МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ 2007 год, том 19, номер 5, стр.45-58

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ИНВЕСТИЦИЯМИ В АКТИВ СО СЛУЧАЙНОЙ ДОХОДНОСТЬЮ ПРИ ТРАНЗАКЦИОННЫХ ИЗДЕРЖКАХ

© *2007 г. В.В. Китов*

МГУ им.Ломоносова
e-mail: vkitov@mail.ru

В работе рассматривается задача оптимального управления инвестициями в некоторый актив со стоимостью, изменяющейся как геометрическое броуновское движение, при фиксированных и пропорциональных транзакционных издержках. Показывается, что постановка задачи напрямую обобщается на многомерный случай путем независимого решения одномерной максимизационной задачи для каждого актива. Указывается общий вид получающегося оптимального управления и предоставляется конструктивный механизм его поиска путем решения системы квази-вариационных неравенств. Задача импульсного оптимального управления сводится к решению системы из шести нелинейных уравнений. Из этой системы получаются выводы о том, что четыре параметра управления сводятся к двум при нулевых фиксированных издержках, и сводятся к трем при нулевых пропорциональных издержках. Проводится численный эксперимент, в котором определяется зависимость решения задачи от всех параметров. Также находится интегральное представление функции выигрыша через функцию Грина, упрощающее в некоторых случаях поиск решения нелинейной системы. Для случая, когда реакция на управление происходит с некоторым фиксированным запаздыванием, доказывается свойство оптимального управления, сводящее потенциально бесконечномерное фазовое пространство задачи к одномерному, что позволяет существенно упростить задачу и найти ее решение аналогично случаю без запаздывания.

OPTIMAL CONTROL OF INVESTMENTS WITH RANDOM YIELD UNDER TRANSACTION COSTS

V.V. Kitov

Lomonosov Moscow State University

This paper solves the problem of optimal control of the level of investment in some asset whose price follows a geometric Brownian motion. Each transaction requires both fixed and proportional transaction costs. It is shown that the model can be generalized for a number of different assets. The general form of optimal control is found and a constructive algorithm for identefication of all parameters of the control is presented using quasi-variational inequalities. The algorithm yields a system of six nonlinear equations. It is shown that optimal control, that depends on four parameters in general, depends on two parameters if fixed transaction costs are zero, and depends on three parameters, if proportional transaction costs are zero. Numerical experiment is used to show how optimal control depends on all parameters of the model. Intergal representation of the value function is found, that may help to determine the optimal control. The case when the response to the control takes place after a constant time period is also studied. The property of the optimal control that it depends on only one state variable is proven. This fact is used to solve the problem with standard methods of quasi-variational inequalities.

1. Введение

В работе рассматривается математическая модель оптимального управления инвестициями в некоторый актив, приносящий случайную доходность при наличии транзакционных издержек, состоящих из фиксированной и пропорциональной составляющей. Такие издержки, например, возникают, если рассматриваемым рисковым активом являются инвестиции в недвижимость, когда при инвестициях необходимо понести как фиксированные издержки по поиску подходящего агентства и на заключение контракта, так и пропорциональные, состоящие из комиссии данному агентству.

Работа состоит из трех частей: вначале дается формальная постановка задачи, затем ставится и решается краевая задача для отыскания оптимального управления, затем задача и ее решение обобщаются на случай, когда покупка и продажа рискового актива осуществляются не сразу, а через некоторый фиксированный интервал времени. Доказывается, что область значений стоимости актива делится на две части: в первой части оптимальной стратегией является пассивная стратегия, когда перераспределения не происходит, во второй части – активная, когда оптимальным является процесс перераспределения активов в некоторую фиксированную подобласть пассивных стратегий.

При рассмотрении издержек управления, содержащих как фиксированную, так и пропорциональную производимой операции компоненту, задача сводится к задаче построения оптимального импульсного управления, в котором воздействие осуществляется не непрерывно, а в виде импульсов в дискретные моменты времени. Одними из наиболее ранних работ на тему импульсного управления можно считать [1] и [2]. В [3],[4],[5] рассматривается применение импульсного управления к оптимальному управлению центрального банка валютным курсом. Данные работы являются показательными с точки зрения построения оптимального импульсного управления. Работа [6] рассматривает аналогичную теорию в применении к оценке европейского опциона, когда на рынке присутствуют фиксированные и пропорциональные транзакционные издержки. В [7] также строится оптимальное импульсное управление, но уже в модели по оптимальному наращиванию мощностей электрогенерирующей компании при случайном спросе. Особенностью этой работы является то, что реакция на управление происходит не сразу, а по прошествии некоторого фиксированного промежутка времени. Наиболее близкой по тематике к данной работе является статья [8], в которой рассматривается аналогичная задача в случае, когда горизонт оптимизации конечен, и целью является максимизация стоимости инвестиций в фиксированный момент времени.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу оптимального распределения финансовых активов, предполагая что перед инвестором имеются две возможности – либо держать наличные деньги, либо вложить их в некоторый рисковый актив (например, акцию), доход от которого изменяется случайным образом. В рамках модели будем считать, что стоимость рискового актива распределена как геометрическое броуновское движение:

$$X_t = X_0 \exp\left((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t\right) ,$$

где W_t – стандартное броуновское движение. По формуле Ито указанную формулу можно записать в дифференциальной форме:

$$dX_t = X_t(\mu t + \sigma dW_t) .$$

Полезность наличных денег будет предполагаться равной их количеству, полезность же рискового актива стоимостью X зададим через функцию $R(X)$, отражающую нерасположенность инвестора к риску. Относительно функции $R(\cdot)$ будет предполагаться вогнутость при $X > 0$, а также условия $\lim_{x\to 0} R'(X) = +\infty$ и $\lim_{x\to\infty} R'(X) \leq 0$. В качестве функции полезности можно рассматривать, например, $R(X) = \ln X$ или $R(X) = X^\gamma$. Далее предполагаем, что временные предпочтения задаются экспоненциальной зависимостью $e^{-\beta t}$, где β характеризует степень предпочтения настоящего по сравнению с будущим.

При перераспределении средств из наличных денег в акции и обратно возникают издержки следующего вида:

$$C(\Delta X) = \begin{cases} K^+ + k^+\Delta X, & \Delta X > 0 \,, \\ K^- + k^-\Delta X, & \Delta X < 0 \,. \end{cases} \tag{1}$$

Поскольку при каждом перераспределении средств инвестор несет издержки, превосходящие некоторую положительную константу, то, очевидно, что оптимальное управление будет носить не непрерывный, а импульсный характер. Управлением будет множество пар $(\tau_i^+, \Delta X_i^+)$ и $(\tau_i^-, \Delta X_i^-)$, определяющих моменты времени и размер дополнительных инвестиций в акции и, соответственно, моменты времени и размер (по абсолютной величине) продаж акций. Задача будет решаться в классе допустимых управлений.

О п р е д е л е н и е. *Управление будем называть допустимым, если оно удовлетворяет следующим условиям:*

$$\begin{cases} \mathbb{E}\left\{\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} X_t^2\, dt\right\} < +\infty\,, \\ \forall T \in [0, +\infty) : P\{\lim_{n\to\infty} \tau_n^+ \le T\} = 0, P\{\lim_{n\to\infty} \tau_n^- \le T\} = 0\,, \\ \lim_{T\to+\infty} \mathbb{E}\left\{e^{-\beta T} X_T\right\} = 0\,. \end{cases}$$

В дальнейшем класс допустимых управлений будет обозначаться $\mathcal{A}(x)$. Данные свойства представляются вполне логичными с учетом убывающей предельной полезности $R(X)$ с ростом X. Действительно, не имеет смысла наращивать до бесконечности величину вложений в актив X, если предельная полезность от инвестиций уменьшается, а предельная полезность от наличных денег остается постоянной.

Динамика стоимости рискового актива опишется в виде:

$$dX_t = X_t(\mu dt + \sigma dW_t) + \sum_{i:\tau_i^+ = t} \Delta X_i^+ - \sum_{j:\tau_j^- = t} \Delta X_j^-\,.$$

Выигрыш от отдельной стратегии инвестора определим как

$$\begin{aligned} J_t(X) = \mathbb{E}\Bigg\{ &\int_t^{+\infty} \exp\left(-\beta(s-t)\right) R(X_s)\, ds + \\ &+ \sum_{i:\tau_i^- \ge t} \exp\left(-\beta(\tau_i^- - t)\right)\left(-K^- - k^-\Delta X_i^-\right) + \\ &+ \sum_{j:\tau_j^+ \ge t} \exp\left(-\beta(\tau_j^+ - t)\right)\left(-K_j^+ - k_j^+\Delta X_j^+\right) \Bigg\}\,. \end{aligned}$$

В случае если деньги ценятся только в момент их использования, переменные K^+, K^- и k^+, k^- отражающие соответственно фиксированные и пропорциональные издержки, можно определить равенствами

$$\begin{cases} K^+ = C^+\,, \quad k^+ = c^+ + 1\,, \\ K^- = C^-\,, \quad k^- = c^- - 1\,. \end{cases}$$

Если учитывается полезность денег во времени, то, так как $\displaystyle\int_0^\infty x e^{-\beta t}\, dt = x/\beta$, коэффициенты определятся следующим образом:

$$\begin{cases} K^+ = C^+/\beta\,, \quad k^+ = (c^+ + 1)/\beta\,, \\ K^- = C^-/\beta\,, \quad k^- = (c^- - 1)/\beta\,, \end{cases} \tag{2}$$

где C^+, C^- и c^+, c^- – величины фиксированных и пропорциональных издержек на рынке.

Определим функцию ожидаемого выигрыша как выигрыш, отвечающий наилучшей стратегии среди всех допустимых:

$$U_t(X) = \max_{\tau_i^+, \Delta X_i^+, \tau_j^-, \Delta X_j^- \in \mathcal{A}(x)} J_t(X)\,. \tag{3}$$

Свойства, связанные с существованием, единственностью и регулярностью решения в подобных задачах, подробно описаны в работах [1],[10],[11] и [12]. Данная работа концентрируется на конструктивном построении оптимального управления. Заметим также, что поскольку в постановке задачи считается, что инвестор может занимать любое количество денег, то постановка задачи напрямую обобщается на случай нескольких активов $X_1, X_2, \ldots, X_n$, с функциями полезности $R_1(\cdot), R_2(\cdot), \ldots R_n(\cdot)$ и с различными пропорциональными и фиксированными издержками. Действительно, поскольку деньги не являются лимитирующим фактором, а транзакционные издержки для каждого актива свои, то для поиска оптимальной инвестиционной стратегии достаточно независимо решить максимизационную задачу (3) для каждого из активов.

3. Построение решения

Необходимые условия на решение будут получены для двух участков - участка пассивного управления (когда оптимальным является не предпринимать управления) и участка активного управления (когда оптимально изменить величину инвестиций X). При этом будет предполагаться, что функция выигрыша дважды непрерывно-дифференцируема всюду, за исключением конечного числа точек. В конце раздела будет представлена теорема, доказывающая достаточность полученных условий для получения оптимального управления.

В случае, если на участке пассивного управления в момент t оптимальной стратегией является пассивное управление ($\Delta X = 0$), то пассивное управление будет оптимальным и в течение $[t, t+\Delta t]$ при бесконечно малом Δt. Тогда для функции выигрыша будет справедливо следующее представление, вытекающее из принципа оптимальности:

$$U_t(X) = \mathbb{E}\left\{\int_t^{t+\Delta t} e^{-\beta(s-t)} R(X_s)ds + e^{-\beta\Delta t} U_{t+\Delta t}(X_t + \Delta X)\right\}.$$

Последнее равенство можно переписать в виде

$$U_t(X) = \mathbb{E}\left\{\int_t^{t+\Delta t} e^{-\beta(s-t)} R(X_s)ds + e^{-\beta\Delta t} (U_t(X_t) + \Delta U_t(X_t)\right\}.$$

Применяя формулу Ито для ΔU, получим следующее равенство:

$$U_t(X) = \mathbb{E}\left\{\int_t^{t+\Delta t} e^{-\beta(s-t)} R(X_s)ds + e^{-\beta\Delta t} (U_t(X) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial U}{\partial X}\mu X dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} X^2 \sigma^2 dt + \frac{\partial U}{\partial X} X \sigma dW_t \right\}.$$

Если взять математическое ожидание и выписать члены с точностью $\bar{o}(\Delta t)$, получим

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \mu x \frac{\partial U}{\partial x} - \beta U + R(x) = 0\,. \tag{4}$$

Однородным уравнением (4) будет

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \mu x \frac{\partial U}{\partial x} - \beta U = 0\,.$$

Его решение будем искать в виде функции x^λ. Для величин λ получим следующее характеристическое уравнение

$$\sigma^2\lambda^2 + (2\mu - \sigma^2)\lambda - 2\beta = 0\,.$$

Отсюда следует одно положительное и одно отрицательное значение для λ

$$\lambda_{1,2} = \frac{\sigma^2 - 2\mu \pm \sqrt{(2\mu - \sigma^2)^2 + 8\beta\sigma^2}}{2\sigma^2}\,.$$

Если $R(x) = \ln x$, то частное решение будем искать в виде $c_1 + c_2\ln x$. При подстановке в неоднородное уравнение получаем частное решение

$$U^1(x) = \frac{\mu}{\beta^2} - \frac{\sigma^2}{2\beta^2} + \frac{\ln x}{\beta}\,. \tag{5}$$

Общее решение (4) задается формулой

$$U(x) = \frac{\mu}{\beta^2} - \frac{\sigma^2}{2\beta^2} + \frac{\ln x}{\beta} + c_1 x^{\lambda_1} + c_2 x^{\lambda_2}\,. \tag{6}$$

Заметим, что найденное частное решение (5) будет значением функции выигрыша $J_t(X)$ при пассивном управлении (когда изменения величины X не происходит). Добавка решения однородного уравнения соответствует улучшению функции выигрыша при применении активного управления.

Если $R(x) = x^\gamma/\gamma$, то однородное уравнение останется прежним, а неоднородная добавка в уравнении (4) изменится. Будем искать эту добавку в виде $U(x) = c_1 + c_2 x^\gamma$. Получим, что

$$U^1(x) = \frac{x^\gamma/\gamma}{\beta - \mu\gamma - \frac{1}{2}\sigma^2\gamma(\gamma - 1)}\,.$$

Отсюда следует, что общим решением уравнения (4) будет

$$U(x) = \frac{x^\gamma/\gamma}{\beta - \mu\gamma - \frac{1}{2}\sigma^2\gamma(\gamma - 1)} + c_1 x^{\lambda_1} + c_2 x^{\lambda_2}\,.$$

Как и в случае $R(X) = \ln X$ найденное частное решение (5) будет значением $J_t(X)$ при пассивном управлении, а добавка решения однородного уравнения соответствует улучшению функции выигрыша при применении активного управления.

Случай, при котором инвестору хочется поддерживать вложения X в рисковый актив на некотором оптимальном для него уровне a, можно формализовать в виде

$$R(x) = \alpha\ln x - \gamma(x - a)^2\,.$$

В этом случае, подбирая частное решение (4) в виде $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3\ln x$, получим общее решение

$$U(x) = \frac{\mu\alpha}{\beta^2} - \frac{\alpha\sigma^2}{2\beta^2} - \gamma\frac{a^2}{\beta} - \frac{2\gamma a}{\mu - \beta}x + \frac{\gamma}{\sigma^2 + 2\mu - \beta}x^2 + \frac{\alpha}{\beta}\ln x + c_1 x^{\lambda_1} + c_2 x^{\lambda_2}\,. \tag{7}$$

Условие применения активного управления запишется в виде

– условие увеличения X

$$U(x) \le \max_y\{-K^+ - k^+(y - x) + U(y)\} = -K^+ - k^+(\underline{y} - x) + U(\underline{y}), \tag{8}$$

– условие уменьшения X

$$U(x) \le \max_y\{-K^- - k^-(x-y) + U(y)\} = -K^- - k^-(x-\bar{y}) + U(\bar{y})\,. \tag{9}$$

Заметим, что

$$\underline{y} = \arg\max_y\{-K^+ - k^+(y-x) + U(y)\}\,, \tag{10}$$

$$\bar{y} = \arg\max_y\{-K^- - k^-(x-y) + U(y)\}\,, \tag{11}$$

доставляют максимум в (8) и (9) соответственно и не зависят от x. Следовательно, при применении данной стратегии инвестору всегда оптимально покупать акции до уровня $\underline{y}$ (если величина x меньше некоторого уровня $\underline{x}$) и продавать акции пока их уровень не опустится до уровня $\bar{y}$ (начиная с некоторого уровня $\bar{x}$). Поскольку задача не зависит от текущего момента t рассматриваемые уровни $\underline{x}, \underline{y}, \bar{y}, \bar{x}$ будут постоянными во времени. В случае дифференцируемой функции $U(\cdot)$ уравнения (10) и (11) дают условия первого порядка

$$U'(\underline{y}) = k^+\,, \tag{12}$$

$$U'(\bar{y}) = -k^-\,. \tag{13}$$

Уровни $\underline{x}$ и $\bar{x}$, начиная с которых необходимо увеличивать и, соответственно уменьшать X определяются из уравнений:

$$U(\underline{x}) = -K^+ - k^+(\underline{y} - \underline{x}) + U(\underline{y})\,, \tag{14}$$

$$U(\bar{x}) = -K^- - k^-(\bar{x} - \bar{y}) + U(\bar{y})\,. \tag{15}$$

Для полного решения задачи необходимо добавить еще два уравнения для нахождения неизвестных констант c_1 и c_2 в решении уравнения (4). Значение этих постоянных можно получить если продифференцировать (14) и (15) по $\underline{x}$ и $\bar{x}$ соответственно:

$$U'(\underline{x}) = k^+\,, \tag{16}$$

$$U'(\bar{x}) = -k^-\,. \tag{17}$$

Таким образом, имеются шесть уравнений (12),(13),(14), (15),(16),(17) для отыскания шести неизвестных параметров $c_1, c_2, \underline{x}, \bar{x}, \underline{y}, \bar{y}$. Полученные условия имеют простой интуитивный смысл. Уравнение (14) выражает условие неуменьшения функции выигрыша при увеличении X. Уравнение (16) выражает условие оптимального выбора момента применения управления. Действительно, если фиксированные издержки уже заплачены, то при условии $U'(x) > k^+$ можно увеличить максимизируемый функционал на $(U'(x) - k^+)\,dx$, увеличив X на величину dx. Условие (16) означает, что начать увеличение X следует в тот момент, как только $U'(x) = k^+$. Данный выбор момента управления не позволяет величине X опуститься ниже такого уровня, где подобное управление могло бы уменьшить максимизируемый функционал. Увеличивать X выгодно пока $U'(x) > k^+$. И следует прекратить увеличение, как только $U'(x) = k^+$. Это и отражено в равенстве (12). Условия (13),(15) и (17) трактуются аналогично.

Заметим, что условия (12)-(13) и условия (16)-(17) определяют несовпадающие между собой $\underline{x}$ и $\underline{y}$, а также $\bar{x}$ и $\bar{y}$ в силу того, что в уравнениях (14) (15) присутствуют положительные слагаемые K^+ и K^-. Если же $K^+ \to 0, K^- \to 0$, то в силу полученных уравнений $\underline{x} \to \underline{y}, \bar{x} \to \bar{y}$. При нулевых фиксированных издержках данные величины совпадут и оптимальным управлением станет выполнение бесконечно малого увеличения X, если $X = \underline{x}$ и бесконечно малого уменьшения если $X = \bar{x}$.

Выписывая уравнения (12)-(13) используя (2), получим

$$U'(\underline{y}) = \frac{1+c^+}{\beta}\,,$$

$$U'(\bar{y}) = \frac{1-c^-}{\beta}\,.$$

Из этих условий следует, что при уменьшающихся пропорциональных издержках ($c^- \to 0$, $c^+ \to 0$) $U'(\underline{y}) \to \dfrac{1}{\beta}$, $U'(\bar{y}) \to \dfrac{1}{\beta}$, следовательно, при вогнутой функции $U(\cdot)$ на $[\underline{y}, \bar{y}]$ значения $\underline{y}$ и $\bar{y}$ будут сближаться. В предельном случае, когда $c^- = c^+ = 0$, они сойдутся к одинаковому значению $y = \underline{y} = \bar{y}$.

Выше были получены необходимые условия оптимального управления для случая, когда функция выигрыша $U(X)$ является дважды непрерывно дифференцируемой (за исключением нескольких точек). В [4] доказывается результат, показывающий достаточность полученных условий для оптимальности управления в классе всех допустимых управлений. Ниже он представлен в качестве теоремы.

О п р е д е л е н и е. *Будем говорить, что функция $u(x)$ удовлетворяет системе квази-вариационных неравенств, если для каждого $x \in (0, \infty)$*

$$\begin{cases} \mathcal{L}u(x) + R(x) \le 0\,, \\ u(x) \ge Mu(x)\,, \\ (u(x) - Mu(x))(\mathcal{L}u(x) + R(x)) = 0\,, \end{cases}$$

где $\mathcal{L}u(x) = \dfrac{1}{2}\sigma^2 x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu x \dfrac{\partial u}{\partial x} - \beta u$, $Mu(x) = \sup\limits_y \{u(x+y) - C(y)\}$, *где $C(y)$ – функция издержек, определенная в* (1).

Выше было получено, что функция выигрыша должна удовлетворять (4), (8),(9), которые эквивалентны тому, что функция выигрыша удовлетворяет системе квази-вариационных неравенств при достаточной гладкости этой функции.

О п р е д е л е н и е. *Пусть $u(x)$ удовлетворяет системе квази-вариационных неравенств. Управление $(\tau_i, \Delta x_i)$ $i = 1, 2, \ldots$ будем называть восстановленным по $u(x)$, если τ_i и Δx_i определяются из следующих условий:*

$$\tau_i = \inf\{t > \tau_{n-1} : u(X(t)) = Mu(X(t))\}\,,$$

$$\Delta x_i = \arg\inf_y \{u(x+y) - C(y)\}\,.$$

Т е о р е м а. *Пусть функция $u(x)$ является решением системы квази-вариационных неравенств. Пусть $u(x)$ является непрерывно-дифференцируемой при $x \in (0, \infty)$ и дважды непрерывно-дифференцируемой для любых x за исключением конечного числа точек. Пусть существуют константы $0 < P_1 < P_2 < \infty$, такие что $u(x)$ является линейной на интервалах $(0, P_1)$ и (P_2, ∞). Тогда для каждого $x \in (0, \infty)$ для функции выигрыша $U(x)$ справедливо*

$$U(x) \le u(x)\,.$$

Если, кроме того, управление, восстановленное по функции $u(x)$, является допустимым, то оно является оптимальным для рассматриваемой задачи, и справедливо

$$U(x) = u(x)\,.$$

Таким образом, данная теорема утверждает, что если удастся найти достаточно гладкое решение (4),(12)–(17), то оно будет определять оптимальную функцию выигрыша, по которой можно будет восстановить оптимальное управление. Общий вид оптимального управления и линейность функции выигрыша на интервалах $(0, P_1)$ и (P_2, ∞) естественным образом возникнут при решении квази-вариационных неравенств в силу вогнутости $R(X)$ и линейности издержек. Ниже определенного уровня $P_1 = \underline{x}$ отдача от инвестиций больше издержек, и оптимально увеличить X до фиксированного уровня $\underline{y}$, определяемого из (12). И существует некоторый уровень $P_2 = \bar{x}$, находясь выше которого, оптимально деинвестировать до уровня $X = \bar{y}$, определяемого из (13). Также из вогнутости $R(X)$ следует, что если величина X принадлежит отрезку $[\underline{x}, \bar{x}]$, то оптимальной стратегией будет пассивное управление, поскольку выигрыш от управления не превзойдет издержек от изменения уровня инвестиций.

3.1. Численный пример. Рассмотрим случай $R(x) = \alpha\,\mathrm{ln}x - \gamma(x-a)^2$. Общее решение уравнения (4) имеет вид (7). Подставляя это общее решение в краевые условия (14),(15),(12),(13),(16),(17) получим систему для нахождения неизвестных параметров управления:

$$\begin{cases}
\frac{\alpha}{\beta\underline{y}} + c_1\lambda_1\underline{y}^{\lambda_1-1} + c_2\lambda_2\underline{y}^{\lambda_2-1} - \frac{2\gamma a}{\mu-\beta} + \frac{2\gamma}{\sigma^2+2\mu-\beta}\underline{y} = -k^+ ,\\
\dfrac{\alpha}{\beta\bar{y}} + c_1\lambda_1\bar{y}^{\lambda_1-1} + c_2\lambda_2\bar{y}^{\lambda_2-1} - \dfrac{2\gamma a}{\mu-\beta} + \dfrac{2\gamma}{\sigma^2+2\mu-\beta}\bar{y} = k^- ,\\
\dfrac{\alpha}{\beta\underline{x}} + c_1\lambda_1\underline{x}^{\lambda_1-1} + c_2\lambda_2\underline{x}^{\lambda_2-1} - \dfrac{2\gamma a}{\mu-\beta} + \dfrac{2\gamma}{\sigma^2+2\mu-\beta} = -k^+ ,\\
\dfrac{\alpha}{\beta\bar{x}} + c_1\lambda_1\bar{x}^{\lambda_1-1} + c_2\lambda_2\bar{x}^{\lambda_2-1} - \dfrac{2\gamma a}{\mu-\beta} + \dfrac{2\gamma}{\sigma^2+2\mu-\beta} = k^- ,\\
\dfrac{\alpha}{\beta}\mathrm{ln}\underline{x} + c_1\underline{x}^{\lambda_1} + c_2\underline{x}^{\lambda_2} - \dfrac{2\gamma a}{\mu-\beta}\underline{x} + \dfrac{\gamma}{\sigma^2+2\mu-\beta}\underline{x}^2 = K^+ + k^+(\underline{y}-\underline{x}) + \\
\qquad + \dfrac{\alpha}{\beta}\mathrm{ln}\underline{y} + c_1\underline{y}^{\lambda_1} + c_2\underline{y}^{\lambda_2} - \dfrac{2\gamma a}{\mu-\beta}\underline{y} + \dfrac{\gamma}{\sigma^2+2\mu-\beta}\underline{y}^2 ,\\
\dfrac{\alpha}{\beta}\mathrm{ln}\bar{x} + c_1\bar{x}^{\lambda_1} + c_2\bar{x}^{\lambda_2} - \dfrac{2\gamma a}{\mu-\beta}\bar{x} + \dfrac{\gamma}{\sigma^2+2\mu-\beta}\bar{x}^2 = K^- + k^-(\bar{x}-\bar{y}) + \\
\qquad + \dfrac{\alpha}{\beta}\mathrm{ln}\bar{y} + c_1\bar{y}^{\lambda_1} + c_2\bar{y}^{\lambda_2} - \dfrac{2\gamma a}{\mu-\beta}\bar{y} + \dfrac{\gamma}{\sigma^2+2\mu-\beta}\bar{y}^2 .
\end{cases}$$

Коэффициенты издержек рассчитываются по формулам (2), в предположении, что ценность денег растянута во времени. При $\alpha > 0$ и $\gamma = 0$ решения нет, поскольку из вида максимизируемого функционала следует, что оптимальное значение не существует при $\mu - \dfrac{\sigma^2}{2} > 0$.

Положим $\alpha = 0,\ \gamma = 1,\ a = 5,\ \mu = 0.2,\ \sigma = 0.3$. На рис.1 показана функция выигрыша при $C^+ = 0.5,\ C^- = 0.5,\ c^- = 0.5,\ c^+ = 0.5$. Если уменьшить фиксированные издержки, задав $C^+ = 0.005,\ C^- = 0.005$ получим функцию, изображенную на рис. 2. Если же уменьшить пропорциональные издержки, полагая $c^+ = 0.02,\ c^- = 0.02$, то функция выигрыша будет иметь вид, представленный на рис.3. Численный эксперимент подтверждает полученные ранее результаты, согласно которым при ненулевых фиксированных и пропорциональных издержках решение описывается четырьмя параметрами $\underline{x}, \underline{y}, \bar{y}, \bar{x}$, при нулевых фиксированных издержках - только двумя $\underline{x}$ и $\bar{x}$ (при выходе за границы отрезка $[\underline{x}, \bar{x}]$ управление возвращает x на границу), а при ненулевых фиксированных и нулевых пропорциональных издержках решение описывается тремя параметрами $\underline{x}, y, \bar{x}$ и оптимальное управление возвращает с верхней границы $\bar{x}$ и нижней границы $\underline{x}$ в одну и ту же точку $y \in [\underline{x}, \bar{x}]$. На графиках видно, что при уменьшающихся фиксированных издержках сближаются $\underline{x}$ с $\underline{y}$, а $\bar{y}$ с $\bar{x}$, а при уменьшающихся пропорциональных издержках сближаются $\underline{y}$ и $\bar{y}$.

На рис.4 показан случай $\alpha = 1,\ \gamma = 0.2,\ C^+ = 0.5,\ C^- = 0.5,\ c^- = 0.5,\ c^+ = 0.5$. Верхняя граница $\bar{x}$ уменьшения x (продажи) значительно больше чем на рис.1, что имеет

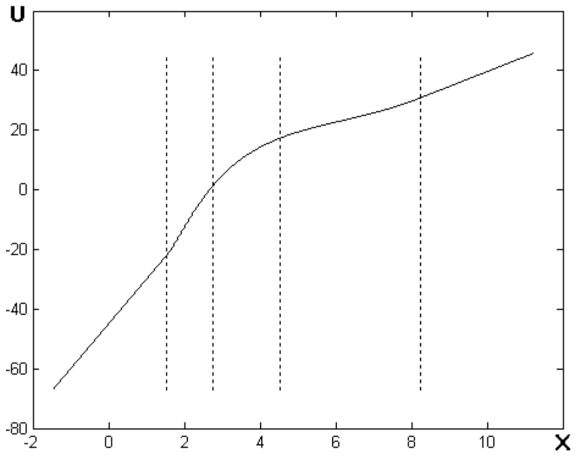

Рис. 1. Функции выигрыша: $C^+ = C^- = 0.5,\ c^+ = c^- = 0.5$ при $\alpha = 0, \gamma = 1$

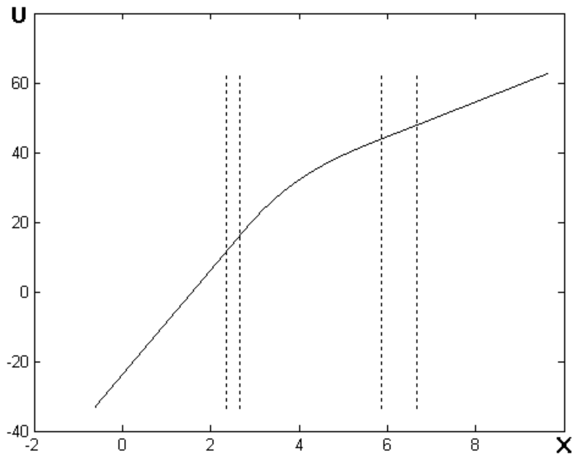

Рис. 2. Функции выигрыша: $C^+ = C^- = 0.005,\ c^+ = c^- = 0.5$ при $\alpha = 0, \gamma = 1$

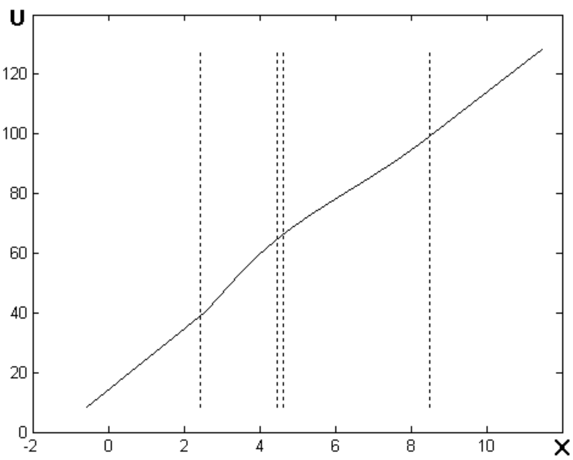

Рис. 3. Функции выигрыша: $C^+ = C^- = 0.5,\ c^+ = c^- = 0.02$ при $\alpha = 0, \gamma = 1$

экономическую интерпретацию. Поскольку в функцию полезности входит $\ln x$, а штраф за отклонение $(x-a)^2$ входит с меньшим весом, инвестор в большей степени позволяет активу расти в цене. Зависимость уменьшения границ при увеличении γ продемонстрирована на рис.5.

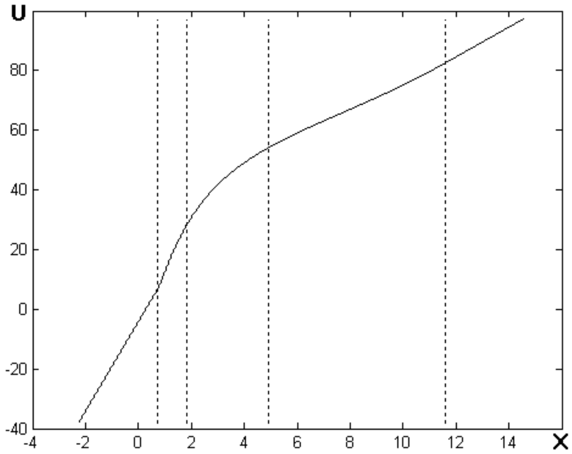

Рис. 4. Функции выигрыша: $C^+ = C^- = 0.5,\ c^+ = c^- = 0.5$ при $\alpha = 1, \gamma = 0.2$

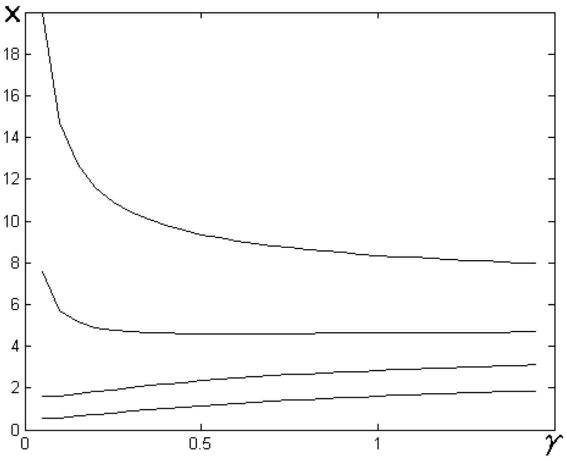

Рис. 5. Зависимость $\underline{x}, \underline{y}, \bar{y}, \bar{x}$ от γ

На рис.6 показана зависимость $\underline{x}, \underline{y}, \bar{y}, \bar{x}$ от β при значениях параметров $\alpha = 1$, $\gamma = 0.3$, $a = 5$, $\mu = 0.2$, $\sigma = 0.3$ при издержках, по-прежнему равных $C^+ = 0.5$, $C^- = 0.5$, $c^- = 0.5$, $c^+ = 0.5$. Поскольку β характеризует степень предпочтения настоящего по сравнению с будущим у инвестора, то возрастающая зависимость границ управления означает, что он меньше надеется на благоприятный случай самостоятельного роста x до требуемого уровня, и самостоятельно доводит его до оптимальных границ.

Рис.7 и 8 показывают изменение параметров управления при изменении μ и σ соответственно. Из графиков видно, что при увеличении μ возрастает верхняя граница $\bar{x}$, а при увеличении σ $\bar{x}$ также возрастает, а $\underline{x}$ уменьшается. Это можно проинтерпретировать следующим образом. При увеличении μ возрастают издержки по возвращению x назад до оптимального уровня, так как это приходится делать чаще. Поэтому с увеличением μ оптимальным становится возвращать x в оптимальную область не сразу, а несколько позже.

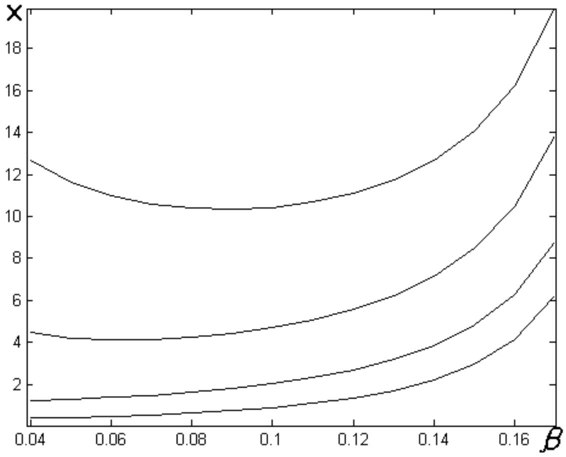

Рис. 6. Зависимость $\underline{x}, \underline{y}, \bar{y}, \bar{x}$ от β

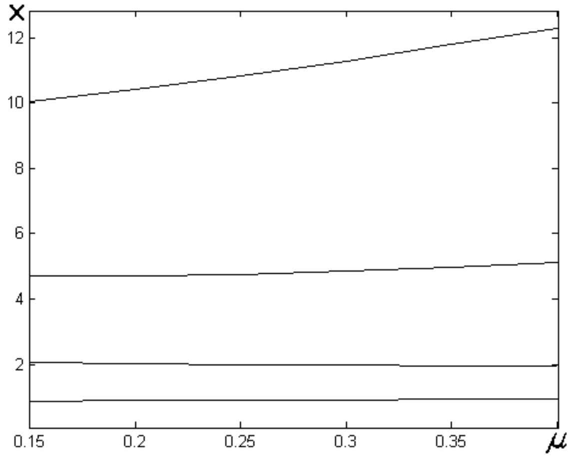

Рис. 7. Зависимость $\underline{x}, \underline{y}, \bar{y}, \bar{x}$ от μ

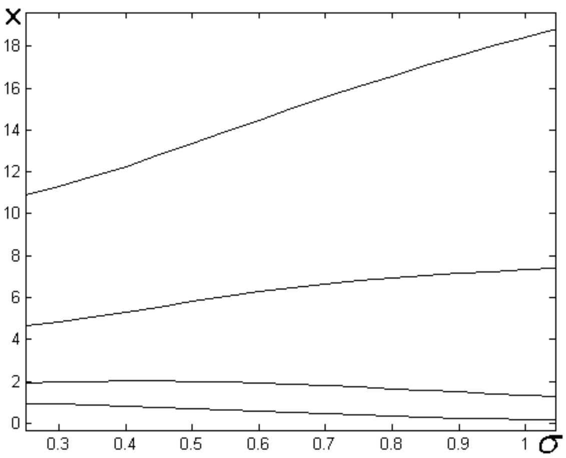

Рис. 8. Зависимость $\underline{x}, \underline{y}, \bar{y}, \bar{x}$ от σ

При увеличении σ увеличивается вероятность для x покинуть оптимальную область, но поскольку σ больше, то увеличивается вероятность и самостоятельного возвращения без управления. Поэтому оптимальной стратегией является применение управления только когда значение x значительно удалилось от оптимальной области.

3.2. Интегральное представление функции выигрыша через функцию Грина. Решение системы (14),(15),(12),(13),(16), (17) сложно найти, если неизвестна функция выигрыша $U(\cdot)$. Задача упрощается, если известно интегральное представление функции $U(\cdot)$ через функцию Грина. Рассмотрим функцию $\Psi(x) = ax^2 + bx$. Выберем коэффициенты

$$\begin{cases} a = \dfrac{k^- + k^+}{2(\underline{x} - \bar{x})}\,, \\[2ex] b = -\dfrac{k^-\underline{x} + k^+\bar{x}}{\underline{x} - \bar{x}} \end{cases} \tag{18}$$

так, чтобы обеспечивалось равенство

$$\begin{cases} \Psi'(\underline{x}) = k^+\,, \\ \Psi'(\bar{x}) = -k^-\,. \end{cases}$$

Производя замену $U = Z + \Psi$ получаем, что функция Z является решением следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\sigma^2 x^2 \dfrac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \mu x \dfrac{\partial Z}{\partial x} - \beta Z + M(x) = 0\,, \\[2ex] Z'(\underline{x}) = 0,\ Z'(\bar{x}) = 0\,, \end{cases} \tag{19}$$

где $M(x) = (\sigma^2 a + 2a\mu - \beta a)x^2 + (b\mu - \beta b)x + R(x)$. Функция Грина для этой краевой задачи имеет вид

$$G(x,\zeta) = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1\lambda_2\zeta^{\lambda_1+\lambda_2-1}\left(\dfrac{1}{\underline{x}^{\lambda_1}\bar{x}^{\lambda_2}} - \dfrac{1}{\underline{x}^{\lambda_2}\bar{x}^{\lambda_1}}\right)} \begin{cases} \phi_2(\zeta)\phi_1(x), x \in [\underline{x}, \zeta]\,, \\[2ex] \phi_1(\zeta)\phi_2(x), x \in [\zeta, \bar{x}]\,, \end{cases}$$

где

$$\begin{cases} \phi_1(x) = \dfrac{\lambda_2}{\underline{x}^{\lambda_1}(\lambda_2 - \lambda_1)} x^{\lambda_1} - \dfrac{\lambda_1}{\underline{x}^{\lambda_2}(\lambda_2 - \lambda_1)} x^{\lambda_2}\,, \\[2ex] \phi_2(x) = \dfrac{\lambda_2}{\bar{x}^{\lambda_1}(\lambda_2 - \lambda_1)} x^{\lambda_1} - \dfrac{\lambda_1}{\bar{x}^{\lambda_2}(\lambda_2 - \lambda_1)} x^{\lambda_2}\,. \end{cases}$$

Общим решением краевой задачи (19) будет функция $Z = \int_{\underline{x}}^{\bar{x}} G(x,\zeta)M(\zeta)d\zeta$, поэтому искомое интегральное представление функции U имеет вид

$$U = Z + \Psi = \int_{\underline{x}}^{\bar{x}} G(x,\zeta)M(\zeta)d\zeta + ax^2 + bx\,,$$

где коэффициенты a и b определяются выражениями (18).

4. Обобщение задачи на случай с задержкой

Рассмотрим теперь случай, когда осуществление операций покупки и продажи будет происходить не сразу, а по прошествии некоторого периода времени T после оплаты операции.

В этом случае функция полезности $U(\cdot)$ будет уже зависеть не только от фактической стоимости акций, но и от потока ранее осуществленных, но пока не исполненных заявок на продажу и покупку:

$$U_t(\cdot) = U_t(x, \Psi) \quad \text{где} \quad \Psi = (\tau_1, x_1, \tau_2, x_2, \ldots, \tau_k, x_k), \tau_i \in (t - T, t]$$

Справедливо следующее утверждение:

Т е о р е м а. *Оптимальное управление $(\tau_i, \Delta x_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ зависит лишь от величины $X = x + \sum_i x_i$, где x_i – поток еще не исполнившихся покупок и продаж актива, а x – его реально располагаемое количество.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не умаляя общности, положим $t = 0$. Распишем функцию выигрыша

$$U(x, \Psi) = \mathbb{E}\left\{\int_0^T R_t(x, \Psi)e^{-\beta t}\, dt\right\} + \sup_{\tau_i, x_i} \mathbb{E}\left\{\int_T^\infty R_t(x, \Psi)e^{-\beta t}\, dt + \sum C_i\right\},$$

где через $\sum C_i$ обозначены издержки и затраты либо выигрыши от покупки и продажи актива соответственно. Так как во втором интеграле интегрирование ведется от момента T, когда изменение количества рискового актива уже произошло, выражение можно переписать в виде

$$U(x, \Psi) = \mathbb{E}\left\{\int_0^T R_t(x, \Psi)e^{-\beta t}\, dt\right\} + \sup_{\tau_i, x_i} \mathbb{E}\left\{\int_T^\infty R_t(X, \emptyset)e^{-\beta t}\, dt + \sum C_i\right\}.$$

Замечая, что значение первого интеграла зафиксировано ранее принятыми решениями о покупке-продаже, а во второй интеграл предпринятые покупки-продажи x_i входят только в виде суммы $X = x + \sum x_i$, получим утверждение теоремы. $\square$

Из теоремы следует простое выражение для функции $U(x, \Psi)$:

$$U(x, \Psi) = U(X, \emptyset) + \mathbb{E}\left\{\int_0^T (R(x, \Psi) - R(X, \emptyset))\, dt\right\}, \tag{20}$$

поскольку функциям $U(x, \Psi)$ и $U(X, \emptyset)$ соответствует одинаковое оптимальное управление, и траектории X_t различаются лишь на отрезке $[0, T]$, а на $[T, \infty]$ совпадают.

Дальше будем обозначать $U(X, \emptyset) = U(X)$.

Запишем уравнения для однопараметрической функции выигрыша, используя равенство (20).

В случае, когда оптимально не предпринимать никаких действий, уравнение (4) останется прежним. Если является оптимальным изменение X, то должны быть выполнены неравенства

$$U(x) \le \max_y\{-K^+ - k^+(y - x) + U(x, \Psi)\}, \quad \text{условие увеличения X}, \tag{21}$$

$$U(x) \le \max_y\{-K^- - k^-(x - y) + U(x, \Psi)\}, \quad \text{условие уменьшения X}, \tag{22}$$

где $\Psi = (t, y - x)$ для текущего момента времени t. Используя представление (20), условия (21) и (22) можно переписать в виде

– условие увеличения X

$$U(x) \leq \max_y \Big\{ -K^+ - k^+(y-x) + U(y) + \mathbb{E}\left\{ \int_0^T e^{-\beta t}(R(x) - R(y))\,dt \right\} \Big\}, \tag{23}$$

– условие уменьшения X

$$U(x) \leq \max_y \Big\{ -K^- - k^-(x-y) + U(y) + \mathbb{E}\left\{ \int_0^T e^{-\beta t}(R(x) - R(y))\,dt \right\} \Big\}, \tag{24}$$

Интеграл разности $\Phi(x,y) = \mathbb{E}\left\{ \int_0^T e^{-\beta t}(R(x) - R(y))\,dt \right\}$ вычисляется непосредственно. Например, для $R(x) = \ln x$, $\Phi(x,y) = \dfrac{\ln x - \ln y}{\beta}(1 - e^{-\beta T})$. Краевые условия получаются аналогично случаю без задержки с учетом (20):

$$U(\underline{x}) = -K^+ - k^+(\underline{y} - \underline{x}) + U(\underline{y}) + \Phi(\underline{x}, \underline{y})\,, \tag{25}$$

$$U(\bar{x}) = -K^- - k^-(\bar{x} - \bar{y}) + U(\bar{y}) + \Phi(\bar{x}, \bar{y})\,. \tag{26}$$

Если $U(X) \in C^1$ то дифференцируя уравнения (25) и (26) по, соответственно, $\underline{x}, \bar{x}$ и $\underline{y}, \bar{y}$ получим недостающие четыре уравнения для шести краевых условий:

$$U'(\underline{x}) = k^+ + \Phi'_x(\underline{x}, \underline{y})\,, \tag{27}$$

$$U'(\bar{x}) = -k^- + \Phi'_x(\bar{x}, \bar{y})\,, \tag{28}$$

$$-k^+ + U'(\underline{y}) + \Phi'_y(\underline{x}, \underline{y}) = 0\,, \tag{29}$$

$$k^- + U'(\bar{y}) + \Phi'_y(\bar{x}, \bar{y}) = 0\,. \tag{30}$$

Таким образом, также как и в случае с системой без задержки, имеются шесть уравнений (25)–(30) для отыскания шести неизвестных параметров $c_1, c_2, \underline{x}, \bar{x}, \underline{y}, \bar{y}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *А. Бенсусан, Ж. Лионс.* Импульсное управление и квази-вариационные неравенства. // –М.: Наука, 1987.
2. *B.Perthame.* Continious and impulse control of diffusion proccesses in R^n. //Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, 1984, v.8, № 10, p.1227-1239.
3. *Gabriela Mundaca, Bernt Oksendal.* Optimal stochastic intervention control with application to the exchange rate. // Journal of Mathematical Economics,1998, № 29, p.225-243.
4. *Abel Cadenillas, Fernando Zapatero.* Optimal central bank intervention in the foreign exchange market. // Journal of Economic Theory, 1999, № 87, p.218-242.
5. *Abel Cadenillas, Fernando Zapatero.* Classical and impulse stochastic control of the exchange rate using interest rates and reserves. // Mathematical Finance, 2000, v.10, № 2, p.141-156.
6. *Valeri I. Zakamouline.* European option pricing and hedging with both fixed and proportional transaction costs. // Journal of Economic Dynamics & Control, 2006, v.30, № 1, p.1-25.
7. *Avner Bar-Ilan, Agnes Sulem, Alessandro Zanello.* Time-to-build and capacity choice. // Journal of Economic Dynamics and Control, 2002, v.26, № 1, p.69-98.
8. *Valeri I. Zakamouline.* Optimal portfolio selection with both fixed and proportional transaction costs for a CRRA investor with finite horizon. // 2002, Discussion papers of Department of Finance and Management Science, NHH.
9. *Б. Оксендаль.* Стохастические дифференциальные уравнения. //– М.: Мир, 2003.
10. *P.L. Lions.* Optimal control of diffusion processes and Hamilton-Jacobi-Bellman equations. // Partial Differential Equations, 1983, № 8, p.1101-1174.
11. *B. Perthame.* On the regularity of the solutions of quasi-variational inequalities. // Journal of Functional Analysis, 1985, № 64, p.190-208..
12. *A. Sulem.* Quasi-variational inequalities and impulse control. // MIT Press, 1993.

Поступила в редакцию 29.03.2006.