ло бы точно указать координаты и скорости всех молекул в некоторый начальный момент времени, по законам механики составить систему дифференциальных уравнений и затем решить ее. На пути реализации такого метода пришлось бы столкнуться с непреодолимыми трудностями. Во-первых, принципиально невозможно указать точно положения и скорости молекул. Во-вторых, полученную систему из очень большого числа дифференциальных уравнений практически невозможно решить. К этому следует добавить, что поведение отдельной молекулы ничего не говорит о свойствах газа в целом (давлении, температуре, теплоемкости и др.). А ведь именно эти свойства, характеризующие некоторый усредненный эффект случайно движущихся молекул, представляют практический интерес. В данном примере следует отказаться от детерминистического метода и применить вероятностный, позволяющий получить нужный результат.

При вероятностном методе рассматривается статистическая модель, поведение которой в каждом конкретном испытании не может быть предсказано, но при многократных испытаниях в одних и тех же условиях подчинено определенным закономерностям. Теперь элементы случайного в явлениях не игнорируются, но по-прежнему учитываются только существенные и необходимые взаимозависимости, проявляющиеся как тенденция в массе случайных событий. Конкретные случайности индивидуального события не учитываются вследствие их частного характера.

В соответствии со сказанным выше, теорию вероятностей определяют как математическую науку, изучающую закономерности массовых случайных явлений.

Хотя все реальные процессы и явления в той или иной мере случайны, в тех случаях, когда случайные составляющие процесса не играют заметной роли, допустимо их детерминистическое рассмотрение. Напротив, в тех задачах, где случайные составляющие имеют определяющее значение, необходимо статистическое рассмотрение.

Применительно к радиотехнике роль статистических методов особенно возросла за последние годы. Это объясняется тенденцией увеличения дальности действия и повышения надежности и быстродействия современных радиотехнических устройств. При этом оказывается необходимым учитывать случайный характер передаваемых сигналов, их искажения при распространении и наличие помех.

§ 2. ИСХОДНЫЕ ПОНЯТИЯ. ВЕРОЯТНОСТЬ СОБЫТИЯ

В теории вероятностей рассматриваются явления (опыты), которые при одном и том же комплексе начальных условий в зависимости от случайных обстоятельств заканчиваются различными исходами (событиями). При этом, говоря об одном и том же комплексе начальных условий, подразумевают, что остаются без изменения основные существенные обстоятельства опыта.

В связи с тем, что заранее предсказать точный исход случайного опыта нельзя, при изучении случайных явлений возникает следующий кардинальный вопрос: как часто наступает то или иное событие при многократных испытаниях? Например, какая доля заявок (вызовов), поступающих на телефонную станцию, получает отказ; или какая доля электронных ламп, установленных в вычислительной машине, выходит в течение некоторого фиксированного времени из строя?

Пусть при N-кратном повторении опыта некоторое событие A произошло в n случаях. Относительной частотой события A называется отношение числа испытаний, в которых появилось событие A, к общему числу произведенных испытаний:

$$\nu(A) = n/N.$$

Из-за случайных причин число ν при разных значениях N и в разных сериях из N опытов одинаковой длины будет получаться различным. В качестве примера в табл. 1.2.1 приведены результаты некоторого опыта по бросанию монеты в зависимости от числа бросаний. Возможные исходы каждого бросания условно обозначены как 0 и 1. В третьей строке таблицы приведена относительная частота появления единицы.

Таблица 1.2.1.

Результаты опыта по бросанию монеты

Количество бросаний	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Исход бросаний	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0
ν (1)	1	1	2/3	3/4	3/5	1/2	4/7	1/2	4/9	4/10

Однако повседневная практика и специальные эксперименты говорят о том, что с увеличением числа испытаний сколько-нибудь значительные отклонения относительной частоты от некоторого среднего значения происходят редко. Например, в опыте с 12 000 бросаний монеты относительная частота появления герба оказалась равной 0,5016, а в опыте с 24 000 бросаний — 0,5005.

Число, около которого группируются при многократных испытаниях относительные частоты события, называется его вероятностью. Несколько изменяя формулировку, можно определить вероятность как отношение среднего числа появлений события A в N испытаниях к числу испытаний N.

Практическая ценность понятия вероятности определяется следующим обстоятельством. Хотя тот или иной исход случайного явления не может быть предугадан, однако можно рассчитывать на то, что в любой достаточно длинной серии испытаний относительная частота события будет мало отличаться от его вероятности. Чем больше вероятность события, тем чаще в достаточно длинной серии испытаний оно происходит, и наоборот.

Это позволяет людям строить свою практическую деятельность так, как если бы рассматриваемые события осуществлялись в соответствии с их вероятностью. Естественно, например, послать на соревнование того спортсмена, который ранее показывал лучшие результаты, или применять тот вид бомбометания, который в аналогичных условиях давал наибольший процент попаданий, или использовать тот метод лечения, который дал наибольший процент выздоровлений, хотя во всех этих примерах нет полной гарантии того, что в данном конкретном случае принятый вариант приведет к наилучшему исходу.

Учитывая органическую связь, существующую между относительной частотой события ν и его вероятностью p, а также то, что относительная частота есть неотрицательная величина, не превосходящая единицы, следует считать, что вероятность $p(A)$ некоторого события A удовлетворяет тем же ограничениям, т. е.

$$0 \leqslant p(A) \leqslant 1. \tag{1.2.1}$$

Событие, вероятность которого равна единице, называется достоверным, а событие с нулевой вероятностью — невозможным. Следует иметь в виду, что понятия достоверного и невозможного событий в теории вероятностей несколько шире общепринятых. Хотя событие, имеющее вероятность, равную единице, происходит практически всегда, но в принципе не исключено, что при каком-то частном испытании оно не наступит. Аналогично не исключается принципиальная возможность появления события с нулевой вероятностью. Например, вероятность человеку прожить точно 5 лет, 3 дня, 5 часов и 20 секунд равна нулю, но тем не менее такое событие возможно.

Выше было сформулировано так называемое статистическое определение вероятности. При всей своей практической значимости оно имеет тот недостаток, что не дает указаний к вычислению вероятности некоторого события иначе как путем статистических испытаний. Познакомимся теперь с так называемым классическим определением вероятности.

В любой научной теории, в том числе и в теории вероятностей, существует некоторое число изначальных истин, которые нельзя путем логических рассуждений свести к еще более элементарным истинам. Если практика или специально поставленные эксперименты подтверждают их справедливость, то они принимаются без каких-либо дополнительных теоретических выкладок, т. е. как аксиомы.

По существу так были введены статистическое определение вероятности и соотношение (1.2.1), которому она подчиняется. Аналогично обстоит дело с классическим определением вероятности, которое опирается на понятие равновозможных событий, вводимое без доказательств. Классическое определение допускает непосредственный подсчет вероятностей и позволяет придать доказательный характер основным формулам теории. Правда, ситуация равновозможности нескольких событий является относительно редко реализуемой, и в общем случае указанные формулы все равно приходится вводить аксиоматически.

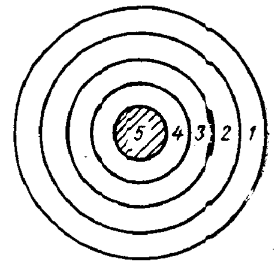

Рис. 1.1. Мишень.

Несколько событий называются равновозможными, если условия опыта налагают на их появление одинаковые ограничения, и, следовательно, нет причин, по которым одно из них могло бы появляться чаще, чем всякое другое из событий рассматриваемого множества. Примерами равновозможных событий могут быть: 1) выпадение 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков при бросании симметричной игральной кости; 2) обрыв какой-нибудь спицы «вполне симметричного» велосипедного колеса; 3) фазное или противофазное включение наугад двух обмоток трансформатора и др.

Введем еще два понятия.

Несколько событий называются несовместимыми, если никакие из них не могут произойти при одном и том же испытании вместе.

Несколько событий называются составляющими полную группу, если в результате испытания обязательно происходит хотя бы одно из них.

Пусть по мишени (рис. 1.1) производится однократный выстрел. Обозначим через A событие — количество выбитых очков не более трех (т. е. 0, 1, 2 или 3), а через B — количество выбитых очков более трех (т. е. 4 или 5). Нетрудно видеть, что события A и B являются несовместимыми и составляют полную группу, поскольку в результате выстрела обязательно происходит либо событие A, либо событие B. Событие A — выбито не более трех очков, и событие C — выбито не менее трех очков (т. е. 3, 4 или 5), также составляют полную группу, однако в отличие от событий A и B являются совместимыми, поскольку получение в результате выстрела ровно трех очков означает одновременное наступление как события A, так и события C. И, наконец, событие D — выбито не более двух очков (т. е. 0, 1 или 2), и событие B — выбито более трех очков, являются несовместимыми и не составляют полной группы, так как при одиночном выстреле не охватывают всех возможных результатов (а именно, выбивание ровно трех очков).

Рассмотрим опыт с N равновозможными исходами, которые несовместимы и составляют полную группу*. Пусть n из них влекут за собой событие A (благоприятствуют событию A). Иначе говоря, событие A распадается на n частных случаев.

Вероятностью события A называется отношение числа исходов, благоприятствующих событию A, к общему числу возможных исходов

$$p(A)=\frac{n}{N}. \qquad (1.2.2)$$

Определенную таким образом вероятность можно легко вычислить без проведения испытаний.

Пример 1. Найдем вероятность того, что при бросании симметричной игральной кости число выпавших очков будет нечетным. Интересующее нас событие A — нечетное число выпавших очков, распадается на три частных случая: выпало одно, три или пять очков. При этом все они входят в полную группу из 6 равновозможных, несовместимых событий. Следовательно, $p(A) = {}^3/_6 = {}^1/_2$.

Пример 2. В партии из N изделий M бракованных. Наудачу выбирают n изделий из этой партии ($n < N$). Чему равна вероятность того, что среди них окажутся m бракованных ($m \leqslant M$)? Общее число возможных выборов из N изделий по n равно числу сочетаний из N элементов по n:

$$C_N^n=\frac{N!}{(N-n)!\,n!}.$$

Число возможных выборов m бракованных изделий из общего числа M равно C_M^m. Поэтому число комбинаций, влючающих в себя ровно m бракованных изделий, равно числу сочетаний из M по m, умноженному на число сочетаний из $(N-M)$ небракованных изделий по $(n-m)$. Таким образом, в соответствии с классическим определением вероятности получим

$$p(A)=\frac{C_M^m\, C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}. \qquad (1.2.3)$$

Классическое определение не снимает вопроса о соотношении между вероятностью и его относительной частотой, однако многочисленные эксперименты подтверждают, что относительная частота событий в схеме случаев группируется вокруг величины n/N. В этом и заключена реальная ценность классического определения.

Понятие равновозможности событий применяется к опытам с бесконечным числом исходов. Типовой может служить следующая

* Полную группу равновозможных, несовместимых событий называют схемой случаев или схемой урн.

задача. В область G наугад бросается «точка» Q. Какова вероятность того, что точка Q попадет в область g, являющуюся частью области G (рис. 1.2)?

Хотя каждое из множеств G и g содержит бесчисленное множество точек, естественно считать, что «вместимость» множества G больше и притом во столько раз, во сколько площадь S_G области G превосходит площадь S_g области g. Исходя из равновозможности всех рассматриваемых вариантов, естественно считать, что искомая вероятность $p(A)$ равна $p(A) = S_g/S_G$.

В общем случае множества G и g могут иметь другую размерность (длины — в одномерном случае, объема — в трехмерном и т. д.), но приведенная формула сохраняет свой смысл, с той только разницей, что множества в общем случае оцениваются так называемой мерой (длиной, площадью, объемом). Таким образом, в общем случае формула принимает вид:

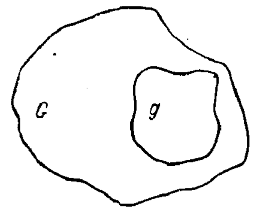

Рис. 1.2. Определение геометрических вероятностей.

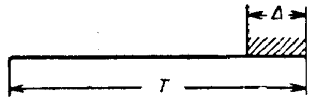

Рис. 1.3. Развертка осциллографа.

$$p(A)=\frac{\text{мера } g}{\text{мера } G}. \qquad (1.2.4)$$

Ввиду явного геометрического смысла вероятности вида (1.2.4) называют также геометрическими.

Пример. Пусть T — полный период развертки осциллографа и Δ — его часть, которую занимает обратный ход. Какова вероятность того, что импульс, длительность которого пренебрежимо мала, появится во время обратного хода развертки (рис. 1.3), если считать, что все моменты появления импульса за период T равновозможны. Очевидно, $p(A) = \Delta/T$.

§ 3. СУММА И ПРОИЗВЕДЕНИЕ СОБЫТИЙ

В применениях теории вероятностей часто возникает необходимость выразить вероятность некоторого сложного события через вероятности составляющих его событий. Например, вероятность безотказной работы самолета в течение некоторого промежутка времени целесообразно выразить через вероятности безотказной работы отдельных его агрегатов. Это позволит часть летных испытаний