриваются классы графов, замкнутые относительно теоретико-множественных операций объединения и пересечения. Конструктивные описания замкнутых классов графов задаются порождающими элементными и операционными базисами. К настоящему времени они построены для многих классов графов. В данной работе решаются обратные задачи: по заданным порождающим базисам необходимо определить характеристические свойства соответствующих графов. В качестве порождающих базисов рассматриваются подмножества элементного и операционного базисов замкнутого класса всех графов.

1. Введение

Рассматриваются непомеченные, конечные, неориентированные графы, допускающие петли и кратные ребра. Графы без петель называются *мультиграфами*. Для *обыкновенных* графов, не содержащих петель и кратных ребер, используются обозначения: K_n – полный n-вершинный граф; C_n - простой цикл, содержащий n вершин; L_n – простая цепь, содержащая n вершин; O_n – пустой n-вершинный граф (O_o – нуль-граф). Для всех указанных видов графов естественно вводится понятие *изоморфизма* как биекции между множествами вершин, сохраняющей смежности, кратности ребер, петли [1].

Используется *конструктор* графов, включающий вместе с каждым графом его изоморфные копии. К конструктору применяется бинарная *операция склейки*, при выполнении которой производится отождествление изоморфных подграфов $G_1' \subseteq G_1$ и $G_2' \subseteq G_2$ графов-операндов G_1 и G_2. Операция склейки называется *тривиальной*, если $G_1' = G_1$ и(или) $G_2' = G_2$. В общем случае операция склейки не является однозначной. Для результирующих графов G используется обозначение $(G_1 \circ G_2)\,\tilde{G}$, где $\tilde{G}$ – граф, изоморфный отождествляемым подграфам G_1' и G_2', называемый *подграфом склейки*.

При фиксированных графах-операндах G_1 и G_2 граф $G \in (G_1 \circ G_2)\,\tilde{G}$ может зависеть от вида подграфа склейки $\tilde{G}$ (рис.1), выбора отождествляемых подграфов G_1' и G_2' в графах-операндах (рис. 2) и способа их отождествления (рис. 3).

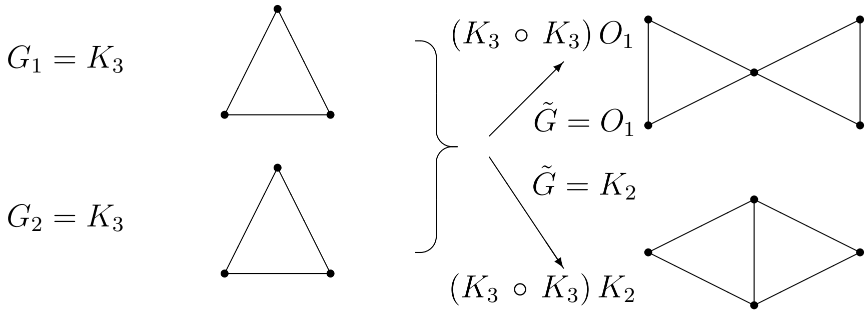

Рис. 1. Результат операции склейки зависит от вида подграфа склейки $\tilde{G}$.

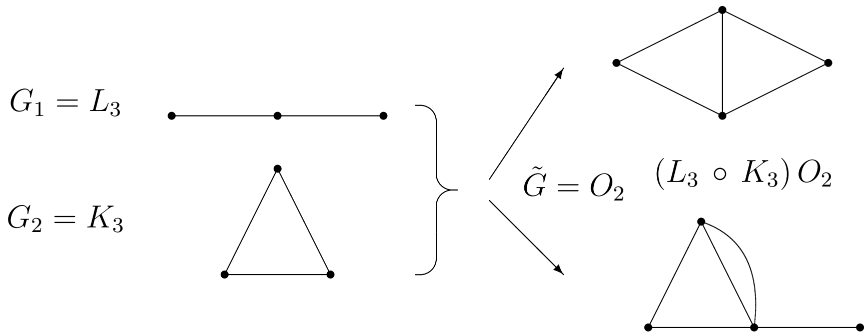

Рис. 2. Результат операции склейки по подграфу $\tilde{G} = O_2$ зависит от выбора отождествляемых вершин в графах-операндах G_1 и G_2.

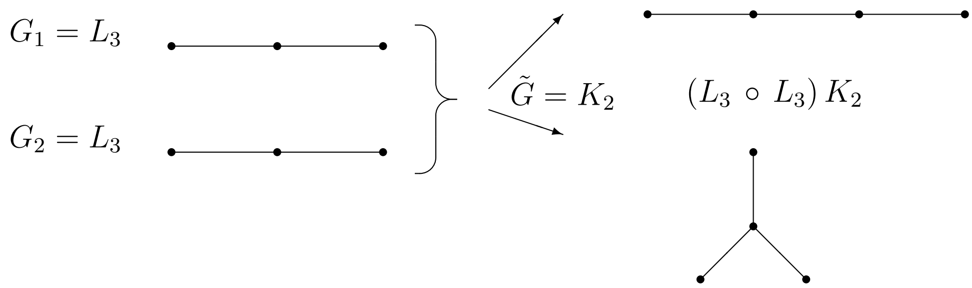

Рис. 3. Результат операции склейки по подграфу $\tilde{G} = K_2$ при фиксированном выборе подграфов K_2 в графах-операндах зависит от способа их отождествления.

Пусть $\Im$ некоторое множество графов. Граф G называется *суперпозицией* графов из $\Im$, если $G \in \Im$ или G можно получить путем последовательного применения операций склейки к графам из $\Im$ и к графам, полученным из $\Im$ с помощью операций склейки. При выполнении каждой операции склейки вид отождествляемых подграфов, их выбор в графах-операндах и способ отождествления определяются независимо. Процесс построения графа G из графов множества $\Im$ задает *операцию суперпозиции* графов из $\Im$. Если в операции суперпозиции хотя бы один из графов-операндов каждой операции склейки принадлежит множеству $\Im$, то операция суперпозиции называется *канонической*.

Множество всех графов, полученных из $\Im$ с помощью операций суперпозиции, обозначается через $[\Im]$. Если $[\Im] = \Im$ то класс $\Im$ называется *замкнутым*. Замкнутый класс графов называется *тривиальным*, если в операциях суперпозиции используются лишь тривиальные операции склейки. Подмножество графов $\Im' \subset \Im$ образует *полную систему* графов замкнутого класса $\Im$, если $[\Im'] = \Im$. Минимальная по включению полная система графов B_e называется *элементным базисом* замкнутого класса $\Im$.

Операции с изоморфными подграфами склейки $\tilde{G}$ относятся к одному *типу*. Множество, содержащее минимальное по включению число типов операций склейки, достаточное для построения из B_e всех графов замкнутого класса $\Im$ образует его *операционный базис* B_o. Операционный базис B_o задается множеством графов, изоморфных подграфам склейки $\tilde{G}$. Элементный и операционный базисы называются *порождающими базисами* замкнутого класса графов, определяющими его *конструктивное описание*.

В работах [2, 3, 4, 8, 9, 10, 11, 12, 13] получены конструктивные описания для классов всех графов, мультиграфов, обыкновенных графов, триангулированных, планарных, двудольных, расщепляемых, эйлеровых, гамильтоновых, а также для графов с различными комбинациями указанных свойств. Знание конструктивных описаний позволяет эффективно решать различные прикладные задачи на графах [5, 6].

В данной работе рассматриваются обратные задачи: по заданным порождающим базисам необходимо определить характеристические свойства графов соответствующих замкнутых классов. В качестве порождающих базисов рассматриваются различные подмножества элементного и операционного базисов замкнутого класса всех графов.

2. Способы порождения замкнутых классов графов

В множестве всех рассматриваемых графов можно выделить счетные последовательности графов, каждый из которых не может быть получен с помощью операций склейки из других графов этой же последовательности. На основе этого в работе [1] было установлено, что мощность множества всех замкнутых классов графов континуальна. Там же было показано, что каждый замкнутый класс графов имеет единственный элементный базис B_e. В работе [9] было показано, что каждый замкнутый класс графов имеет хотя бы один операционный базис B_o.

При изучении структуры замкнутых классов в функциональных системах с операциями используется понятие предполного класса [14]. Замкнутый класс $\Im_1 \subset \Im_2$ называется *предполным* в замкнутом классе $\Im_2$, если $[\Im_1] \neq \Im_2$, но при добавлении к $\Im_1$ любого элемента $r \in \Im_2 \setminus \Im_1$ получаем $[\Im_1 \cup r] = \Im_2$. Предполный класс $\Im_1$ называется *тривиальным*, если множество $\Im_2 \setminus \Im_1$ содержит ровно один элемент.

В соответствии с определением операции склейки графы-операнды G_1 и G_2 изоморфны подграфам результирующего графа $G \in (G_1 \circ G_2)\, \tilde{G}$ любой операции склейки. Учитывая это, все предполные замкнутые классы графов являются тривиальными - не содержащими лишь по одному графу из своего надкласса [7]. Таким образом, для замкнутых классов графов содержательным является понятие *базисной предполноты.* Класс $\Im_1$ является базисно предполным в $\Im_2$ по элементному базису, если B_e класса $\Im_1$ не содержит одного из графов элементного базиса класса $\Im_2$ и при этом операционные базисы обоих классов совпадают. Аналогично, класс $\Im_1$ является предполным в $\Im_2$ по операционному базису, если B_o класса $\Im_1$ не содержит одного из графов операционного базиса класса $\Im_2$ и при этом элементные базисы обоих классов совпадают.

Результирующий граф любой операции склейки сохраняет такие свойства графов-операндов как отсутствие изолированных вершин, петель или ребер. Нетрудно видеть также, что если все графы из элементного базиса B_e связны, то для получения несвязных графов в операционный базис B_o необходимо включение нуль-графа O_0. На основе этих свойств было доказано следующее утверждение.

Теорема 1.[2] *Замкнутый класс всех графов имеет элементный базис* $B_e = \{O_1, C_1, K_2\}$ *и операционный базис* $B_o = \{O_0, O_1, O_2\}$.

При этом все графы могут быть получены с помощью канонических суперпозиций. Для построения графов с помощью канонических суперпозиций в качестве отождествляемых подграфов необходимо использование графов, каждый из которых изоморфен подграфу хотя бы одного графа из B_e.

В общем случае это условие не является достаточным. Так например, колеса W_n, $n \geq 5$ не могут быть построены из графов K_3 с помощью канонических суперпозиций операций склейки по K_2 или по L_3, изоморфных подграфам графа K_3, если отождествляемые подграфы должны быть порожденными в графах-операндах.

Обозначим замкнутый класс графов с порождающими базисами B_e и B_o через $\Im(B_e, B_o)$. Справедлива

Лемма 1. *Графы замкнутого класса* $\Im(B_e, B_o)$*, операционный базис которого имеет вид* $B_o = \{O_0, O_1, \ldots, O_n\}$, $n = \max |V(G)|, G \in B_e$*, допускают реализацию с помощью канонических суперпозиций.*

Доказательство. Каждой операции суперпозиции, реализующей произвольный граф из $\Im(B_e, B_o)$, можно сопоставить его покрытие графам из B_e. Рассмотрим граф покрытия. Его вершинами являются подграфы, изоморфные графам из B_e а ребра соединяют вершины соответствующие пересекающимся подграфам.

В связном графе покрытия, содержащем не менее двух вершин, всегда найдется вершина, удаление которой сохраняет связность. Любому процессу удаления вершин из графа покрытия, сохраняющему связность, соответствует при обратном его рассмотрении операция канонической суперпозиции.

Так как при использовании склеек по пустым подграфам элементы покрытия поребěрно не пересекаются, то при любом порядке сборки графа все подграфы склейки будут пустыми. Варьироваться может лишь число отождествляемых вершин в каждой конкретной операции склейки. При использовании канонических суперпозиций оно не может превышать числа вершин в добавляемом графе $G \in B_e$, следовательно, все операции удовлетворяют условию леммы.

Для несвязных графов покрытия вначале с помощью канонической суперпозиции операций склейки по O_0 строится граф, каждая компонента связности которого изоморфна графу $G \in B_e$, являющемуся исходным в канонической суперпозиции, реализующей эту компоненту.

3. Структура базисно предполных замкнутых классов графов

На основе теоремы 1 и вышеприведенной леммы доказана

Теорема 2. *В классе всех графов содержится 35 нетривиальных замкнутых подклассов, являющихся базисно предполными в своих надклассах.*

Доказательство. Рассмотрим замкнутые классы графов, порождающие базисы которых являются подмножествами базисов B_e и B_o замкнутого класса всех графов. Конструктивные описания и характеристические свойства указанных классов приведены в таблице 1 для связных графов и в таблице 2 для графов, допускающих различное число компонент связности. Число вершин и ребер в графах (подграфах) обозначаются соответственно через $N(n)$ и $M(m)$.

Характеристические свойства формулируются на основе анализа типов операций склейки, используемых при построении графов. Графы, представляющие собой объединение графов G_1 и G_2 без пересечения, принадлежат множеству $(G_1 \circ G_2)\, O_0$. Графы, получающиеся добавлением ребра к текущему графу G, принадлежат множеству $(G \circ K_2)\, O_2$. Графы, получающиеся добавлением петли к текущему графу G, принадлежат множеству $(G \circ C_1)\, O_1$. Графы, получающиеся добавлением ребра с вершиной к текущему графу G, принадлежат множествам $(G \circ K_2)\, O_1$ или $((G \circ O_1)\, O_0, \circ K_2)\, O_2$. Учитывая лемму 1, в большинстве случаев при этом можно ограничиться каноническими суперпозициями.

Таблица 1

$B_e \setminus B_o$	O_1, O_2	O_2	O_1
O_1, C_1, K_2	Все связные графы	Граф C_1 или мультиграфы с $N \leq 2$	Графы без циклов C_n, $n \geq 2$
C_1, K_2	Графы с $M \geq 1$	Граф C_1 или мультиграфы с $N = 2$	Графы с $M \geq 1$ без циклов C_n, $n \geq 2$
O_1, K_2	Мультиграфы	Мультиграфы с $N \leq 2$	Деревья
K_2	Мультиграфы с $N \geq 2$	Мультиграфы с $N = 2$	Деревья с $N \geq 2$
O_1, C_1	—	—	Графы с $N = 1$
C_1	—	—	Графы с $N = 1$ и $M \geq 1$

Таблица 2

$B_e \setminus B_o$	O_0, O_1, O_2	O_0, O_2	O_0, O_1	O_0
O_1, C_1, K_2	Все графы	Нет графов с $N = 1$ и $M \geq 2$	Графы без циклов C_n, $n \geq 2$	Компоненты связности изоморфны $O_1 \vee C_1 \vee K_2$
C_1, K_2	Графы без изолированных вершин	Графы с совершенными паросочетаниями ребер [1]	Графы без изолированных вершин и циклов C_n, $n \geq 2$	Компоненты связности изоморфны $C_1 \vee K_2$
O_1, K_2	—	Мультиграфы	Леса	Компоненты связности изоморфны $O_1 \vee K_2$
K_2	Мультиграфы без изолированных вершин	Мультиграфы с совершенными паросочетаниями ребер	Леса без изолированных вершин	Компоненты связности изоморфны K_2
O_1, C_1	—	Компоненты связности с $n = 1$ и $m \geq 0$, при $N = 1$ $M \leq 1$	Компоненты связности с $n = 1$ и $m \geq 0$	Компоненты связности изоморфны $O_1 \vee C_1$
C_1	—	Компоненты связности с $n = 1$ и $m \geq 1$ $M - N = 2k$, $k = 0, 1, \ldots$	Компоненты связности с $n = 1$ и $m \geq 1$	Компоненты связности изоморфны C_1
O_1	—	—	—	Пустые графы

В качестве элементных базисов выбираются всевозможные подмножества графов из B_e, а в качестве операционных - минимальные по включению подмножества

[1]Четность суммы числа петель в компонентах с $n \geq 2$ должна совпадать с четностью суммы $\sum_1^q (m_i - 1)$, где q - число компонент с $n = 1$, m_i - число петель в i компоненте

графов из B_o, задающих типы операций, применимых к суперпозициям графов выбранных элементных базисов. Минимальность по включению означает, что замкнутый класс с тем же характеристическим свойством нельзя получить, используя любые их собственные подмножества. Подмножествам графов из B_o, не удовлетворяющих указанным ограничениям для выбранных элементных базисов, соответствуют пустые клетки в таблицах 1 и 2.

Используя данные из таблиц, построим для замкнутого класса всех графов диаграмму включений всех его замкнутых подклассов, являющихся базисно предполными в надклассах, дополнив нижнюю часть диаграммы четырьмя тривиальными замкнутыми классами (рис. 4).

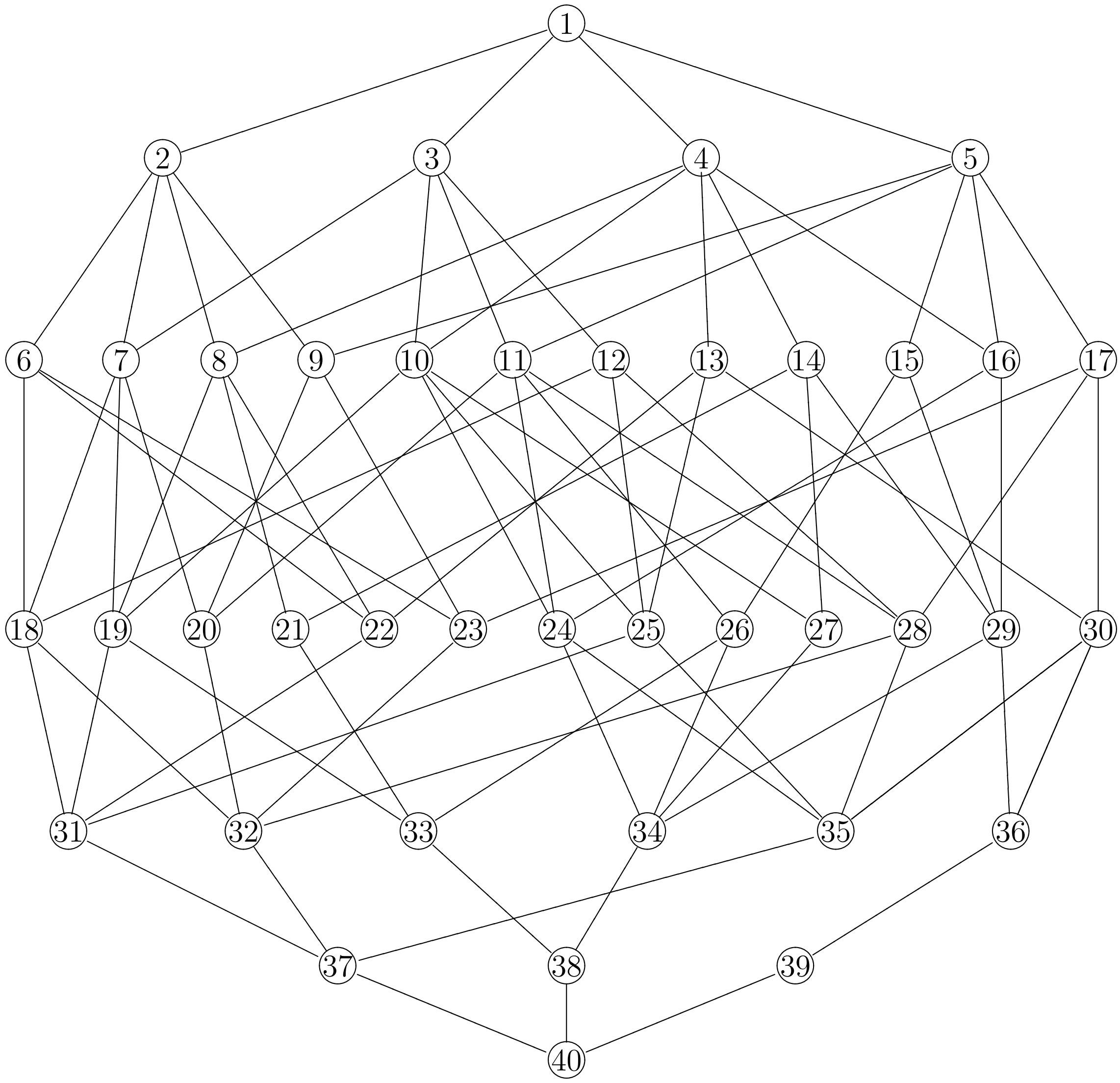

Рис. 4.

Номера, указанные на рис. 4, соответствуют замкнутым классам графов со следующими порождающими базисами:

1. $\Im(\{O_1, C_1, K_2\}, \{O_0, O_1, O_2\})$. 2. $\Im(\{O_1, C_1, K_2\}, \{O_1, O_2\})$.
3. $\Im(\{C_1, K_2\}, \{O_0, O_1, O_2\})$. 4. $\Im(\{O_1, C_1, K_2\}, \{O_0, O_1\})$. 5. $\Im(\{O_1, C_1, K_2\}, \{O_0, O_2\})$.
6. $\Im(\{O_1, K_2\}, \{O_1, O_2\})$. 7. $\Im(\{C_1, K_2\}, \{O_1, O_2\})$. 8. $\Im(\{O_1, C_1, K_2\}, \{O_1\})$.
9. $\Im(\{O_1, C_1, K_2\}, \{O_2\})$. 10. $\Im(\{C_1, K_2\}, \{O_0, O_1\})$. 11. $\Im(\{C_1, K_2\}, \{O_0, O_2\})$.
12. $\Im(\{K_2\}, \{O_0, O_1, O_2\})$. 13. $\Im(\{O_1, K_2\}, \{O_0, O_1\})$. 14. $\Im(\{O_1, C_1\}, \{O_0, O_1\})$
15. $\Im(\{O_1, C_1\}, \{O_0, O_2\})$. 16. $\Im(\{O_1, C_1, K_2\}, \{O_0\})$. 17. $\Im(\{O_1, K_2\}, \{O_0, O_2\})$.
18. $\Im(\{K_2\}, \{O_1, O_2\})$. 19. $\Im(\{C_1, K_2\}, \{O_1\})$. 20. $\Im(\{C_1, K_2\}, \{O_2\})$.
21. $\Im(\{O_1, C_1\}, \{O_1\})$. 22. $\Im(\{O_1, K_2\}, \{O_1\})$. 23. $\Im(\{O_1, K_2\}, \{O_2\})$.
24. $\Im(\{C_1, K_2\}, \{O_0\})$. 25. $\Im(\{K_2\}, \{O_0, O_1\})$. 26. $\Im(\{C_1\}, \{O_0, O_2\})$.
27. $\Im(\{C_1\}, \{O_0, O_1\})$. 28. $\Im(\{K_2\}, \{O_0, O_2\})$. 29. $\Im(\{O_1, C_1\}, \{O_0\})$.
30. $\Im(\{O_1, K_2\}, \{O_0\})$. 31. $\Im(\{K_2\}, \{O_1\})$. 32. $\Im(\{K_2\}, \{O_2\})$. 33. $\Im(\{C_1\}, \{O_1\})$.
34. $\Im(\{C_1\}, \{O_0\})$. 35. $\Im(\{K_2\}, \{O_0\})$. 36. $\Im(\{O_1\}, \{O_0\})$. 37. $\Im(\{K_2\}, \{K_2\})$.
38. $\Im(\{C_1\}, \{C_1\})$. 39. $\Im(\{O_1\}, \{O_1\})$. 40. $\Im(\{O_0\}, \{O_0\})$.

Графы из рассмотренных замкнутых классов обладают наиболее "сильными" характеристическими свойствами - для конструктивного описания соответствующих замкнутых классов графов достаточно задания конечных элементных и операционных базисов.

При переходе к другим характеристическим свойствам графов в соответствующих нетривиальных базисно предполных замкнутых классах выделяются подклассы, которые могут иметь счетные порождающие базисы, как например, эйлеровы и гамильтоновы графы [12, 13] и могут потребоваться ограничения на выбор отождествляемых подграфов в графах-операндах и способ отождествления, как для планарных графов [2].

Отметим в заключение, что на сложность конструктивных описаний могут влиять также ограничения внешние по отношению к характеристическим свойствам графов и связанные с регулированием степени избыточности описаний. Так например, требования, чтобы вершины подграфов склейки образовывали в результирующих графах разделяющие множества, минимальные разделяющие множества или минимальные разделяющие множества, содержащие минимальное число ребер, оказывают существенное влияние на мощность и состав порождающих базисов планарных графов [2, 4, 8].

Список литературы

1. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990. 384 с.

2. Иорданский М.А. Конструктивные описания графов // Дискретный анализ и исследование операций. 1996. Т. 3, № 4. С. 35–63.

3. Иорданский М.А. Функциональный подход к представлению графов // Доклады РАН. 1997. Т. 353, № 3. С. 303–305.

4. Иорданский М.А.Сложность конструктивных описаний планарных графов // Материалы IX Межгосударственной школы-семинара "Синтез и сложность управляющих систем" (Нижний Новгород, 16–19 декабря 1998 г.). М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 1999. С. 20–24.

5. Иорданский М.А. Конструктивные описания и экономное кодирование графов // Вестник Нижегородского государственного университета. Математическое моделирование и оптимальное управление. 2000. Вып. 1(22). С. 88–93.

6. Иорданский М.А. Оптимальные нумерации вершин графов // Математические вопросы кибернетики. 2001. Вып. 10. С. 83–102.

7. Иорданский М.А. Структура и способы порождения замкнутых классов графов // Дискретная математика. 2003. Т. 15, вып. 3. С. 105–116.

8. Иорданский М.А. Базисы планарных графов // Труды V Международной конференции "Дискретные модели в теории управляющих систем" (Ратмино, 26–29 мая 2003 г.). М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова, 2003. С. 36–38.

9. Бурков Е.В. Операционные базисы замкнутых классов графов // Материалы IX международного семинара "Дискретная математика и её приложения", Москва, 18–23 июня 2007 г. М.: Изд-во мехмата МГУ. 2007. С. 105–116.

10. Иорданский М.А. Конструктивные описания двудольных графов // Проблемы теоретической кибернетики. Тезисы докладов XV Международной конференции (Казань, 2–7 июня 2008 г.). Казань: Отечество, 2008. С. 44.

11. Иорданский М.А. Конструктивные описания расщепляемых графов // Материалы X Международного семинара "Дискретная математика и её приложения"(Москва, МГУ, 1–6 февраля 2010 г.) М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ. 2010. С. 306–308.

12. Бурков Е.В. Конструктивные описания планарных и эйлеровых графов //Вестник Нижегородского государственного университета. Математика. 2010. № 5(1). С. 165–170.

13. Иорданский М.А. Функциональные построения в теории графов // Проблемы теоретической кибернетики. Материалы XVI Международной конференции (Нижний Новгород, 20–25 июня 2011 г.) / Под ред. Ю.И. Журавлева. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2011. С. 183–187.

14. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Наука,1979. 272 с.

A Constructive Classification of Graphs

Iordanskii M.A.

Keywords: graph, sewing operation, closed class, element and operation bases, constructive description, characteristic property

The classes of graphs closed regarding the set-theoretical operations of union and intersection are considered. Some constructive descriptions of the closed graph classes are set by the element and operational generating basses. Such bases have been constructed for many classes of graphs. The backward problems (when the generating bases are given and it is necessary to define the characteristic properties of corresponding graphs) are solved in the paper. Subsets of element and operational bases of the closed class of all graphs are considered as generating bases.

Сведения об авторе:
Иорданский Михаил Анатольевич,
Нижегородский государственный педагогический университет,
заведующий кафедрой информатики и информационных технологий,
доктор физ.-мат. наук, профессор