

С.Г. КЮРЕГЯН, Б.М. МАМИКОНЯН, С.В. АБГАРЯН, С.Ш. БАЛАСАНЯН,  
В.Г. ДАЛЛАКЯН, Г.С. КЮРЕГЯН

## ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ГРУППОВОГО УЧЕТА АРГУМЕНТОВ

Рассмотрено математическое моделирование непрерывных технологических процессов методом группового учета аргументов (МГУА). Предложен итерационный алгоритм применения МГУА, на основе которого получаются новые альтернативные модели, позволяющие осуществлять выбор наилучшей.

*Ключевые слова:* случайный процесс, переменные, модель, итерация, селекция.

**Введение.** Сложные производственные технологические процессы характеризуются входными, выходными переменными и параметрами, определяющими внутреннее состояние объекта, и зависят от многочисленных, зачастую трудно учитываемых, случайных факторов. Поэтому получение адекватного математического описания таких процессов представляет собой сложную исследовательскую работу.

Для описания стохастических процессов применяют статистические методы, позволяющие извлекать нужные результаты при неполной информации о механизмах процесса. Одним из наиболее приемлемых методов для решения комплекса задач, связанных с управлением технологических процессов, является известный метод группового учета аргументов (МГУА) [1,2], реализующий на основании селекции переменных многорядную модель оптимальной сложности.

Предлагается применение итерационного МГУА, на основе которого получаем оптимальные альтернативные модели, позволяющие осуществлять выбор наилучших по ряду показателей.

**Краткое описание МГУА.** Принципиальное отличие МГУА от обычного регрессионного анализа заключается в том, что целью первого является достижение минимума целесообразно выбранного критерия селекции, а целью второго – достижение минимума среднеквадратической ошибки (СКО) на всех экспериментальных точках при заранее заданном виде уравнения регрессии, что зачастую носит субъективный характер. Поэтому МГУА предписывает разбивать данные наблюдений на две части: проверочную и обучающую последовательности. Причем обучающая последовательность используется для оптимизации коэффициентов уравнения регрессии, как и в обычном регрессионном анализе, а проверочная – для оценки степени регулярности по величине относительного значения СКО:

$$\square \square \left( 100N_{np} \square^2 / \sum_{j=1}^{N_{np}} y_j^2 \right)^{1/2} \% , \quad (1)$$

где  $\delta^2 = \sum_{j=1}^{N_{np}} (y_j - y_j^*)^2 / N_{np}$ ,  $N_{np}$  – длина проверочной последовательности;  $y_j$ ,  $y_j^*$  –

значения прогноза и наблюдения в  $j$ -й точке соответственно.

Рассмотрим построение модели с помощью квадратичных полиномов. На каждом  $v$ -ом уровне ( $v=1,2,\dots,m$ ) составляется  $r_v$  моделей из пар  $\mathbf{y}_{v-1,k} = [y_{(v-1,k),p}, y_{(v-1,k),q}]^T$  предыдущего уровня:

$$y_{v,k} = \mathbf{y}_{v-1,k}^T \mathbf{Q}_{v,k} \mathbf{y}_{v-1,k} + \mathbf{b}_{v,k}^T \mathbf{y}_{v-1,k} + c_{v,k}, \quad (2)$$

где для первого уровня ( $v=1$ )  $\mathbf{y}_{0,k} = [x_p, x_q]^T$ ;  $p=1, 2, \dots, n-1$ ;  $q=p+1, p+2, \dots, n$ ;  $x_p, x_q$  – независимые существенные переменные наблюдений – компоненты вектора  $\mathbf{x} = \{x_i\}$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ ;  $\mathbf{Q}_{v,k} = \{q_{ab}\}$  – симметричная матрица ( $2 \times 2$ );  $\mathbf{b}_{v,k} = [b_{k1}, b_{k2}]^T$  – матрица коэффициентов линейных слагаемых;  $c_{v,k}$  – свободный член;  $k=1, 2, \dots, r_v$ ;  $r_v = C_{r_{v-1}}^2$  – количество комбинаций пар  $(y_{(v-1,k),p}, y_{(v-1,k),q})$  на  $v$ -ом уровне (на первом уровне  $r_1 = C_n^2$ ).

Из  $r_v$  моделей на каждом уровне отбираются  $\Pi$  существенных по критерию минимума (1). Селекция продолжается до тех пор, пока СКО (1) от уровня  $k$  уровню уменьшается, а в случае ее возрастания осуществляется останов и возврат к предыдущему уровню, где выбирается та единственная модель  $y_m$  из (2), СКО которой минимальная. Таким образом, получаем иерархическую модель оптимальной сложности, зависящую от  $\Pi_1 \leq \Pi$  переменных  $x_i$  (некоторые переменные могли отпасть в результате селекции), погрешность  $\Delta_1$  которой минимальна. Обозначим набор переменных, полученных в результате селекции, вектором  $\mathbf{x}_m$ .

**Описание итерационного МГУА.** Принимая во внимание, что при построении модели МГУА из первоначальных  $n$  переменных в результате селекции отбирается  $\Pi$  наиболее существенных, поставим новую задачу. Примем компоненты вектора  $\mathbf{x}_m$  за исходные переменные и снова построим модель МГУА. В результате получим вторую иерархическую модель с числом переменных  $\Pi_2 \leq \Pi_1$  и погрешностью  $\Delta_2$ . Будем строить новые модели, вводя каждый раз в качестве исходных переменные  $x_m$ , полученные в результате селекции предыдущей модели, продолжая эти циклы (итерации) до тех пор, пока набор исходных переменных не сохранится после селекции. Сходимость подобных итераций обосновывается сходимостью алгоритма МГУА к оптимальному (в смысле минимума остаточной СКО) решению при любом заданном начальном наборе случайных переменных и доказана в [1,2]. Построенные таким образом  $M$  модели будут отличаться друг от друга количеством  $\Pi_s$  переменных ( $s=1,2,\dots,M$ ), количеством уровней иерархий и значением минимальной погрешности  $\Delta_s$ . Действительно, каждая переменная  $x_i$  входит в  $n-1$  пару с другими переменными. При переходе в следующий ряд иерархии, если он не последний, в результате селекции алгоритма МГУА могут сохраниться либо все  $\Pi$  переменные, либо может быть исключена только одна переменная. Аналогично обстоит дело и с переменными  $y_{(k)}$  любого  $v$ -го ряда. В последнем ряду иерархии выделяется одна переменная  $y_{mk} = f_k(y_{m-1,p}, y_{m-1,q})$ , в результате чего исключаются все переменные предпоследнего ряда, кроме  $y_{m-1,p}$  и  $y_{m-1,q}$ . Итак, в обратном направлении иерархии

определяются те переменные  $x_i$ , отобранные алгоритмом МГУА в результате селекции, которые наиболее существенны для описания данного процесса  $y_{mk}=f_k(x_m)$ . Из сказанного следует, что если изначально из набора исходных переменных  $x_i$  исключить хотя бы одну или же ввести приоритет хотя бы на одну, то в результате получим совершенно иную модель с меньшим или таким же, как в предыдущей модели, набором переменных  $x_m$ , таким же или новым количеством уровней и СКО, которая может быть как больше, так и меньше значения СКО предыдущей модели, что, по-видимому, зависит от свойств описываемого процесса и определяется с помощью самоорганизующегося алгоритма МГУА.

Поскольку все модели строятся на одной и той же обучающей последовательности, а погрешности определяются на одной и той же проверочной последовательности данных наблюдений, то полученные модели сопоставимы по погрешности  $\Delta_s$ , т.е. имеется возможность выбора наиболее приемлемой модели как с точки зрения минимальной погрешности, так и количества существенных переменных.

**Пример.** Проиллюстрируем предложенный подход на примере моделирования флотационного процесса обогащения молибденовой руды. В качестве исходных использовались среднесменные данные наблюдений за следующими четырьмя выходными показателями процесса в зависимости от  $n=12$  существенных входных и режимных переменных  $x$ , определенных экспертными оценками:

- процентное содержание молибдена в концентрате -  $y_1=f_1(\mathbf{x})$ ;
- массовый выход концентрата -  $y_2=f_2(\mathbf{x})$ ;
- **процентное извлечение молибдена в концентрат -  $y_3=f_3(x)$ ;**
- **прибыль производства от реализации продукции -  $y_4=f_4(x)$ .**

Программная реализация алгоритма решения задачи и отыскания математической модели оптимальной сложности по алгоритму МГУА с полиномами первой и второй степени выполнена на языке C++ в среде Microsoft Visual C++.

Для построения модели использовалась выборка из данных наблюдений. Как известно [2, 3], число точек интерполяции должно быть на единицу больше, чем число коэффициентов  $L$  аппроксимирующего полинома. Для обеспечения достаточной надежности расчетов необходимо принять объем выборки не менее трехкратного значения числа точек интерполяции. В соответствии с этим в нашем случае ( $L=6$  для квадратичного полинома) объем выборки принят  $N=40$ . Как показали предварительные расчеты [4, 5], СКО на проверочной последовательности достигала минимума при разбиении числа точек наблюдений в обучающей и проверочной последовательностях в соотношении  $N_{об}/N_{пр}=30/10$ .

В таблице приведены результаты построения моделей четырех выбранных выходных параметров флотационного процесса с использованием последовательных итераций МГУА, откуда следует, что:

- процедура итераций сходится;
- в процессе итераций продолжается фильтрация переменных и построение новых моделей;
- полученные модели отличаются от предыдущих количеством переменных, уровней и значением СКО.

Таблица

## Результаты построения моделей итерационным МГУА

№ модели, s	Вектор исходных переменных, $X$	Вектор переменных после селекции, $X_m$	Колич. уровней, $v$	СКО, $\Delta P_{\min}$
«Содержание молибдена в концентрате» ( $y_1$ )				
1	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}, X_{11}, X_{12}$ .	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{12}$ .	5	1,37
2	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{12}$ .	$X_1, X_2, X_4, X_6, X_7, X_8, X_9$ .	5	1,50
3	$X_1, X_2, X_4, X_6, X_7, X_8, X_9$ .	$X_1, X_2, X_4, X_6, X_7, X_8, X_9$ .	6	1,50
«Выход концентрата» ( $y_2$ )				
1	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}, X_{11}, X_{12}$ .	$X_1, X_2, X_6, X_7, X_8, X_{11}$ .	5	8,42
2	$X_1, X_2, X_6, X_7, X_8, X_{11}$ .	$X_1, X_2, X_7, X_8, X_{11}$ .	5	10,1
3	$X_1, X_2, X_7, X_8, X_{11}$ .	$X_1, X_2, X_7, X_8, X_{11}$ .	4	8,44
«Извлечение» ( $y_3$ )				
1	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}, X_{11}, X_{12}$ .	$X_1, X_3, X_4, X_7, X_8, X_9, X_{11}, X_{12}$ .	5	6,45
2	$X_1, X_3, X_4, X_7, X_8, X_9, X_{11}, X_{12}$ .	$X_1, X_4, X_7, X_8, X_{11}, X_{12}$ .	5	6,87
3	$X_1, X_4, X_7, X_8, X_{11}, X_{12}$ .	$X_4, X_7, X_8, X_{11}$ .	4	8,06
4	$X_4, X_7, X_8, X_{11}$ .	$X_4, X_7, X_8, X_{11}$ .	3	8,36
«Прибыль» ( $y_4$ )				
1	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}, X_{11}, X_{12}$ .	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_7, X_9$ .	5	8,77
2	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_7, X_9$ .	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_7, X_9$ .	5	8,22

Как видно из таблицы, среди моделей, построенных итерационным МГУА, имеются варианты, альтернативные первоначальному (первым). Так, например, в моделях «Содержание молибдена в концентрате» ( $y_1$ ) и «Извлечение» ( $y_3$ ) вторые модели обладают несколько большей СКО по сравнению с первыми, однако они проще по количеству содержащихся переменных. В моделях «Выход концентрата» ( $y_2$ ) первой модели можно противопоставить третью, в которой количество переменных и число уровней не единицу меньше. В модели «Прибыль» ( $y_4$ ) однозначно вторая модель предпочтительнее первой.

После выбора соответствующей модели программа представляет ее в среде Excel, где в третьей строке приводятся текущие значения переменных  $X_i$ , а в клетке 14С – значение соответствующей им выходной переменной  $y_j$ . Выбор среды Excel обусловлен удобством проведения всевозможных вычислительных процедур, включая и оптимизационные, построения таблиц и графиков.

Таким образом, в отличие от известного алгоритма МГУА [1], предложенный итерационный алгоритм предоставляет лицу, принимающему решение, возможность выбора наилучшей модели как с точки зрения простоты (количество переменных и число уровней), так и значения СКО, которая обуславливает точность построенной модели.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ивахненко А.Г., Юрачковский А.А.** Моделирование сложных систем по экспериментальным данным. – М.: Радио и связь, 1981. – 120 с.
2. **Ивахненко А.Г., Зайченко Ю.П., Дмитров В.Д.** Принятие решения на основе самоорганизации. – М.: Сов. радио, 1976. – 280 с.
3. **Крамер Г.** Математические методы статистики. – М.: Мир, 1975. – 648 с.
4. **Абгарян С.В.** Построение математической модели процесса флотации методом группового учета аргументов // Автоматика и вычислительная техника: Межв. сб. научн. тр.– Ереван / ЕрПИИ. Серия XV. - 1980. - Вып. 5. – С. 6 – 9.
5. **Кюрегян С.Г., Мамиконян Б.М., Абгарян С.В., Баласаян С.В.** Разработка автоматизированной системы управления флотационным процессом обогащения руды // Доклады Международного семинара «Конверсионный потенциал Армении и программы МНТЦ». Ч.2. – Ереван, 2000. - С. 181 – 184.

ГИУА. Материал поступил в редакцию 20.03.2003.

**Ս.Գ. ԿՅՈՒՐԵԴՅԱՆ, Բ.Մ. ՄԱՄԻԿՈՆՅԱՆ, Ս.Վ. ԱԲԳԱՐՅԱՆ,  
Ս.Շ. ԲԱԼԱՍՅԱՆՅԱՆ, Վ.Գ. ԴԱԼԼԱՔՅԱՆ, Գ.Ս. ԿՅՈՒՐԵԴՅԱՆ**

### **ԱՐԳՈՒՄԵՆՏՆԵՐԻ ԽՍԲԱՅԻՆ ՀԱՇՎԱՌՄԱՆ ԻՏԵՐԱՅԻՆ ՄԵԹՈԴ**

Դիտարկված է անընդհատ տեխնոլոգիական գործընթացների մաթեմատիկական մոդելավորումը արգումենտների խմբային հաշվառման մեթոդով (ԱԽՀՄ)։ Առաջարկված է ԱԽՀՄ-ի օգտագործման իտերացիոն ալգորիթմ, ինչի արդյունքում ստացվում են նոր այլընտրանքային մոդելներ, որոնք թույլ են տալիս կատարել լավագույնի ընտրությունը։

**S.G. KYUREGHYAN, B.M. MAMIKONYAN, S.V. ABGARYAN,  
S.Sh. BALASSANYAN, V.G. DALLAQYAN, G.S. KYUREGHYAN**

### **ITERATIVE METHOD OF THE GROUP REGISTRATION OF ARGUMENTS**

Mathematical modeling of continuous technological processes by the method of the group registration of arguments (MGRA) is considered. The iterative application algorithm of the MGRA, which results in new alternative models allowing to realize a choice of the best one is proposed.