УДК 519.8

Жуковська О.А.
канд. фіз.-мат. наук, доцент
Ткачова Д.Г.
Національній технічний університет Україні «КПІ»

ДИНАМІЧНА МОДЕЛЬ УПРАВЛІННЯ ЗАПАСАМИ З ІНТЕРВАЛЬНОЮ НЕВИЗНАЧЕНІСТЮ ПОПИТУ

THE DYNAMIC INVENTORY MANAGEMENT MODEL WITH INTERVAL UNCERTAINTY OF DEMAND

В статті розглянуто модель одноменклатурної системи управління запасами з періодичним контролем при інтервально заданому попиті, миттєвих поставках, обмеженні на рівень запасу і величину замовлення, та кінцевому періоді планування. На основі запропонованої моделі для ТОВ «Світлові Технології» досліджено динаміку зміни рівня запасу при оптимальній стратегії управління.

В статье рассмотрена модель одноменклатурной системы управления запасами с периодическим контролем при интервально заданном спросе, мгновенных поставках, ограничении на уровень запаса и величину заказа, и конечном периоде планирования. На основе предложенной модели для ООО «Световые Технологии» исследована динамика изменения уровня запаса при оптимальной стратегии управления.

In the article it was proposed to use interval methods for modelling and optimization of inventory management systems with uncertainty in the data. For interval model of one range inventory management system inventory level was defined as the sum of current stock and stock of orders at the current time. Dynamics of the stock was determined by the equation, in which there was a new component (demand), which can take values in a given interval. The boundaries of this interval is always possible to estimate with sufficient accuracy for the statistical data, or guided by experience and intuitive assumptions. It was developed computational algorithm for constructing an optimal admissible strategy, under which the optimal control at each step is determined for the Bellman principle of optimality. To solve the problem of interval constructed by dynamic programming was used maximin approach, which provides a guaranteed result for any value of the unknown parameter of a given interval. Our goal was to analyse the results of numerical calculations of model for Ltd. "Light Technologies".

Ключові слова: система управління запасами, невизначений попит, інтервальний аналіз, динамічне програмування.

Вступ. Проблема управління запасами є однією з найбільш важливих в організаційному управлінні. Запаси різного роду матеріальних цінностей виникають майже у всіх ланках системи виробництва – розподілу – споживання. Під запасом мається на увазі не тільки наявність деякого товару чи продукції на складі, а й виробничі, транспортні, трудові, інформаційні, водні ресурси, фінансовий капітал і т.д. Тому моделі управління запасами описують широке коло завдань оптимального планування виробничих, транспортних, інформаційних, фінансових, водогосподарських, енергетичних та інших систем.

При дефіциті запасів порушується нормальний хід виробництва, зривається постачання споживачів, що призводить до втрати прибутку і репутації компанії – штрафу за незадоволений або відкладений попит. При невиправдано високому рівні запасів компанія несе втрати від омертвіння капіталу в запасах і уповільнення його оборотності.

У даний час в області методології, апарату та розвитку моделей теорії управління запасами можна вказати наступні основні тенденції:

- переважний розвиток стохастичних моделей і статистичних методів управління запасами [1];
- поширення адаптивного підходу та методів управління за неповними даними [1];
- дослідження ігрових постановок задач управління запасами [2];
- дослідження багатономенклатурних систем управління запасами з корельованим попитом [3];
- дослідження систем управління запасами з частково спостережуваним попитом і замкнутих за попитом систем [1];
- дослідження ієрархічних систем управління запасами [4].

В роботі [3] зазначається, що "управління запасами, з однієї сторони, має найбільші можливості для практичного застосування і з іншого – найбільш розвинену теорію". Поряд з імовірнісними методами та методами лінійного програмування теорія управління запасами активно використовує апарат теорії автоматичного управління. Пропонуються алгоритми управління запасами, розроблені на основі сучасних методів теорії адаптації, ідентифікації, стохастичної оптимізації, принципу максимуму, динамічного програмування, марківських процесів з доходами і т.д.

Таким чином, сучасна теорія дозволяє оптимально (наприклад, з точки зору мінімуму витрат) управляти як детермінованими, так і стохастичними системами управління запасами. Однак, детерміновані моделі не враховують апріорну невизначеність (в попиті, поставках, часі затримок і т.д.), властиву реальним системам управління запасами. Імовірнісні – вимагають точного задання імовірнісних характеристик невизначених параметрів системи (факторів невизначеності). При цьому, у багатьох випадках немає підстави або недостатньо інформації, щоб розглядати фактори невизначеності як випадкові (тобто адекватно описуваними теоретико-імовірнісними моделями), що робить неефективним застосування таких моделей при вирішенні практичних завдань. Складність отримання чисельних результатів при роботі з випадковими величинами також знижує практичну цінність стохастичних моделей управління запасами. Це призводить до необхідності обліку невизначеності нестохастичної природи.

Цікавий підхід для динамічних моделей, заснований на оптимізації систем управління запасами з нестохастичною невизначеністю в даних за допомогою апарату інтервального аналізу, пропонується в роботі Е. В. Чаусової [5].

Постановка завдання. Дослідження та аналіз моделі визначення розміру партії системи з періодичним контролем в умовах нестохастичної невизначеності попиту.

Методологія. Методологічною базою дослідження є поняття і методи теорії інтервального аналізу, теорії множин, теорії управління запасами, методи динамічного програмування.

Результати дослідження. У роботі [5] для моделювання та оптимізації систем управління запасами з невизначеністю в даних пропонується використовувати апарат інтервального аналізу. Невизначеності в системі задаються інтервалами, в межах яких невідомі параметри довільним чином приймають свої значення. Ці межі завжди можна оцінити з достатнім ступенем достовірності за статистичними даними.

У роботі [5] розглядається однономенклатурна система управління запасами з періодичним контролем рівня запасів при інтервально заданому попиті, миттєвих поставках і кінцевому періоді планування запасів. Динаміка системи описується таким різницевим рівнянням:

$$x(t+1) = x(t) + u(t) - d(t), \quad t = \overline{0, T-1}, \tag{1}$$

де $x(t)$ – стан системи (рівень запасу) в момент часу t ;

$u(t)$ – управління (величина заказу на поповнення запасу) в момент часу t;

$d(t)$ – попит на відрізку $[t, t+1]$;

T – плановий період.

Відносно попиту $d(t)$ відомо лише те, що він довільним чином приймає значення на заданому інтервалі

$$d(t) \in \mathbf{D}, \quad t = \overline{0, T-1}, \tag{2}$$

де $\mathbf{D} \in \mathrm{IR}, \quad \mathbf{D} = [\underline{D}, \overline{D}], \quad \mathbf{D} > 0.$

На стани системи $x(t)$ і управління $u(t)$ в момент часу t накладаються обмеження, які обумовлені можливостями системи,

$$x(t) \in \mathbf{X}, \quad t = \overline{0, T}, \tag{3}$$

$$u(t) \in \mathbf{U}, \quad t = \overline{0, T-1}, \tag{4}$$

де $\mathbf{X} \in \mathrm{IR}, \quad \mathbf{X} = [0, \overline{X}]; \quad \mathbf{U} \in \mathrm{IR} \quad \mathbf{U} = [0, \overline{U}].$

Крім того, припускається повне і своєчасне задоволення попиту у межах кожного відрізку $[t, t+1)$, $t = \overline{0, T-1}$, тобто дефіцит запасу в системі не допускається.

Нехай функція $u(t) = U(x(t), t)$, $u(t) \in \mathbf{U}$, є допустимим на інтервалі $\mathbf{X}$ управлінням для стану $x(t)$ в момент часу t, $t = \overline{0, T-1}$, таким, що для будь-якого значення попиту $d(t) \in \mathbf{D}$ виконується включення $x(t+1) \in \mathbf{X}$, де $x(t)$ визначається рекурентним співвідношенням (1).

Нехай стратегія $\Phi = \{u(0), u(1), \ldots, u(T-1)\}$, $u(t) \in \mathbf{U}$, $t = \overline{0, T-1}$, є допустимою на інтервалі $\mathbf{X}$ стратегією управління для початкового стану $x(0) \in \mathbf{X}$, такою, що для будь-якого значення попиту $d(t) \in \mathbf{D}$ виконане включення $x(t+1) \in \mathbf{X}$, де $x(t)$ визначається рекурентним співвідношенням (1).

Витрати системи на формування і підтримку запасу визначаються станом системи на кінець кожного відрізку $[t, t+1)$, $t = \overline{0, T-1}$. Тоді для будь-якого фіксованого значення попиту $d(t) \in \mathbf{D}$ витрати системи на відрізку $[t, t+1)$ при рівні запасу $x(t)$ і величині заказу $u(t)$ описуються функцією:

$$C(x(t), u(t), d(t), t) = g(t) + c(t) \cdot u(t) + h(t) \cdot (x(t) + u(t) - d(t)), t = \overline{0, T-1} \qquad (5)$$

де $g(t)$ – фіксована частка транспортних витрат та витрат на розміщення заказу в момент часу t (витрати на запуск виробництва для виробничих систем);
$c(t)$ – витрати на поставку одиниці запасу в момент часу t (витрати на виробництво одиниці продукції);
$h(t)$ – витрати на зберігання одиниці запасу на відрізку $[t, t+1)$.

Враховуючи інтервальну невизначеність попиту (2), представимо функцію витрат системи у вигляді природного інтервального розширення функції (5):

$$\mathbf{C}(x(t), u(t), \mathbf{D}, t) = g(t) + c(t) \cdot u(t) + h(t) \cdot (x(t) + u(t) - \mathbf{D}), \ t = \overline{0, T-1}$$

Тоді, для будь-якого значення $d(t) \in \mathbf{D}$ справедливе включення

$$C(x(t), u(t), d(t), t) \in \mathbf{C}(x(t), u(t), \mathbf{D}, t), \ t = \overline{0, T-1}$$

Необхідно визначити оптимальну допустиму на інтервалі $\mathbf{X}$ стратегію управління $\Phi^* = \{u^*(0), u^*(1), \ldots, u^*(T-1)\}$,яка мінімізує сумарні витрати системи в плановому періоді. Крім того, будемо вимагати, щоб запас на кінець періоду планування $x(T)$ не перевищував заданого рівня $\overline{X}_T$, $\overline{X}_T \in \mathbf{X}$. Таким чином, маємо наступну оптимізаційну задачу

$$\sum_{t=0}^{T-1} \mathbf{C}(x(t), u(t), \mathbf{D}, t) \to \min_{\Phi \in \Phi(x(0))} \qquad (6)$$

при обмеженні

$$x(T) \le \overline{X}_T \qquad (7)$$

де $\overline{X}_T \in \mathbf{X}$; $\Phi(x(0))$ множина стратегій, допустимих при початковому запасі $x(0) \in \mathbf{X}$ ($x(0)$ передбачається відомим).

Для будь-якого стану системи $x(t) \in \mathbf{X}$ допустиме на інтервалі $\mathbf{X}$ управління зі зворотним зв'язком $u(t) = U(x(t), t)$, $u(t) \in \mathbf{U}$, в момент часу t, $t = \overline{0, T-1}$, існує і визначається із включення

$$x(t) + u(t) \in \mathbf{X} + \mathrm{dual}\,\mathbf{D}, \tag{8}$$

тоді і тільки тоді, коли виконані умови

$$\mathbf{X} + \mathrm{dual}\,\mathbf{D} \in \mathrm{IR}, \tag{9}$$

$$\mathbf{D} \subseteq \mathbf{U}. \tag{10}$$

Для будь-якого початкового стану системи $x(0) \in \mathbf{X}$ існує допустима на інтервалі $\mathbf{X}$ стратегія управління $\Phi \in \Phi(x(0))$, яка гарантує включення $x(T) \in \mathbf{X}_T$, тоді і тільки тоді, якщо виконані умови (9), (10), інтервал допустимих початкових станів має вигляд

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}, \tag{11}$$

а граничний запас на кінець періоду планування задовольняє умову

$$\overline{X}_T \in \mathbf{X}(\overline{D} - \underline{D}, \overline{X}). \tag{12}$$

Для визначення оптимальної в розумінні критерію (6) стратегії управління скористаємося методом динамічного програмування. Згідно з принципом оптимальності Беллмана [6] для функції витрат рішення на всі відрізки, що залишилися повинні складати оптимальну поведінку відносно стану, отриманого в результаті попереднього рішення, незалежно від раніше прийнятих рішень і початкового стану. Визначимо послідовність функцій:

$$f_k(x) = \min_{u(k),\dots,u(T-1)} \sum_{t=k}^{T-1} \mathbf{C}(x(t), u(t), \mathbf{D}, t),\ k = \overline{0, T-1},$$

де $f_k(x)$ – мінімальні витрати за $T-k$ відрізків, що залишилися до кінця періоду планування, при рівні запасу x;

$u(t)$ – допустиме управління для стану $x(t)$ в момент часу $t, t = \overline{k, T-1}$;

$x(k) = x$, а $x(t), t = \overline{k+1, T-1}$, визначається рекурентним співвідношенням (1).

Тоді для будь-якого $x \in \mathbf{X}_t$ рекурентне співвідношення динамічного програмування має вигляд:

$$f_t(x) = \min_{u \in \mathbf{U}_t} \{\mathbf{C}(x, u, \mathbf{D}, t) + f_{t+1}(x + u - \mathbf{D})\}, \quad t = \overline{T-1, 0}, \quad f_T(x) = 0 \tag{13}$$

де $\mathbf{X}_t$ і $\mathbf{U}_t$**:**

$$\mathbf{X}_t = (\mathbf{X}_{t+1} + \mathrm{dual}\,\mathbf{D} - \mathbf{U}) \cap \mathbf{X}, \quad t = \overline{T-1, 0}, \quad \mathbf{X}_T = \mathbf{X}(0, X_T), \tag{14}$$

$$\mathbf{U}_t = (\mathbf{X}_{t+1} + \mathrm{dual}\,\mathbf{D} - x) \cap \mathbf{U}). \tag{15}$$

Таким чином, отримуємо задачу інтервального динамічного програмування. Для її розв'язку можна використовувати підхід, запропонований в [4,7] для оптимізації систем в умовах інтервальної невизначеності. Згідно з [4,7], максимінна модель забезпечує гарантований результат інтервально заданого параметра системи. Тоді для будь-якого $x \in \mathbf{X}_t$ з (13) будемо мати

$$f_t(x) = \max_{d \in \mathbf{D}} \min_{u \in \mathbf{U}_t} \{\mathbf{C}(x, u, \mathbf{D}, t) + f_{t+1}(x + u - d)\}, \quad t = \overline{T-1, 0}, \quad f_T(x) = 0 \qquad (16)$$

де $\mathbf{X}_t$ і $\mathbf{U}_t$ визначаються співвідношеннями (14), (15).

Отримані співвідношення (16) дозволяють побудувати алгоритм чисельного розв'язку задачі (6). На першому кроці ($t = T-1$) для всіх допустимих $x(T-1) \in \mathbf{X}_{T-1}$ обчислюються $f_{T-1}(x)$ і визначаються відповідні оптимальні управління $u^*(T-1)$. Потім для всіх допустимих $x(t) \in \mathbf{X}_t$, $t = \overline{T-2, 1}$, за співвідношенням (16) рекурентно обчислюються $f_t(x)$ і визначаються оптимальні $u^*(t)$. На останньому кроці ($t = 0$) обчислюється тільки $f_0(x(0))$ і відповідне $u^*(0)$ для заданого початкового стану $x(0) \in \mathbf{X}$. В результаті, для початкового стану $x(0)$ отримуємо оптимальну в сенсі критерію (6) стратегію управління $\Phi^* = \{u^*(0), u^*(1), \ldots, u^*(T-1)\}$.

Розглянемо практичне застосування даної моделі та виконаємо розрахунки за розробленим алгоритмом. Так для ТОВ «Світлові технології» необхідно розробити календарну програму планування запасів готової продукції (технічних світильників) на півроку вперед ($T = 6$). Припустимо, що попит, величина замовлення і розмір запасу можуть приймати тільки цілі значення. Тоді на кожному кроці оптимальне управління, яке задовольняє (16), можна визначити звичайним перебором (в неперервному випадку використовуються чисельні методи). Було статистично визначено межі інтервалу можливого попиту – $\mathbf{D} = [5,6]$. Поточна верхня межа завантаженості складу – 7 тис од., тобто $\mathbf{X} = [0,7]$. Максимально можливий розмір поповнення запасу – 9 тис. од., тобто $\mathbf{U} = [0,9]$.

Коефіцієнти витрат протягом усього періоду планування постійні і для будь-якого t, $t = \overline{0, 5}$, фіксована частка витрат на розміщення заказу $g(t)$ становить 13 у.о. (якщо робиться заказ), витрати на поставку одиниці продукції – 2 у.о., витрати на зберігання одиниці продукції – 1 у.о. Отже,

$$g(t) = \begin{cases} 0, & при\ u(t) = 0, \\ 13, & при\ u(t) > 0, \end{cases} \quad c(t) = 2, \quad h(t) = 1.$$

Граничний рівень запасу на кінець планового періоду повинен бути мінімальним, отже, $\overline{X}_T = 1$.

Для даної системи умови (9), (10) і (12) виконані. Інтервали допустимих станів системи мають такий вигляд

$$\mathbf{X}_6 = [0,1]; \quad \mathbf{X}_5 = [0,6]; \quad \mathbf{X}_t = \mathbf{X}, \quad t = \overline{4, 0}.$$

Результати розрахунку оптимальної стратегії за формулою (16) представлені у таблиці 1.

Таблиця 1

Результати розрахунку оптимальної стратегії

x	t=6		t=5		t=4		t=3		t=2		t=1	
	u(x)	f(x)	u(x)	f(x)	u(x)	f(x)	u(x)	f(x)	u(x)	f(x)	u(x)	f(x)
0	6	26	6	51	6	76	9	97	6	122	6	147
1	5	24	5	49	5	74	8	95	5	120	5	145
2	4	22	4	47	4	72	7	93	4	118	4	143
3	3	20	3	45	9	63	9	88	9	113	9	134
4	2	18	2	43	8	61	8	86	8	111	8	132
5	1	16	1	41	7	59	7	84	7	109	7	130
6	0	1	0	26	0	51	0	76	0	97	0	122
7	0	0	0	25	0	50	0	75	0	96	0	121

При $t=6$ рівень запасу $x=7$ не допустимий.

Нехай початковий рівень запасу в системі $x(0)=3$ і попит протягом періоду планування приймав такі значення $d=(5,6,5,5,6,6)$. Тоді отримаємо наступні результати (табл. 2):

Таблиця 2

Результати розрахунку оптимальної стратегії для $x(0)=3$

x	3	7	1	4	7	1	0
u	9	0	8	8	0	5	-

Інтерпретуємо розв'язки: оптимальна стратегія управління має вигляд $\Phi^*=\{9,0,8,8,0,5\}$, рівень запасу на кінець періоду планування $x(6)=0$, сумарні витрати системи за період планування при оптимальному управлінні Φ^* становлять $C=121$ *у.о.*(максимально можливі сумарні витрати $f_0(3)=134$.

На рисунку 1 показана динаміка зміни запасу при оптимальній стратегії управління з таблиці 1 для різних рівнів початкового запасу $x(0)$. З рисунку 1 видно, що рівень запасу протягом усього періоду планування знаходиться в межах допустимого інтервалу $\mathbf{X}=[0,7]$, а запас на кінець періоду планування не перевищує заданого рівня $\overline{X}_T=1$.

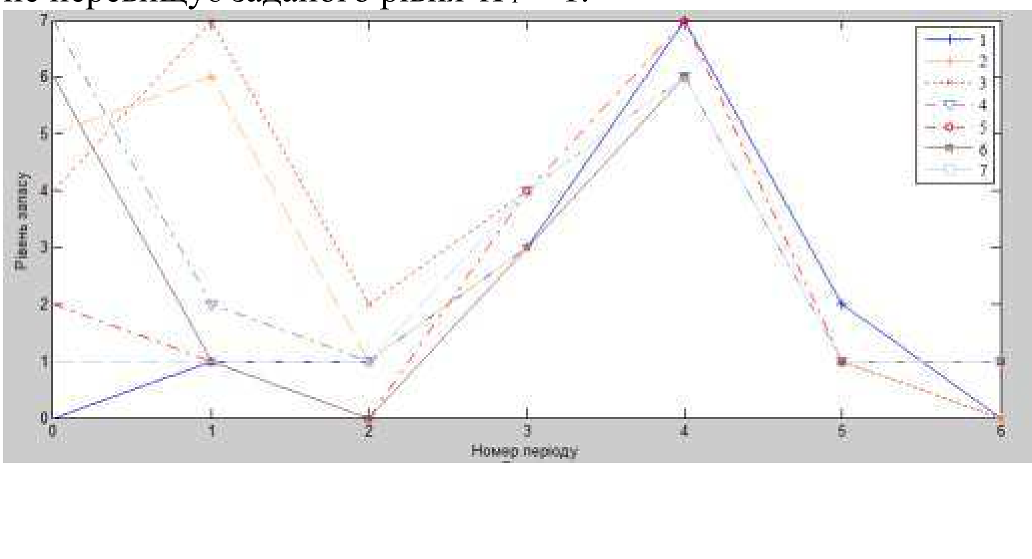

Рис.1. Динаміка зміни рівня запасу при оптимальній стратегії управління (лінія 1: $x(0) = 0, \Phi^* = \{6,5,8,9,0,4\}, d = (5,5,6,5,5,6);$ лінія 2: $x(0) = 5, \Phi^* = \{7,0,8,9,0,5\}, d = (6,5,6,6,5,6);$ лінія 3: $x(0) = 4, \Phi^* = \{8,0,7,8,0,5\}, d = (5,5,5,6,5,6);$ лінія 4: $x(0) = 7, \Phi^* = \{0,4,8,8,0,5\}, d = (5,5,5,6,5,5);$ лінія 5: $x(0) = 2, \Phi^* = \{4,5,9,8,0,5\}, d = (5,6,5,5,6,5);$ лінія 6: $x(0) = 6, \Phi^* = \{0,5,9,9,0,5\}, d = (5,6,6,6,5,5);$ лінія 7: $x(0) = 1, \Phi^* = \{5,5,8,8,0,5\}, d = (5,5,5,6,5,5);$)

Висновки. На основі моделі однономенклатурної системи управління запасами з періодичним контролем при інтервально заданому попиті, миттєвих поставках, обмеженні на рівень запасу і величину замовлення, і кінцевому періоді планування розроблена календарна програма планування запасів готової продукції та визначена оптимальна стратегія управління для ТОВ «Світлові Технології». Наведено результати чисельних розрахунків.

Література

1. Лотоцкий В.А., Мандель А.С. Модели и методы управления запасами. – М.: Наука, 2006.
2. Хэннссмен Ф. Применение математических методов в управлении производством и запасами. – М.: Прогресс, 2001.
3. Рыжиков Ю.И. Теория очередей и управление запасами. – СПб.: Питер, 2001. – 181 с.
4. Вощинин А.П., Сотиров Г.Р. Оптимизация в условиях неопределенности. – М.: Изд-во МЭИ; Техника, 1989. – 416 с.
5. Чаусова Е. В. Динамическая модель управления запасами с интервальной неопределенностью спроса / Е. В. Чаусова // Вестник Томского государственного университета. – 2002. – № 1(1). – С. 195-200.
6. Беллман Р. Динамическое программирование. – М.: Изд-во Иностранная литература, 1960. – 434 с.
7. Вощинин А.П., Сотиров Г.Р. Оптимизация в условиях неопределенности. – М.: Изд-во МЭИ; Техника, 1989. – 416 с.