5.6. ОБНАРУЖЕНИЕ СТОХАСТИЧЕСКОГО СИГНАЛА В АДДИТИВНОМ ШУМЕ

5.6.1. Оптимальный алгоритм обнаружения. Предположим, что полезный сигнал, так же как и аддитивный независимый от сигнала шум, является нормальным случайным процессом с нулевым средним и отличается от шума только корреляционной функцией. Задача обнаружения такого сигнала состоит в проверке гипотезы, что корреляционная функция наблюдаемого процесса равна корреляционной функции шума $B_ш(u, v)$, против альтернативы, что корреляционная функция наблюдаемого процесса равна корреляционной функции $B_c(u, v) + B_ш(u, v)$ — суммы сигнала и шума.

Выберем в качестве координат наблюдаемого процесса независимые величины

$$x_k = \sqrt{\lambda_k} \int\limits_{-T}^{T} x(t)\, \varphi_k(t)\, dt, \quad k = 1, 2, \ldots, N, \tag{5.131}$$

где $x(t)$ — реализация принятого процесса на интервале $(-T, T)$, а λ_k и $\varphi_k(t)$ — собственные числа и собственные функции (ненормированные) линейного интегрального уравнения [см. (3.118)]

$$\int\limits_{-T}^{T} B_c(t, y)\, \varphi(y)\, dy = (\lambda - 1) \int\limits_{-T}^{T} B_ш(t, y)\, \varphi(y)\, dy, \quad |t| \leqslant T, \tag{5.132}$$

причем нормировка собственных функций производится согласно равенству

$$\lambda_k \int\limits_{-T}^{T} \int\limits_{-T}^{T} B_ш(t, y)\, \varphi_k(t)\, \varphi_m(y)\, dt\, dy = \delta_{km}. \tag{5.133}$$

В соответствии с (3.120) логарифм отношения правдоподобия для выборки $x_1, \ldots, x_N$ конечного размера N имеет вид

$$\ln l(x_1, \ldots, x_N) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \frac{\lambda_k - 1}{\lambda_k} x_k^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \ln \lambda_k. \tag{5.134}$$

Правило выбора решения формулируется теперь следующим образом: сигнал присутствует, если

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{\lambda_k - 1}{\lambda_k} x_k^2 \geqslant 2 \ln c + \sum_{k=1}^{N} \ln \lambda_k, \tag{5.135}$$

и отсутствует, если выполняется неравенство, обратное (5.135). Таким образом, алгоритм обнаружения стохастического сигнала сводится к вычислению взвешенной суммы квадратов выборочных данных (некоррелированных координат) и сравнению с заранее устанавливаемым порогом

$$K_N = 2\ln c + \sum_{k=1}^{N} \ln \lambda_k. \qquad (5.136)$$

Этот алгоритм *оптимален* по любому из введенных в первой главе (непоследовательных) критериев качества. Выбор того или иного критерия отражается лишь на величине порога (константы c).

Условные вероятности ложной тревоги и пропуска сигнала определяются при помощи распределений (3.126), (3.126′).

5.6.2. Обнаружение на фоне белого шума. Интерпретацию алгоритма обнаружения стохастического сигнала в аналоговой форме рассмотрим для случая, когда аддитивный шум *белый*, т. е. $B_ш(\tau) = N_0\,\delta(\tau)$. В этом случае собственные числа λ_k равны

$$\lambda_k = 1 + \frac{1}{N_0 \mu_k}, \qquad (5.137)$$

где μ_k — собственные числа линейного однородного интегрального уравнения

$$\varphi(t) = \mu \int_{-T}^{T} B_с(t, y)\,\varphi(y)\,dy, \qquad (5.138)$$

причем собственные функции $\tilde{\varphi}_k(t)$ исходного уравнения связаны с собственными функциями уравнения (5.138) соотношением

$$\varphi_k(t) = \sqrt{N_0 \lambda_k}\;\tilde{\varphi}_k(t). \qquad (5.139)$$

Наличие аддитивного белого шума исключает сингулярность, и, следовательно, суммы в выражении (5.134) отношения правдоподобия имеют конечные пределы при $N \to \infty$ (см. п. 3.3.14). Рассмотрим сумму в левой части (5.135) при $N \to \infty$. Подставляя вместо x_k его выражение из (5.131) и учитывая (5.132), (5.138), (5.139), получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k - 1}{\lambda_k} x_k^2 = \frac{1}{N_0} \int_{-T}^{T} \int_{-T}^{T} x(u)\,x(v) \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(u)\,\varphi_k(v)}{1 + N_0 \mu_k}\right] du\,dv. \qquad (5.140)$$

Функция двух переменных

$$h(u, v) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(u)\,\varphi_k(v)}{1 + N_0 \mu_k} \qquad (5.141)$$

удовлетворяет интегральному уравнению (см. § 3.12)

$$\int_{-T}^{T} B_с(t, u)\,h(u, v)\,du + N_0 h(t, v) = B_с(t, v), \qquad (5.142)$$

$$|t| \leqslant T, \quad |v| \leqslant T.$$

Действительно, подставляя в левую часть (5.142) выражение $h(u, v)$, изменяя порядок суммирования и интегрирования и учитывая (5.138), получаем

$$\int_{-T}^{T} B_c(t, u)\, h(u, v)\, du = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(t)\, \varphi_k(v)}{\mu_k (1 + N_0 \mu_k)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(t)\, \varphi_k(v)}{\mu_k} - N_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(t)\, \varphi_k(v)}{1 + N_0 \mu_k}.$$

Если учесть, что первая сумма представляет ортогональное разложение корреляционной функции сигнала

$$B_c(t, v) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(t)\, \varphi_k(v)}{\mu_k}, \tag{5.143}$$

а вторая сумма в соответствии с (5.141) равна $N_0\, h(t, v)$, то справедливость высказанного утверждения становится очевидной.

Используя (5.140) и (5.141), перепишем правило (5.135) выбора решения следующим образом: сигнал присутствует в белом аддитивном шуме, если для наблюдаемой реализации $x(t)$

$$\frac{1}{N_0} \int_{-T}^{T} \int_{-T}^{T} h(u, v)\, x(u)\, x(v)\, du\, dv \geqslant K, \tag{5.144}$$

где

$$K = 2 \ln c + \sum_{i=1}^{\infty} \ln \lambda_i \tag{5.144'}$$

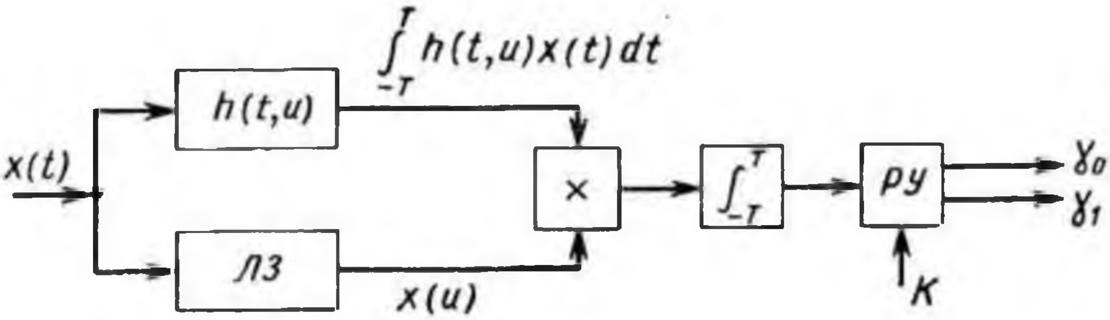

Рис. 5.5. Структурная схема оптимального обнаружителя стохастического сигнала.

и $h(u, v)$ — решение интегрального уравнения (5.142). Бесконечная сумма в (5.144′) сходится и выражается через *резольвенту* ядра $B_c(t, u)$ уравнения (5.142) [см. (3.136)]. Вероятности ложной тревоги α и пропуска сигнала β определяются в рассматриваемом случае по формулам (3.141) и (3.141′).

Из (5.144) следует, что оптимальное устройство обнаружения стохастического (нормального) сигнала на фоне аддитивного нормального белого шума представляет *нелинейный* фильтр второго порядка [см. п. 4.3.2], за которым следует безынерционный пороговый элемент (рис. 5.5).

Заметим, что уравнение (5.142) не отличается от (4.26). Следовательно, фильтр с характеристикой (5.141) представляет оптимальный фильтр, на выходе которого получаем оценку сигнала $\hat{\xi}(t)$ по критерию минимума среднего квадрата ошибки. Указанное обстоятельство позволяет представить неравенство (5.144) в виде

$$\frac{1}{N_0}\int_{-T}^{T}\hat{\xi}(v)\,x(v)\,dv \geqslant K. \tag{5.145}$$

Сравнивая (5.145) с правилом обнаружения детерминированного сигнала $s(t)$ на фоне аддитивного белого шума [см. (5.26)], замечаем интересную аналогию: выражение (5.145) получается из (5.26) заменой $s(t)$ на оценку $\hat{\xi}(t)$ нормального стохастического сигнала по критерию минимума среднего квадрата ошибки.

5.6.3. Энергетический приемник. Предположим, что и сигнал, и помеха представляют нормальные случайные процессы с *независимыми значениями*, нулевыми средними и дисперсиями N_c и N_0 соответственно. Оптимальное правило обнаружения сигнала по n независимым наблюдениям $x_1, \ldots, x_n$, $x_i = x(t_i)$, $i = 1, \ldots, n$ формулируется, как нетрудно доказать, следующим образом: сигнал присутствует, если

$$\frac{N_c/N_0}{N_0+N_c}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \geqslant 2\ln c + n\ln\left(1+\frac{N_c}{N_0}\right) \tag{5.146}$$

или

$$\frac{1}{N_0}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \geqslant \gamma^2, \tag{5.147}$$

где

$$\gamma^2 = 2\left(1+\frac{N_0}{N_c}\right)\ln\left[c\left(1+\frac{N_c}{N_0}\right)^{n/2}\right]. \tag{5.148}$$

При достаточно большом размере выборки n сумму в левой части (5.147) можно заменить интегралом

$$\frac{1}{N_0}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \sim \frac{1}{N_0}\int_{-T}^{T} x^2(t)\,dt. \tag{5.149}$$

Из (5.147) и (5.149) следует, что алгоритм обнаружения сводится к сравнению отношения энергии наблюдаемого процесса $x(t)$ к спектральной плотности шума с некоторой константой γ^2, определяемой согласно (5.148) величиной N_c/N_0 и постоянной c (т. е. выбором критерия). Приемное устройство, осуществляющее указанную процедуру, может быть названо *энергетическим приемником*.

Так как x_k — независимые нормальные случайные величины с нулевыми средними, то случайные величины

$$\frac{1}{N_0}\sum_{k=1}^{n} x_k^2, \quad \frac{1}{N_c+N_0}\sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

(соответственно, когда сигнала нет и когда сигнал присутствует) имеют χ^2-распределение с n степенями свободы. Вероятности ложных тревог и правильного обнаружения равны [см. формулу (21) в задаче 3.15 в первой книге]:

$$\alpha = 1 - \frac{\Gamma(n/2,\ \gamma^2/2)}{\Gamma(n/2)}, \tag{5.150}$$

$$1-\beta = 1 - \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2},\ \frac{\gamma^2}{2}\frac{N_0}{N_c+N_0}\right)}{\Gamma(n/2)}, \tag{5.151}$$

где $\Gamma(x, y)$ — неполная гамма-функция. Если размер выборки большой ($n \gg 1$), то используя асимптотическое приближение неполной гамма-функции $\Gamma(x, y)$ интегралом Лапласа $F(z)$ [см. (1.43) в первой книге], получаем из (5.150) и (5.151)

$$\alpha \sim 1 - F\left[(\gamma - \sqrt{n})\sqrt{2}\right], \tag{5.152}$$

$$\beta \sim F\left[(\gamma\sqrt{N_0/(N_c+N_0)} - \sqrt{n})\sqrt{2}\right]. \tag{5.152'}$$

Заметим, что при $B_c(\tau) = N_c\,\delta(\tau)$ из (5.142) следует

$$h(t,\ v) = \frac{N_c}{N_c+N_0}\,\delta(t-v). \tag{5.153}$$

Подставляя (5.153) в (5.144), получаем

$$\frac{N_c/N_0}{1+(N_c/N_0)}\,\frac{1}{N_0}\int_{-T}^{T} x^2(t)\,dt \geqslant 2\ln c + N\ln\left(1+\frac{N_c}{N_0}\right),$$

что по существу не отличается от (5.146). Однако в этом случае правило обнаружения *сингулярное*, так как по любой реализации конечной длительности можно при $N\to\infty$ обнаруживать сигнал с вероятностью, равной единице.

5.6.4. Последетекторное обнаружение. Рассмотрим теперь оптимальный амплитудный метод обнаружения стохастического сигнала, сохранив предположения, сделанные в начале раздела 5.5. Функции правдоподобия в этом случае имеют вид [см. (5.88)]

$$W_N(r_1, \ldots, r_N \mid H_0) = \prod_{k=1}^{N} r_k\,e^{-r_k^2/2}, \quad r_k \geqslant 0, \tag{5.154}$$

$$W_N(r_1, \ldots, r_N \mid H_1) = \prod_{k=1}^{N} \frac{r_k}{1+(\sigma_c^2/\sigma^2)}\,e^{-r_k^2/2\,[1+(\sigma_c^2/\sigma^2)]}, \tag{5.155}$$

$$r_k \geqslant 0, \quad k = 1, \ldots, N,$$

где σ_c^2 — дисперсия сигнала. Отношение правдоподобия равно

$$l(r_1, \ldots, r_N) = \left(1 + \frac{\sigma_c^2}{\sigma^2}\right)^{-N} \exp\left\{\frac{\sigma_c^2/\sigma^2}{2(1+\sigma_c^2/\sigma^2)} \sum_{k=1}^{N} r_k^2\right\}. \quad (5.156)$$

Правило решения формулируется так: сигнал присутствует, если сумма квадратов выборочных значений r_k превышает порог [ср. (5.147)]

$$\sum_{k=1}^{N} r_k^2 \geqslant \gamma^2, \quad (5.157)$$

где γ — та же константа, что и в (5.148) при очевидной замене N_c/N_0 на $(\sigma_c/\sigma)^2$.

Так как r_k^2 — независимые экспоненциально распределенные случайные величины, то, используя результат, указанный в задаче 3.16 первой книги, находим, что $\sum\limits_{k=1}^{N} r_k^2$ имеет χ_{2N}^2-распределение. Отсюда следует, что формулы (5.150) и (5.151) для вероятностей ложных тревог и пропусков сигнала *сохраняются без изменения в случае оптимального амплитудного метода обнаружения*. Таким образом, оптимальные процедуры обнаружения стохастического сигнала до и после детектирования совпадают. Этого совпадения следовало ожидать. Действительно, в рассматриваемом случае функции правдоподобия для выборок фаз, когда сигнал есть и когда его нет, не *отличаются друг от друга*:

$$W_N(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_N \mid H_0) = W_N(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_N \mid H_1) = (1/2\pi)^N,$$

так как одномерная плотность вероятности фазы стационарного нормального случайного процесса не зависит от энергетического спектра (дисперсии) процесса и всегда равна $1/2\,\pi$, $|\vartheta_i| \ll \pi$. Отношение правдоподобия в этом случае тождественно равно единице. Отсюда следует также, что в рассматриваемом случае по независимым выборкам фазы невозможно отличить сумму сигнала и шума от чистого шума, т. е. решить задачу обнаружения стохастического сигнала.

Для осуществления фазового метода обнаружения стохастического сигнала необходимо иметь независимые выборки разности фаз*) $\Delta\vartheta_1, \ldots$ $\ldots, \Delta\vartheta_N$, где $\Delta\vartheta_i = \vartheta(t_i + \tau) - \vartheta(t_i)$, $\tau > 0$. Используя формулу (8.82) в первой книге, находим функцию правдоподобия выборки разности фаз для шума

$$W_N(\Delta\vartheta_1, \ldots, \Delta\vartheta_N \mid H_0) = \left(\frac{1-R_0^2}{2\pi}\right)^N \times$$
$$\times \prod_{k=1}^{N} \left[\frac{1}{1-y_k^2} + \frac{(\pi/2) + \arcsin y_k}{(1-y_k^2)^{3/2}}\, y_k\right], \quad (5.158)$$
$$|\Delta\vartheta_k| \leqslant \pi, \ k = 1, \ldots, N,$$

где

$$y_k = R_0(\tau) \cos[\vartheta(t_k + \tau) - \vartheta(t_k)]; \quad (5.159)$$

$$R_0^2(\tau)=R_{c0}^2(\tau)+R_{s0}^2(\tau), \tag{5.160}$$

$$R_{c0}(\tau)=\frac{1}{\sigma^2}\int\limits_0^\infty F_{ш}(\omega)\cos(\omega-\omega_0)\tau d\omega; \tag{5.161}$$

$$R_{s0}(\tau)=\frac{1}{\sigma^2}\int\limits_0^\infty F_{ш}(\omega)\sin(\omega-\omega_0)\tau d\omega; \tag{5.162}$$

$F_{ш}(\omega)$, σ^2 — энергетический спектр и дисперсия шума. Функция правдоподобия суммы сигнала и шума равна

$$W_N(\Delta\vartheta_1,\ldots,\Delta\vartheta_N\,|\,H_1)=\left(\frac{1-R_1^2}{2\pi}\right)^N\times$$
$$\times\prod_{k=1}^{N}\left[\frac{1}{1-z_k^2}+\frac{(\pi/2)+\arcsin z_k}{(1-z_k^2)^{3/2}}z_k\right], \tag{5.163}$$
$$|\Delta\vartheta_k|\leqslant\pi,\ k=1,\ldots,N,$$

где

$$z_k=R_1(\tau)\cos[\vartheta(t_k+\tau)-\vartheta(t_k)]; \tag{5.164}$$

$$R_1^2(\tau)=R_{c1}^2(\tau)+R_{s1}^2(\tau); \tag{5.165}$$

$$R_{c1}(\tau)=\frac{1}{\sigma_c^2+\sigma^2}\int\limits_0^\infty[F_c(\omega)+F_{ш}(\omega)]\cos(\omega-\omega_0)\tau d\omega; \tag{5.166}$$

$$R_{s1}(\tau)=\frac{1}{\sigma_c^2+\sigma^2}\int\limits_0^\infty[F_c(\omega)+F_{ш}(\omega)]\sin(\omega-\omega_0)\tau d\omega; \tag{5.167}$$

$F_c(\omega)$, σ_c^2 — энергетический спектр и дисперсия сигнала.
Обозначая

$$R^2(\tau)=R_c^2(\tau)+R_s^2(\tau), \tag{5.168}$$

где

$$R_c(\tau)=\frac{1}{\sigma_c^2}\int\limits_0^\infty F_c(\omega)\cos(\omega-\omega_0)\tau d\omega, \tag{5.169}$$

$$R_s(\tau)=\frac{1}{\sigma_c^2}\int\limits_0^\infty F_c(\omega)\sin(\omega-\omega_0)\tau d\omega, \tag{5.170}$$

находим из (5.165)—(5.167)

$$R_1(\tau)=\frac{\sigma^2R_0(\tau)+\sigma_c^2R(\tau)}{\sigma^2+\sigma_c^2}. \tag{5.171}$$

Отношение правдоподобия равно

$$l(\Delta\vartheta_1, \dots, \Delta\vartheta_N) = \left(\frac{1-R_1^2}{1-R_0^2}\right)^N \times$$
$$\times \prod_{k=1}^{N} \left[\frac{1-y_k^2}{1-z_k^2} \frac{1+z_k(\pi/2+\arcsin z_k)(1-z_k^2)^{-1/2}}{1+y_k(\pi/2+\arcsin y_k)(1-y_k^2)^{-1/2}}\right], \qquad (5.172)$$
$$|\Delta\vartheta_i| \leqslant \pi, \; i=1, \dots, N.$$

Исследование общего случая представляется весьма трудным. Ограничимся случаем, когда выборки шума $\vartheta(t_k+\tau)$ и $\vartheta(t_k)$ не коррелированы, т. е. когда $R_0(\tau) \equiv 0$, $\tau > 0$ [см. (8.81) в первой книге] и когда $\sigma_c^2 \ll \sigma^2$ (*слабый* сигнал).
При этих условиях из (5.171) следует

$$R_1(\tau) = (\sigma_c/\sigma)^2 R(\tau). \qquad (5.173)$$

Полагая в (5.172) $R_0(\tau) \equiv 0$, используя (5.173), разлагая в ряд $\ln l(\Delta\vartheta_1, \dots, \Delta\vartheta_N)$ по степеням R и пренебрегая малыми величинами порядка $o(R^2)$, получаем

$$\ln l(\Delta\vartheta_1, \dots, \Delta\vartheta_N) \approx \frac{\pi R}{2}\left(\frac{\sigma_c}{\sigma}\right)^2 \sum_{k=1}^{N} \cos\Delta\vartheta_k +$$

$$+R^2\left(\frac{\sigma_c}{\sigma}\right)^4\left(2-\frac{\pi^2}{8}\right)\sum_{k=1}^{N}\cos^2\Delta\vartheta_k - NR^2\left(\frac{\sigma_c}{\sigma}\right)^4. \qquad (5.174)$$

Заменяя $\cos^2\Delta\vartheta_k$ его средним значением, равным 1/2, получаем из (5.174) следующее правило выбора решения: сигнал присутствует, если

$$\sum_{k=1}^{N} \cos\Delta\vartheta_k \geqslant \frac{2}{\pi R}\left(\frac{\sigma}{\sigma_c}\right)^2 \ln c + \frac{N\pi R}{8}\left(\frac{\sigma_c}{\sigma}\right)^2. \qquad (5.175)$$

Оптимальная процедура обнаружения состоит в сравнении выхода интегратора (сумматора) косинусов разности фаз с заранее установленным порогом.

Если $N \gg 1$, то распределение суммы независимых случайных величин $\cos\Delta\vartheta_k$ близко к нормальному со средними и дисперсией, равными (см. п. 8.4.4 в первой книге)

$$m_1\left\{\sum_{k=1}^{N} \cos\Delta\vartheta_k \,|\, H_0\right\} = 0, \qquad (5.176)$$

$$m_1\left\{\sum_{k=1}^{N} \cos\Delta\vartheta_k \,|\, H_1\right\} = \frac{N\pi R}{4}\left(\frac{\sigma_c}{\sigma}\right)^2, \qquad (5.177)$$

$$M_2\left\{\sum_{k=1}^{N} \cos\Delta\vartheta_k \,|\, H_0\right\} = M_2\left\{\sum_{k=1}^{N} \cos\Delta\vartheta_k \,|\, H_1\right\} = \frac{N}{2}. \qquad (5.178)$$

Вероятности ложных тревог и пропусков сигнала равны

$$\alpha = 1 - F\left[\frac{4\ln c}{\pi R\sqrt{2N}}\left(\frac{\sigma}{\sigma_c}\right)^2 + \frac{\pi R}{8}\left(\frac{\sigma_c}{\sigma}\right)^2\sqrt{2N}\right], \tag{5.179}$$

$$\beta = F\left[\frac{4\ln c}{\pi R\sqrt{2N}}\left(\frac{\sigma}{\sigma_c}\right)^2 - \frac{\pi R}{8}\left(\frac{\sigma_c}{\sigma}\right)^2\sqrt{2N}\right]. \tag{5.180}$$