Выбор оптимального портфеля инвестором с CRRA при фиксированных и пропорциональных транзакционных издержках и конечным горизонтом планирования

Valeri. I. Zakamouline

Institute of Finance and Management Science Norwegian School of Economics and Business Administration Helleveien 30, 5045 Bergen, Norway Valeri.Zakamouline@nhh.no

Аннотация

В этой работе изучается задача оптимального выбора портфеля для постоянного относительного риска инвестора, который сталкивается с фиксированными и пропорциональными транзакционными издержками и максимизирует ожидаемую полезность богатства на конец периода. Используется модель непрерывного времени и метод приближения цепи Маркова для численного решения оптимальной торговой политики. Численное решение показывает, что портфельное пространство разделено на три непересекающиеся области (покупка, продажа, и отсутствие сделок (ОС)) и четыре границы описывают оптимальную политику. Если портфель лежит в области Покупка, оптимальной стратегией является покупка рисковых активов, пока портфель не достигнет нижней (Покупка) целевой границы. Аналогично, если портфель лежит в области Продажа, оптимальная стратегия заключается в продаже рисковых активов, пока портфель не достигнет верхней (Продажа) целевой границы. Все эти границы являются функциями горизонта инвестора и составляют его богатство. Некоторые важные свойства оптимальной политики заключаются в следующем: по мере приближения конечного срока область ОС расширяется. Когда область ОС расширяется, богатство снижается. В данной модели с пропорциональными транзакционными издержками, когда богатство инвестора увеличивается, целевые границы быстро сходятся к ОС-границе. Когда богатство становится малым, целевые границы двигаются ближе к линии Мертона. Чем ближе конечный срок, тем раньше начинается это движение. Также рассмотрено влияние волатильности, CRRA, и уровня транзакционных издержек на оптимальную политику инвестора.

1 Введение

В этой работе изучается задача оптимального выбора портфеля для постоянного относительного риска инвестора. Инвестор сталкивается с фиксированными и пропорциональными транзакционными издержками и стремится максимизировать ожидаемую полезность конца периода богатства.

Эта проблема распределения активов представляет собой вариант классического потребления – инвестиционная проблема в современных финансах. При отсутствии транзакционных издержек, аналитическое решение данной проблемы было получено Мертоном (см., например, Мертон (1971)). Когда цена акций определяется как геометрическое броуновское движение, решение показывает, что для инвестора является оптимальным держать постоянную долю в рисковых активах. С течением времени портфель предполагается плавно регулировать таким образом, чтобы эта доля сохранялась. Более того, эта доля не зависит от горизонта планирования инвестора.

Введение транзакционных издержек, значительно повышает уровень сложности задачи оптимального выбора портфеля. Задача упрощается, если предположить, что транзакционные издержки пропорциональны количеству рисковых активов на бирже, и нет транзакционных издержек на торги в безрисковый актив. В этом случае задача сводится к сингулярной задаче стохастического управления, которая была решена Норманом Дэвисом (1990). Шереве и Сонер (1994) изучали эту проблему применяя теорию вязкостных решений уравнений Гамильтона-Якоби-Беллмана (см., например, Флемминг и Сонер (1993)).

При наличии пропорциональных транзакционных издержек решение определяет, что портфельное пространство разделено на три непересекающихся положительные конуса, которые могут быть определены как область покупки, область продажи и область отсутствия сделок. Если портфель лежит в области покупки, оптимальная стратегия заключается в покупке рискового актива пока портфель не достигнет границы области покупки, а если портфель лежит в области продажи, оптимальная стратегия – продать рисковый актив, пока портфель достигает границы области продажи. Если портфель лежит в области отсутствия сделок, то регулирования не происходит. Границы области отсутствия сделок являются функциями времени.

Проблема упрощается, если горизонт планирования инвестора является бесконечным, при этом применяется стационарная политика управления портфелем. Дюма и Лучано (1991) дали точное решение задачи выбора портфеля для инвестора с CRRA. Акиан, Меналди и Салем (1996) рассмотрели случай с конечным числом акций, но при условии, что шум не коррелируется. Они охарактеризовали функцию ценности, как единственное вязкостное решение системы вариационных неравенств. Вариационные неравенства затем дискретизируются с помощью конечно-разностных схем и решаются численно.

Генотте и Юнга (1994) численно решили модель с дискретным временем для инвестора с CRRA, конечным горизонтом планирования и пропорциональными затратами по сделке. Они исследовали оптимальные торговые стратегии для большого набора реалистичных параметрами. Бойл и Лин (1997) были последователями Генотте и Юнги (1994) и разработали аналитическое выражение для косвенной функции полезности инвестора, а также для границ области отсутствия сделок.

Решение задачи выбора оптимального портфеля с фиксированным стоимостным компонентом основана на теории стохастического контроля импульса (см., например, Бенсуссан и Львов (1984)). Впервые эта теория была применена для решения проблемы инвестиционного потребления Вестнамом и Гастингсом (1988). Они разработали общую теорию и показали, что решение этой проблемы требует решения системы так называемых квазивариационных неравенств (QVI). В дальнейшем этим вопросом занимались Гастингс (1992) и Корн (1998).

При наличии пропорциональных и фиксированных затрат по сделке, портфельное пространство также можно разделить на три непересекающиеся области (покупки, продажи и отсутствия сделок), и четыре границы описывают оптимальную политику. Области Покупка и ОС разделены нижней границе области ОС, а области Продажа и ОС разделены верхней границей области ОС. Если портфель лежит в области Покупка, оптимальной стратегией является покупка рисковых активов, пока портфель не достигнет нижней (Покупка) целевой границы. Аналогично, если портфель лежит в области Продажа, оптимальная стратегия заключается в продаже рисковых активов, пока портфель не достигнет верхней (Продажа) целевой границы. Все эти границы являются функциями горизонта планирования инвестора и составляющих его богатства.

В дальнейшем задача оптимального выбора портфеля того с учетом фиксированных и пропорциональных транзакционных затрат решалась Оксендалем и Салемом (1999), а также Канкилером, Оксендалем, и Салемом (2000). Оксендаль и Салем (1999) рассматривают проблему оптимального потребления и выбора портфеля для инвестора с CRRA и бесконечным горизонтом планирования. Они сформулировали эту проблему в качестве комбинированной проблемы стохастического и импульсного управления и показали, что функция стоимости является единственным вязкостным решением квазивариационных неравенств, связанным с этой проблемой комбинированного управления. Канкилер и другие (2000) изучали те же проблемы и показали, что задача может быть сведена к альтернативной последовательности комбинированного стохастического управления и задачам оптимальной остановки. В обеих работах численное решение было получено путем дискретизации квазивариационных неравенств конечно-разностными схемами и решено с помощью алгоритма, основанного на методе итераций.

Шредер (1995) решил численно проблему потребление - инвестиции для инвестора с CRRA и конечным горизонтом планирования, но он учитывал наличие только постоянных транзакционных затрат.

В данной работе численно решается проблема распределения активов для инвестора с конечным горизонтом планирования методом приближения Марковской цепи (см., например, Кушнер и Дюпюи (1992)). С помощью этого метода решение вариационных неравенств получается поворотом стохастических дифференциальных уравнений в цепях Маркова с целью применения алгоритма динамического программирования - алгоритма дискретного времени.

На протяжении всей статьи мы предполагаем, что параметры модели всегда выбираются таким образом, чтобы исключить случаи с заимствованием безрискового актива и короткие продажи рисковых активов.

Остальная часть работы организована следующим образом. В разделе 2 представлены модели с непрерывным временем. Раздел 3 посвящен построению дискретных приближений времени к непрерывным во времени ценовым процессам, используемых в разделе 2, а также методу решения. Для сравнения и полноты, в разделах 4, 5 и 6 представлены модели и численные решения проблем при отсутствии транзакционных издержек, при наличии только пропорциональных или только фиксированных транзакционных издержек. Наш основной вклад представлен в разделе 7, где обсуждаются некоторые свойства функции стоимости и проводится численный анализ оптимальной политики. Также рассматривается влияние на оптимальную политику от той или иной волатильности, CRRA и уровень транзакционных издержек. В разделе 8 представлены выводы по статье и обсуждаются некоторые возможные расширения.

2. Непрерывная модель времени

Первоначально, непрерывной во времени считается экономика с одним рисковым и одним безрисковым активами. Пусть (Ω, F, P) вероятностное пространство с заданной фильтрации $\{F_t\}_{0 \le t \le T}$. Безрисковый актив (банковский счет) характеризуется постоянной процентной ставкой $r \ge 0$, и, следовательно, прирост от суммы инвестиций в банке, *xt*, задается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$dx_t = rx_t dt \tag{1}$$

Рисковым активом будем считать акции и предположим, что сумма инвестиций в акции, *yt*, изменяется в соответствии с геометрическим броуновским движением

$$dy_t = \mu y_t dt + \sigma y_t dB_t \tag{2}$$

где μ и σ – константы, B_t является одномерным F_t-броуновским движением.

Будем считать, что покупка или продажа акций на суммы ξ несет транзакционные издержки, состоящие из суммы постоянных затрат $k \ge 0$ (не зависят от размера сделки) плюс стоимость $\lambda|\xi|$ пропорциональных затрат по сделке ($\lambda \ge 0$). Эти расходы взяты из банковского счета.

Мы полагаем, что в любой момент инвестор может принять решение о переводе денег с банковского счета в акции и наоборот. Контроль инвестора является чисто импульсным $v = (\tau_1, \tau_{2,} ...; \xi_1, \xi_1, ...)$. Здесь $0 \le \tau_1 < \tau_2 < ...$ являются F_τ-моменты остановки, показывающие время, когда инвестор решает изменить свой портфель. А ξ_i представляют случайные переменные, определяющие транзакционные издержки в данный момент времени. Если такой контроль применить к системе вида (x_t, y_t), он приобретает следующую форму

$$\begin{aligned} dx_t &= r x_t dt \\ dy_t &= \mu y_t dt + \sigma y_t dB_t \\ x_{\tau_{i+1}} &= x_{\overline{\tau_{i+1}}} - k - \xi_{i+1} - \lambda |\xi_{i+1}| \\ y_{\tau_{i+1}} &= y_{\overline{\tau_{i+1}}} + \xi_{i+1} \end{aligned} \qquad \tau_i \le t < \tau_{i+1} \tag{3}$$

Если инвестор имеет сумму *x* на банковском счете, и сумму *y*, инвестированную в акции, его чистые активы определяются как вклады на банковском счете после продажи всех акций (если доходы являются положительными после вычета транзакционных издержек) или закрытия короткой позиции на фондовом рынке, и задается следующим образом

$$N(x,y) = \begin{cases} max\{x + y(1-\lambda) - k, x\} & if \ \ y \ge 0 \\ x + y(1-\lambda) - k & if \ \ y < 0 \end{cases} \tag{4}$$

Область платежеспособности определяется как область, в которой чистые активы инвестора является неотрицательным.

$$S = \{(x,y) \in R^2; N(x,y) \ge 0\} \tag{5}$$

Рассмотрим инвестора с конечным горизонтом планирования, который имеет полезность только периодического богатства. Предполагается, что инвестор имеет постоянное относительное неприятие риска. В этом случае его функция полезности имеет вид

$$\begin{aligned} U(W) &= \frac{W^{\gamma}}{\gamma} \qquad \gamma < 1, \gamma \ne 0 \\ U(W) &= ln(W) \qquad \gamma = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

в то время, как $(1-\gamma)$ является мерой относительного неприятия риска инвестора (АСР).

Проблема инвестора заключается в выборе допустимой торговой стратегии, максимизирующей $E_t[U(N_T)]$ в соответствии с (3). Мы определим значение функции в момент времени *t*, как

$$V(t,x,y) = \sup_{v \in A(x,y)} E_t^{x,y}[U(N_T)], \tag{7}$$

где $A(x,y)$ обозначает множество допустимых управлений, которые не приводят (3) к выходу из S. Определим вмешательства оператора (или максимум полезности оператора) *M* как

$$MV(t,x,y) = \sup_{(x',y') \in S} V(t,x',y') \tag{8}$$

где x' и y' – новые значения *x* и *y*. $MV(t,x,y)$ представляет значение стратегии, которая состоит в выборе лучшей сделки. Определим область продолжения D:

$$D = \{(x,y); V(t,x,y) > MV(t,x,y)\} \tag{9}$$

Область продолжения является областью, где не оптимально повторно балансировать портфель инвестора.

Теперь охарактеризуем функцию стоимости и связанную с ней оптимальную стратегию, предполагая существование оптимальной стратегии для каждой начальной точки (t,x,y). Тогда, если оптимальная стратегия заключается в незаключении сделки, полезностью, связанной с этой стратегией является $V(t,x,y)$. С другой стороны, выбор наилучшей сделки, а затем последующей оптимальной стратегии дает полезность $MV(t,x,y)$. Пока первая стратегия является оптимальной, ее полезность больше или равна полезности, связанной со второй стратегией. Таким образом $V(t,x,y) \geq MV(t,x,y)$, со знаком равенства, когда оптимально совершать сделку. Кроме того, в области продолжения применение принципа динамического программирования дает $LV(t,x,y)=0$, где оператор L определяется следующим образом

$$LV(t,x,y)=\frac{dV}{dt}+rx\frac{dV}{dx}+\mu y\frac{dV}{dy}+\frac{1}{2}\sigma^2 y^2\frac{d^2V}{dy^2}. \tag{10}$$

Доказано (см., например, Оксендаль и Салем (1999)), что функция полезности является единственным вязкостным решением квазивариационного неравенства Гамильтона-Якоби-Беллмана (QVI):

$$max\{LV(t,x,y),MV-V\}=0. \tag{11}$$

3 Приближение цепью Маркова для задачи с непрерывным временем

Заманчиво попытаться решить уравнение в частных производных (11) с помощью классического метода конечных разностей, но оно имеет только формальное значение и его следует интерпретировать в символическом смысле. В самом деле, мы не знаем, являются ли частные производные функции стоимости четко определенными, то есть является ли функция стоимости дважды непрерывно дифференцируема. Метод решения таких задач была предложен Кушнером (Кушнер (1977), Кушнер (1990), Кушнер и Дюпюи (1992)). Основная идея этого метода включает в себя последовательную аппроксимацию задачи цепью Маркова, а затем решение соответствующей задачи оптимизации для модели цепи Маркова. Методы доказательства сходимости являются относительно простыми и требуют использования только некоторых основных идей теории слабой сходимости последовательности вероятностных мер случайных процессов. Некоторыми примерами доказательства сходимости функции стоимости с дискретным временем к моделям с непрерывным временем приведены в работах следующих авторов: Фицпатрик и Флемминг (1991), Дэвис, Панас, и Зарипхопоуло (1993), и Коллингс и Осман (1998).

В практических приложениях существует два основных подхода к реализации метода аппроксимации цепью Маркова. При использовании первого подхода строится дискретное приближение времени непрерывных во времени ценовых процессов, используемые в модели с непрерывным временем. Тогда дискретная временная программа решается с помощью алгоритм дискретного времени динамического программирования. Примеры использования этого подхода: Ходжес и Неубергер (1989), Дэвис и др. (1993). Используя второй подход, дискретизируется уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана или квазивариационное неравенство с применением схемы конечно-разностной аппроксимации, которая служит здесь только в качестве руководства к построению цепи Маркова. Коэффициенты полученного дискретного уравнения затем используется в качестве вероятностей перехода. Этот подход часто обозначают как метод «конечных разностей», но использование конечных разностей это всего лишь "устройство", чтобы получить цепь Маркова, сам по себе подход не является методом конечных разностей. Примеры использования этого подхода: Акиани др. (1996), Оксендаль1 и Салем (1999), Канкилер и др (2000).

Основной целью этого раздела является представление численной процедуры вычисления оптимальной торговой политики. Мы будем следовать первому подходу, описанному выше. Причина заключается в том, чтобы иметь возможность решить задачу численно, т.е. наша проблема дискретного времени максимизации полезности является приближением цепью Маркова к соответствующей задаче с непрерывным временем. Программа с дискретным временем затем решается с помощью алгоритма обратной рекурсии.

Рассмотрим разбиение $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T$ интервала времени $[0,T]$ и предположим, что $t_i = i\Delta t$ для $i = 0,1,...,n$, где $\Delta t = \frac{T}{n}$. Пусть ε – стохастическая переменная:

$$\varepsilon = \begin{cases} u, & с \quad вероятностью \quad p, \\ d & с \quad вероятностью \quad 1-p \end{cases}$$

Определим случайный процесс с дискретным временем для акций как:

$$y_{t_{i+1}} = y_{t_i}\varepsilon \tag{12}$$

и процесс с дискретным временем для безрискового актива как:

$$x_{t_{i+1}} = x_{t_i}\rho \tag{13}$$

Если взять $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$, $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$, $\rho = e^{r\Delta t}$ и $p = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\Delta t}\right]$, получится биномиальная модель, предложенная Коксом, Россом и Рубинштейном (1979). Вариант, при котором $u = e^{\mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}}$, $d = e^{\mu\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}}$, $\rho = e^{r\Delta t}$ и $p = \frac{1}{2}$, был предложен Хи (1990). Так как N стремится к бесконечности, дискретные во времени процессы (12) и (13) сходятся по распределению к непрерывным (2) и (1).

Предлагаются следующие схемы дискретизации для квазивариационных неравенств (11):

$$V^{\Delta t} = L(\Delta t)V^{\Delta t}, \tag{14}$$

где $L(\Delta t)$ – оператор, заданный как

$$V^{\Delta t} = \max_m \left\{ \begin{matrix} V^{\Delta t}(t_i, x - k - (1+\lambda)m\Delta y, y + m\Delta y), \\ V^{\Delta t}(t_i, x - k + (1+\lambda)m\Delta y, y - m\Delta y), \\ E\{V^{\Delta t}(t_{i+1}, x\rho, y\varepsilon)\} \end{matrix} \right\}, \tag{15}$$

где m – целое число. Проведена дискретизация y-пространства в решетке с сеткой размера Δy. Эта схема основана на принципе, что политикой инвестора является выбор оптимальной сделки, то есть покупать, продавать, или ничего не делать при определенном состоянии заданной функции выигрыша для всех состояний в следующий момент времени. Как уже упоминалось выше, мы используем биномиальное дерево для задания цен акций. Кроме того, мы должны провести дискретизацию пространство x в решетке с сеткой размером Δx.

Теорема 1. *Решение* $V^{\Delta t}$ уравнения *(14) локально равномерно сходится к единственному непрерывному вязкостному решению с ограничениями (11), так как* $\Delta t \to 0$

Доказательство основано на понятии вязкости растворов и может быть получено, следуя линий доказательства теоремы 4 Дэвиса и др. (1993).

Во всех численных расчетах были использованы следующие параметры дискретизации: $n = 20$, $\Delta x = 1$, $\Delta y = 1$. Расчеты были выполнены на стандартной IBM PC. В связи с отсутствием больших объемов памяти были обнаружены и сохранены только координаты линий четырех границ, которые характеризуют оптимальную стратегию торговли на каждый период. Алгоритм квадратично растет по сложности при увеличении количества периодов, а это означает, что вычисление оптимальной политики для периода $n+1$ занимает примерно то же самое время как вычисление оптимальных политик для всех предыдущих n периодов.

4 Оптимальная политика для случая без транзакционных издержек

Для сравнения рассмотрим случай без каких-либо затрат по сделке $(\lambda = 0, k = 0)$. Проблему инвестора можно представить в следующем виде

$$V(t,x,y) = \sup_{(x,y)} E_t^{x,y}\left[U(x_T + y_T)\right] \tag{16}$$

при условии самофинансирования

$$d(x_t + y_t) = (rx_t + \mu y_t)dt + \sigma y_t dB_t \tag{17}$$

Мертон (Мертон (1969), Мертон (1971), и Мертон (1973)) повторно параметризовал проблему путем введения новых переменных $w_t = x_t + y_t$, (общее богатство) и $\pi_t = \dfrac{y_t}{w_t}$ (доля общего богатства, которую составляют акции). Т.к. транзакции не имеют стоимости и мгновенны, π_t рассматриваться, как единственная переменная решения. Переформулировав задачу стохастического управления получим

$$V(w,t) = \sup_{\pi} E_t^w \left[U(w_T) \right] \tag{18}$$

при следующем условии

$$dw_t = \left[(\mu - r)\pi_t + r \right] w_t dt + \sigma w_t \pi_t dB_t \tag{19}$$

Мертон получил близкое по форме решение для π_t^*

$$\pi_t^* = \frac{\mu - r}{\sigma^2 (1 - \gamma)} \tag{20}$$

Это решение означает, что оптимальным для инвестора является держать постоянную долю от общего богатства в рисковых активах. Это означает, в частности, что портфель активов инвестора всегда находится на линии $y_t = q x_t$, $q = \dfrac{\pi^*}{1 - \pi^*}$ в (x, y)-плоскости. Эту линию обычно называют линией Мертон. Надо отметить, что оптимальная политика не зависит ни от горизонта планирования инвестора, ни от богатства инвестора (или его состава).

5 Пропорциональные транзакционные издержки

Здесь мы рассмотрим случай с наличием только пропорциональных транзакционных затрат $(k = 0)$. В этом случае задача может быть сформулирована, как особая задаче оптимального стохастического управления (см. Дэвис и Норман (1990) и Шевер и Сонер (1994)). В отличие от случая без транзакционных издержек в любой момент времени t портфельное пространство разделено на три непересекающихся положительных конуса, которые могут быть определены, как область покупки, продажи и отсутствия сделок. Если портфель лежит в области Покупка либо Продажа, оптимальная стратегия заключается в покупке/продаже рисковых активов пока портфель не достигнет ближайшей границе области отсутствия сделок.

Уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана для этой особой стохастической задачи оптимального управления задается следующим образом

$$\max \left\{ LV(t,x,y), -(1+\lambda)\frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dy}, (1-\lambda)\frac{dV}{dx} - \frac{dV}{dy} \right\} = 0 \tag{20}$$

где $LV(t,x,y)$ – определяется выражением (10).

Внутри области ОС инвестор не ведет торговлю. Поэтому в области ОС значение функции должно удовлетворять уравнению Гамильтона-Якоби-Беллмана: Макс $\max\{LV(t,x,y)\} = 0$. Последние два уравнения в (21) определяют области Покупка и Продажа соответственно. Так как в области Покупка оптимальная политика заключается в совершении сделок до ближайшей границы области ОС, инвестор увеличивает свою косвенную полезность, покупая некоторое количество акций, Δy, за счет снижения суммы активов на банковском счете $(1+\lambda)\Delta y$. Поэтому $V_y > (1+\lambda)V_x$. Необходимое условие оптимальности – $V_y \leq (1+\lambda)V_x$. Набор точек(x, y), для которых имеет место неравенство с равенством определяет границу dB между областями Покупка и ОС. Аналогично, уравнение $(1-\lambda)V_x = V_y$ определяет границу между областями Продажа и ОС.

Границы dB и dS являются прямыми, проходящими через начало координат, и могут быть описаны их угловыми коэффициентами $q_l(t)$ (нижняя граница области ОС) и $q_u(t)$ (верхняя граница ОС). Тот факт, что эти границы являются прямыми, проходящими через начало координат есть результатом гомотетичности функции стоимости $V(t,x,y)$ (см., например, Норман и Дэвис (1990), теорема 3.1).

Границы области ОС являются функциями горизонта планирования инвестора и не зависят от богатства инвестора. Кроме того, область ОС имеет тенденцию к расширению. Чтобы лучше понять оптимальную политику, предоставлены численные иллюстрации (см. рис (1) и (2)) со следующими данными: $\mu = 10\%$, $r = 5\%$, $\sigma = 25\%$, (все в годовом выражении), $RRA = 2$ и $\lambda = 0.01$.

Заинтересованный читатель для детального изучения оптимальной политики инвестора с конечным горизонтом планирования и большим набором реалистичных параметров может обратиться к Генотте и Юнге (1994).

6 Фиксированные транзакционные издержки

Здесь мы рассмотрим случай с наличием только фиксированных транзакционных издержек только ($A = 0$). Задача может быть сформулирована таким же образом, как и в разделе 2, но с поправкой на нулевые пропорциональные затраты по сделке. Как и в предыдущем случае, портфельное пространство снова может быть разделено на три непересекающиеся области: Покупка, Продажа, Отсутствие сделок. Если портфель лежит области Покупка или Продажа, оптимальная стратегия заключается в покупке/продаже рисковых активов, пока портфель не достигнет так называемой «целевой» границы. Все эти границы являются функциями горизонта планирования инвестора и зависят от состава его богатства, так что возможно следующее описание оптимальной политики инвестора:

$$\begin{aligned} y &= q_l(x,t)x \\ y &= q^*(x,t)x \\ y &= q_u(x,t)x \end{aligned} \tag{22}$$

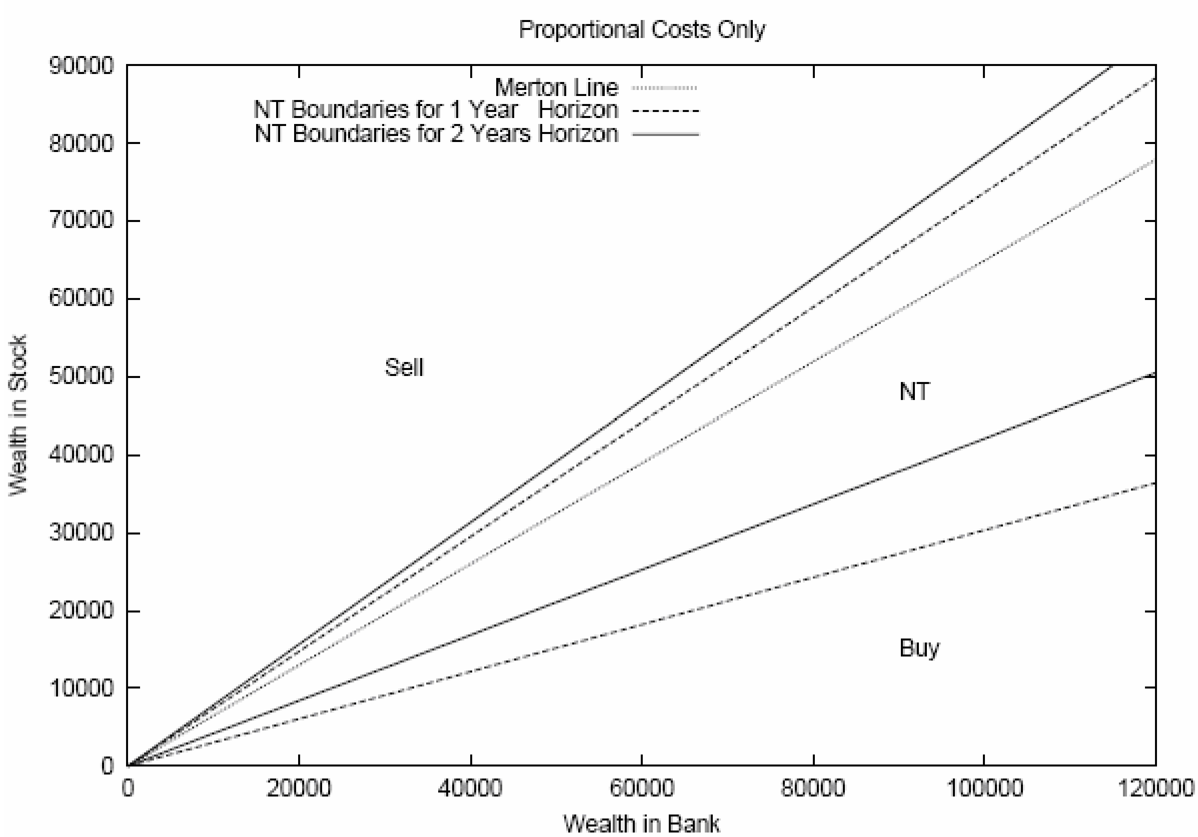

Рисунок 1 – Оптимальная транзакционная политика для 2-х разных горизонтов планирования

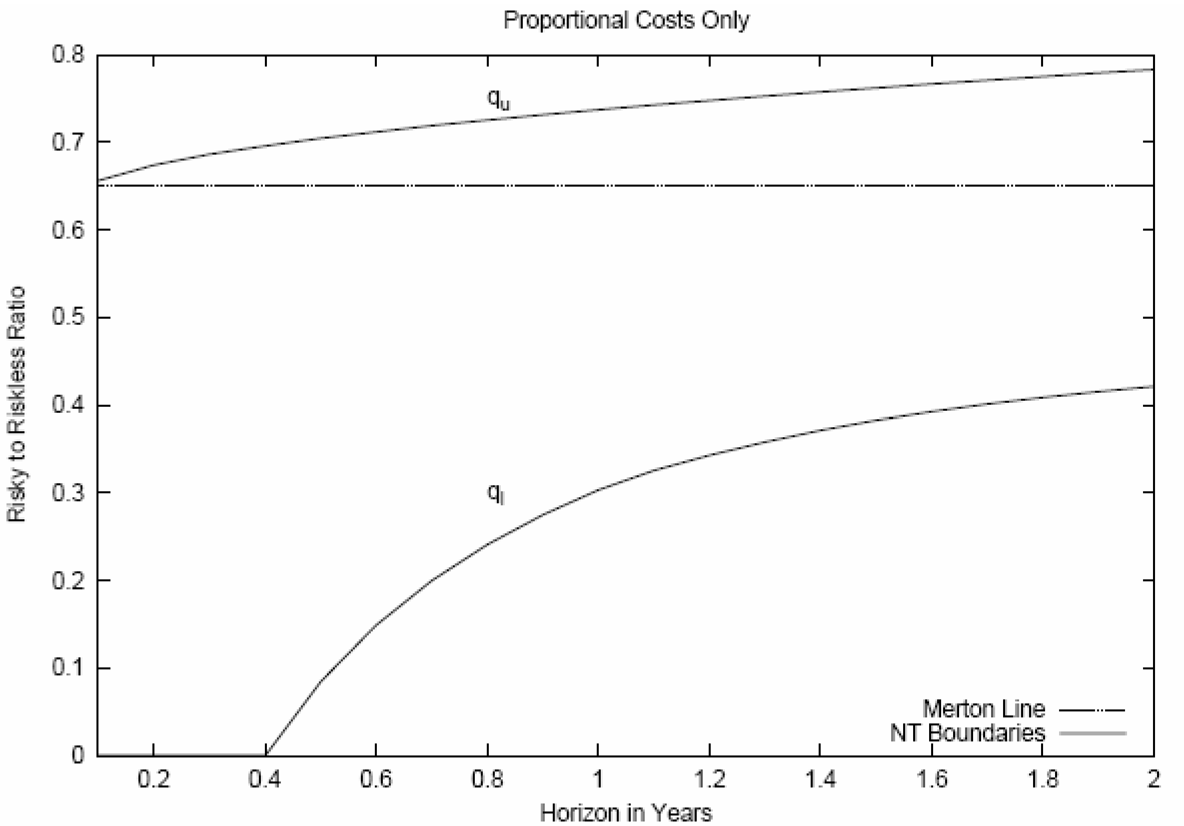

Рисунок 1 – Границы области ОС как функции горизонта планирования инвестора

Первое и третье уравнения описывают нижнюю и верхнюю границы области отсутствия сделок. Второе уравнение описывает целевую границу.

Легко доказать, что в случае инвестора с CRRA значение функции имеет гомотетичные совйства по отношению к *(x, y,k)* (см. Шредера (1995), Предложение 1). Это очень удобное свойство, которое позволяет рассчитать оптимальную политику для одного k с фиксированным вознаграждением, а затем получать оптимальную политику для другого k' простым масштабированием.

Чтобы проиллюстрировать оптимальную политику предоставлены численные расчеты со следующими данными: $\mu = 10\%,\ r = 5\%,\ \sigma = 25\%,$ (все в годовом выражении), $RRA = 2$ и $k = 1$. График на Рис.3 показывает оптимальную стратегию для инвестора с горизонтом планирования равным 2. На Рис.4 показаны границы целевой области и области ОС при *W=400000*. Рис.5 изображает границы целевой и ОС областей при горизонте планирования инвестора равном 2 года.

Наши численные результаты согласуются с выводами Шредера (1995). Некоторые важные свойства оптимальнй политики заключаются в следующем. Линия Мертона находится в пределах области ОС. Даже при небольшой фиксированной плате, границы области ОС оказываются весьма широкими. Когда горизонт планирования растет, оптимальная политика быстро сводится к стационарной политике (см. рис.4). Целевая граница быстро сходится к линии Мертона, когда богатство инвестора растет (рис.5).

7 Пропорциональные и фиксированные транзакционные издержки

Здесь мы рассмотрим случай с наличием пропорциональных и фиксированных транзакционных издержек ($\lambda > 0$, и $k > 0$). Прежде чем перейти к численным результатам, рассмотрим свойство функции стоимости, которое можно легко установить непосредственно из определения.

Предложение 1. Для функции полезности с постоянным относительным неприятием риска (CRRA), значение функции стоимости имеет свойство однородности: для $\theta > 0$

$$\begin{aligned} V(t,\theta x,\theta y,\theta k) &= \theta^{\gamma} V(t,x,y,k) \quad && \text{если} \quad U(W) = \frac{W^{\gamma}}{\gamma} \\ V(t,\theta x,\theta y,\theta k) &= ln(\theta) + V(t,x,y,k) \quad && \text{если} \quad U(W) = ln(W). \end{aligned} \tag{23, 24}$$

Доказательство. Доказательство следует вдоль линий доказательства теоремы 3.1 в Дэвисе и Норман (1990). Обозначим через *A(x,y,k)* класс допустимых политик управления начиная с $(x_t, y_t) \in S$. Тогда легко проверить с помощью уравнений (3), что для любого $\theta > 0$

$$A(\theta x,\theta y,\theta k) = \{(\theta x,\theta y,\theta k) : (x,y,k) \in A(x,y)\}$$

то есть портфельный процесс $(\theta x,\theta y)$ и транзакционные издержки θk являются допустимыми, тогда и только тогда, когда портфельный процесс *(x,y)* и транзакционные издержки к допустимы. Таким образом

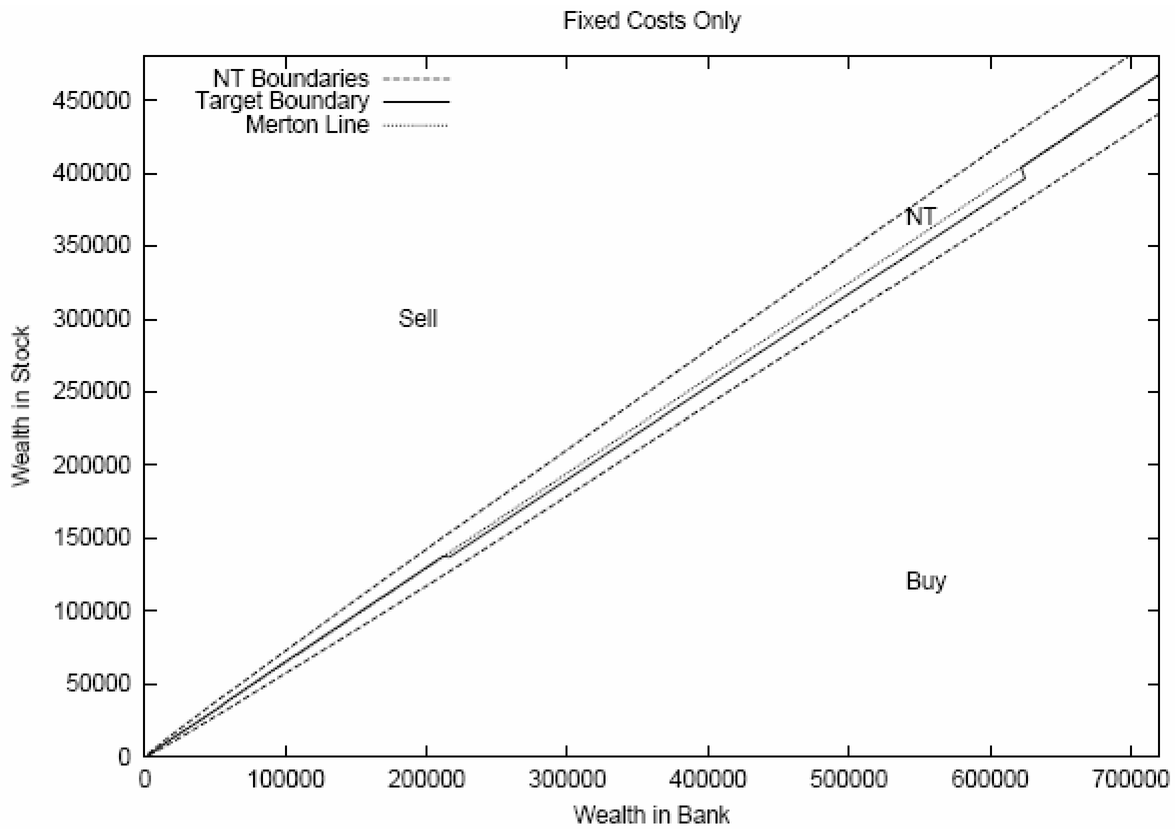

Рисунок 3 – Оптимальная транзакционная политика для горизонта планирования 2 года

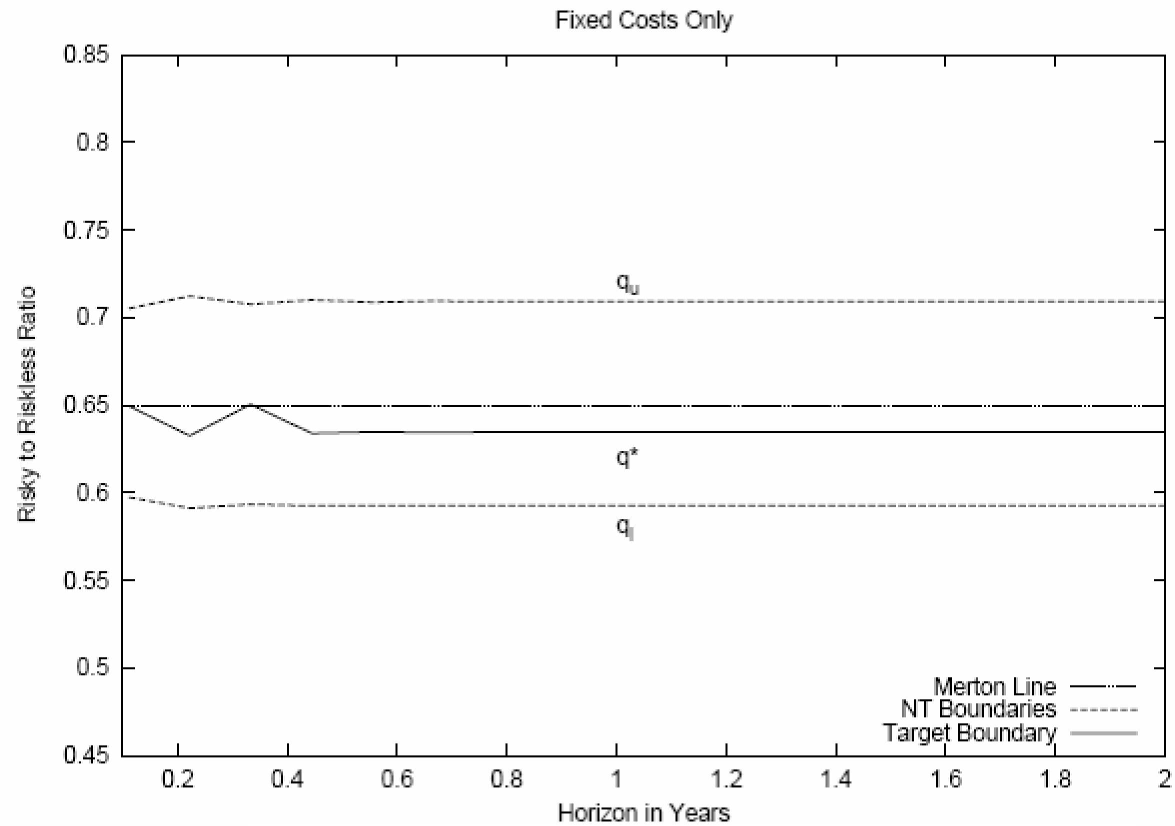

Рисунок 4 – Границы целевой области и области ОС при *W=400000*

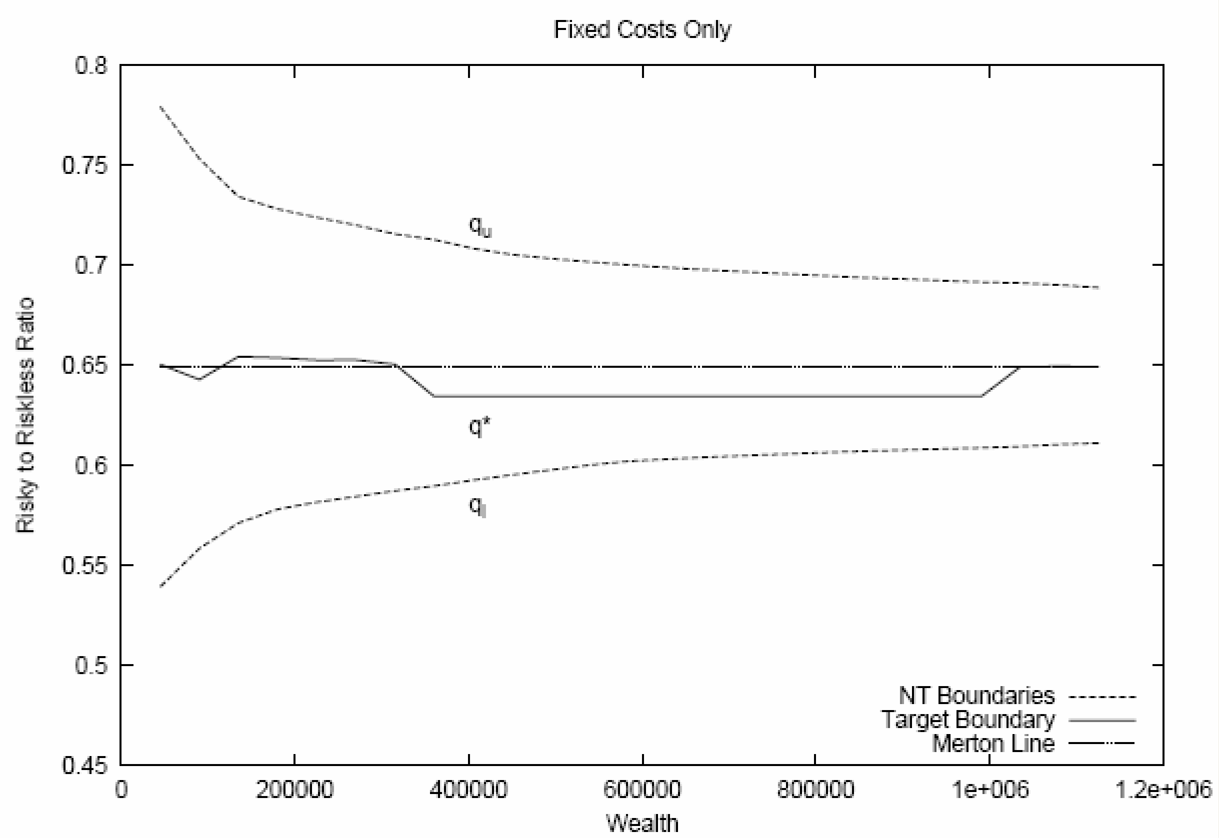

Рисунок 5 – Границы целевой и ОС областей при горизонте планирования инвестора равном 2 года

$$V(t,\theta x,\theta y,\theta k)=\sup_{A(\theta x,\theta y,\theta k)} E_t^{\theta x,\theta y}\left[U(x_T,y_T,k\right]=\sup_{A(x,y,k)} E_t^{x,y}\left[U(\theta x_T,\theta y_T,\theta k\right]$$

Когда $U(W)=\dfrac{W^\gamma}{\gamma}$ имеем $U(\theta x_T,\theta y_T,\theta k)=\theta^\gamma U(x_T,y_T,k)$, так что $V(t,\theta x_T,\theta y_T,\theta k)=\theta^\gamma V(t,x,y,k)$, в то время как, когда $U(W)=ln(W)$, $U(\theta x_T,\theta y_T,\theta k)=ln(\theta)+U(x_T,y_T,k)$ и $V(t,\theta x_T,\theta y_T,\theta k)=ln(\theta)+V(t,x,y,k)$.

При наличии пропорциональных и фиксированных транзакционных издержек, портфельное пространство также может быть разделено на три непересекающиеся области (Покупка, Продажа, ОС), а четыре (вместо трех в предыдущем разделе) границы описывают оптимальную политику. Как и прежде, области Покупка и Продажа разделены нижней границей области ОС, а области Продажа и ОС – верхней границей. Если портфель лежит в области Покупка, оптимальной стратегией является покупка рисковых активов до тех пор, пока портфель не достигнет нижней целевой границы (Покупка). Аналогичным образом, если портфель лежит в области Продажа, оптимальная стратегия заключается в продаже рисковых активов, пока портфель не достигнет верхней целевой границы (Продажа).

Все эти границы являются функциями горизонта планирования инвестора и зависят от состава богатства инвестора, так что возможно следующее описание оптимальной политики:

$$
\begin{aligned}
y &= q_l(x,t)x \\
y &= q_l^*(x,t)x \\
y &= q_u^*(x,t)x \\
y &= q_u(x,t)x
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Первое и четвертое уравнения описывают нижнюю и верхнюю границы области ОС. Второе и третье уравнения описывают нижнюю и верхнюю целевую границу соответственно. Рис.6 иллюстрирует оптимальную стратегию для $\mu = 10\%$, $r = 5\%$, $\sigma = 25\%$, (все в годовом выражении), $RRA = 2$ и $k = 1$ и с горизонтом планирования 2 года. На рис.7 изображены границы целевой и ОС областей в зависимости от горизонта планирования инвестора при $W = 200000$. Рис.8 отображает границы целевой и ОС областей в зависимости от богатства инвестора с горизонтом планирования 2 года.

Некоторые важные свойства оптимального политики заключаются в следующем: границы области ОС оказываются шире, чем в модели только с пропорциональными транзакционными издержками. По мере приближения конечного момента времени, область ОС расширяется. Также область ОС расширяется, когда богатство инвестора снижается. Поведение целевой границы довольно сложно. Как можно заметить, когда богатство инвестора растет, они быстро сходятся к границам области ОС в соответствующей модели с пропорциональными транзакционными издержками. Следует отметить, что скорость сходимости зависит от параметров дискретизации n – количества торговых периодов в интервале времени $[0,T]$. С ростом n скорость сходимости снижается. Когда богатство становится малым, целевые границы ближе подвигаются к линии Мертона. Чем ближе дата терминала, тем раньше начинается это продвижение.

Тщательный сравнительный анализ статики поведение целевой и ОС границ выходят за рамки данной статьи. Действительно, каждая граница является функцией многих параметров и может быть записана в следующем виде

$$y = q(t,x,\mu,r,\sigma,\gamma,\lambda,k)x$$

Осуществление сравнительной статики для каждого отдельного параметра займет огромное количество места. Кроме того, наличие четырех границ делает эту задачу довольно громоздкой. Поэтому мы только объедим сравнительный анализ статики для некоторых важных параметров, таких как волатильность σ, тенденции μ и коэффициент относительного неприятия риска коэффициент RRA. Затем мы рассмотрим влияние на оптимальную политику уровня пропорциональных издержек λ. как следствие свойства однородности функции стоимости в (x,y,k), мы можем вычислить оптимальную стратегию для одного фиксированного k, а затем получить оптимальную политику по другому k' путем масштабирования оси (x,y).

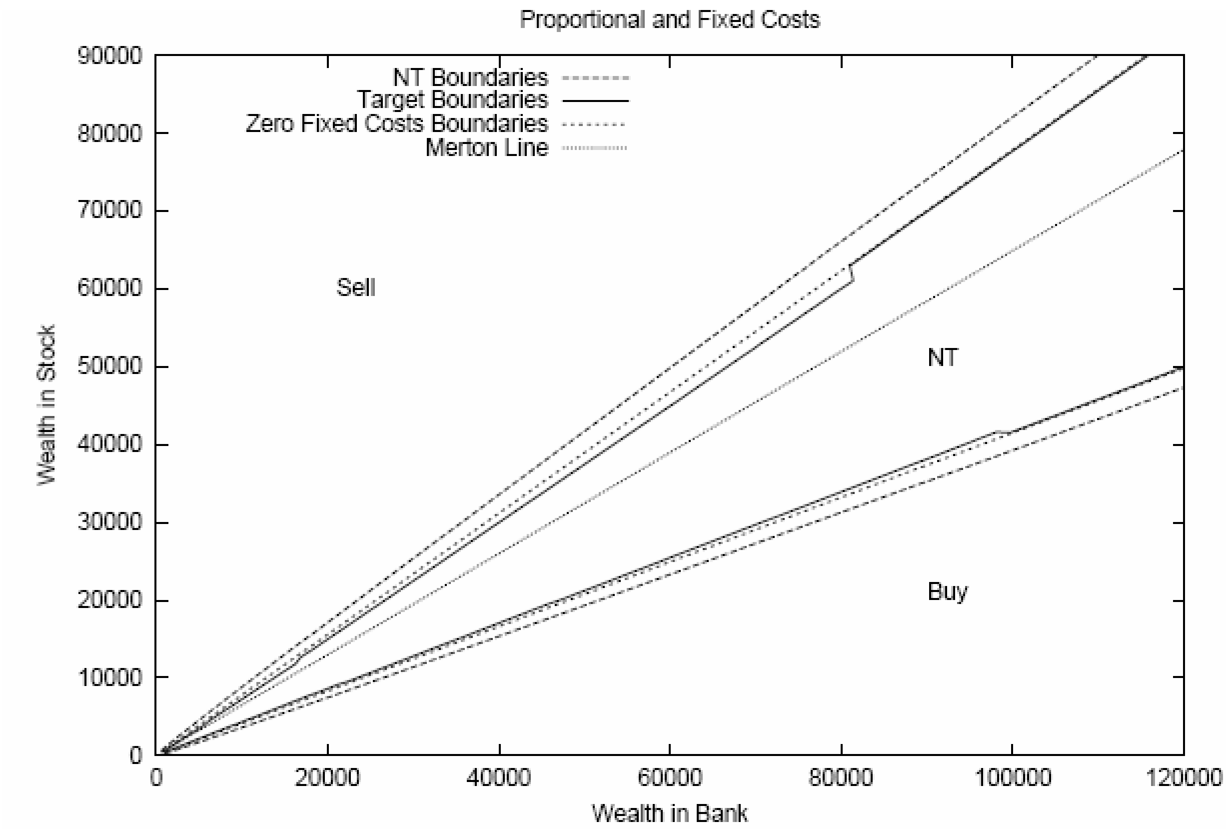

Рисунок 6 – Оптимальная транзакционная политика при горизонте планирования равном 4 года

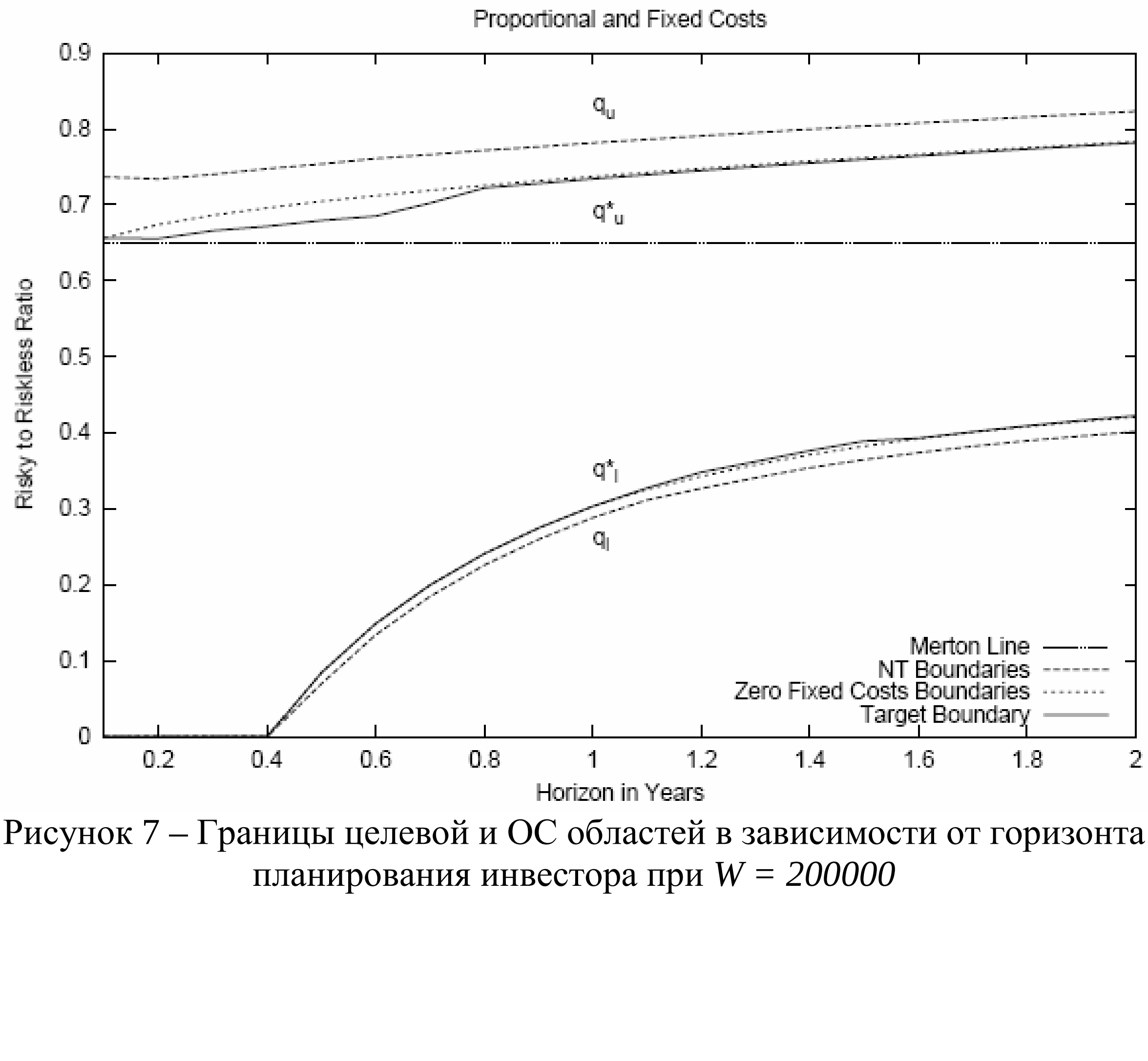

Рисунок 7 – Границы целевой и ОС областей в зависимости от горизонта планирования инвестора при *W = 200000*

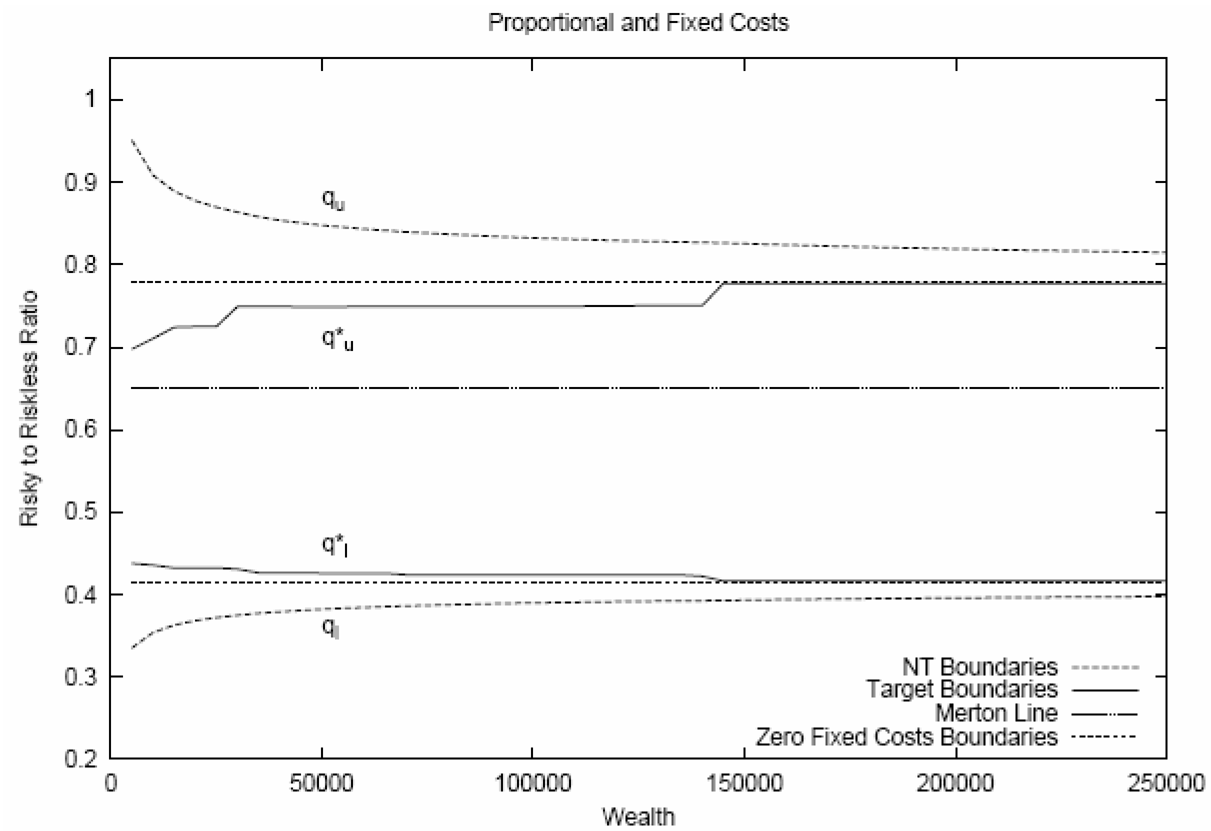

Рисунок 8 – Границы целевой и ОС областей в зависимости от богатства инвестора с горизонтом планирования 2 года

Кроме того, необходимо выбрать несколько тестов, чтобы сделать сравнение. Для этой цели мы используем отклонение границы от линии Мертон и отклонение границы от соответствующей границы области ОС в модели с пропорциональными затратами по сделке.

Наш комбинированный сравнительный статистический анализа основан на следующей идее. В отсутствие транзакционных издержек доля от общего богатства, которая вложена в рисковый актив определяется уравнением (20). Можно отметить, что либо удвоение волатильности σ^2, относительного коэффициента неприятия риска RRA, или уменьшение вдвое премии за риск $\mu - r$ имеет аналогичный эффект на оптимальную политику. То есть, инвестор делит пополам часть своего богатства и вкладывает его в рисковые активы. Но что происходит с оптимальной политикой при наличии фиксированных и пропорциональных транзакционных издержек?

На рис. 9–12 приведены некоторые результаты сравнения целевых границ и границ области ОС для различных значений волатильности, тенденций и относительного коэффициента неприятия риска. Стандартные параметры таковы: $\mu = 10\%$, $RRA = 1.5$, $\sigma = 23\%$. Остальные параметры имеют следующие значения $r = 5\%$, $k = 1$, $\lambda = 0.01$. На рис.9 и рис. 11 изображены границы целевой области и области ОС, как функции от богатства инвестора с горизонтом планирования 3 года. На рис. 10 и рис. 12 Фигурки (10) и (12) изображены целевая и ОС области, как функции горизонта планирования инвестора при $W=60000$.

Анализ показывает, что как удвоение волатильности, RRA, так и уменьшение вдвое премии за риск имеет аналогичные последствия. Область ОС сужается одинаково во времени и богатстве, что вызывает более частые транзакции. В то же время область ОС смещается вниз плоскости *(x,y)*, что подталкивает инвестировать не в рисковые активы, а в безрисковые. Границы целевой области приближаются как к линии Мертона, так и к границе нулевых фиксированных затрат области ОС.

В частности, удвоение волатильности или RRA почти одинаково влияет на изменение границы области ОС. По сравнению с этим, сокращение вдвое премии за риск производит к расширению области ОС. Влияние на скорость сходимости целевых границ к границе нулевых постоянных затрат области ОС имеет определенные особенности. Самая высокая скорость сходимости получается путем удвоения волатильности. Удвоение относительного неприятия риска также увеличивает скорость сходимости. Однако уменьшение вдвое премии за риск уменьшает скорость сходимости, в отличие от модели со стандартными параметрами.

Перейдем теперь к анализу влияния пропорциональных транзакционных издержки на оптимальную торговую политику. Здесь мы ограничимся представлением влияния транзакционных издержек только на границах области ОС, так как воздействие на цельвые границы трудно интерпретировать. На рис.13, 15 представлено изменение границ области ОС в зависимости от богатства инвестора с горизонтом планирования 4 года. На рис.14, 16 изображены границы ОС области в зависимости от горизонта планирования инвестора при $W = 50000$.

Когда уровень пропорциональных транзакционных затрат снижается, отклонение границ области ОС от границы нулевых постоянных затрат области ОС увеличивается (рис.15, 16). В то же время область ОС в соответствующей модели с нулевыми фиксированными транзакционными издержками сужается. В результате чистый эффект виден из рис.13 и рис.14. Область ОС сужается, когда пропорциональные транзакционные затраты уменьшаются.

8 Выводы и расширения

В этой работе изучается задача оптимального выбора портфеля для инвестора с постоянным относительным неприятием риска, который сталкивается с фиксированными и пропорциональными транзакционными издержками и старается максимизировать ожидаемую полезность конца периода богатства. Была использована модель непрерывного времени и применен метод цепи Маркова для численного решения оптимальной торговой политики. Численное решение показало, что портфельное пространство разделено на три непересекающиеся области (Покупка, Продажа, область Отсутствия сделок (ОС)), а четыре границы описывают оптимальную политику. Если портфель находится в области Покупка, оптимальной стратегией является покупка рисковых активов, пока портфель не достигнет нижней (Покупка) целевой границы. Аналогичным образом, если портфель находится в области Продажа, то оптимальная стратегия заключается в продаже рисковых активов, пока портфель не достигнет верхней (Продажа) целевой границы. Все эти границы являются функциями горизонта планирования инвестора и зависят от состава богатства инвестора. Некоторые важные свойства оптимального политики заключаются в следующем: чем ближе конечная дата, тем шире становится область ОС. Также область ОС расширяется, когда богатство инвестора снижается. Когда богатство инвестора растет целевые границы быстро сходятся к границам области ОС в соответствующей модели с пропорциональными транзакционными издержками. Когда богатство становится малым, целевые границы передвигаются ближе к линии Мертона. Чем ближе дата окончания срока планирования, тем раньше начинается это движение. Влияние на оптимальную политику волатильности, тенденций, CRRA и уровня транзакционных издержек также были рассмотрены.

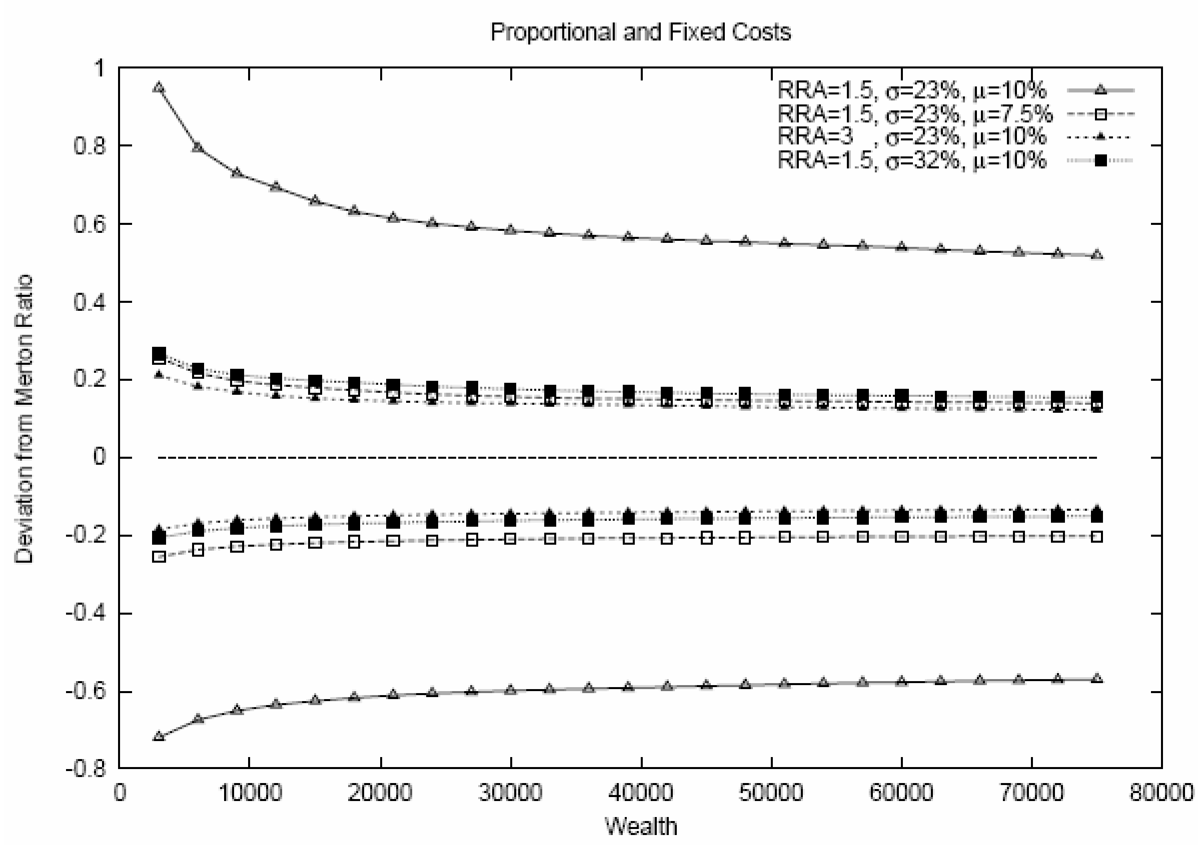

Рисунок 9 – Границы области ОС как функции богатства инвестора

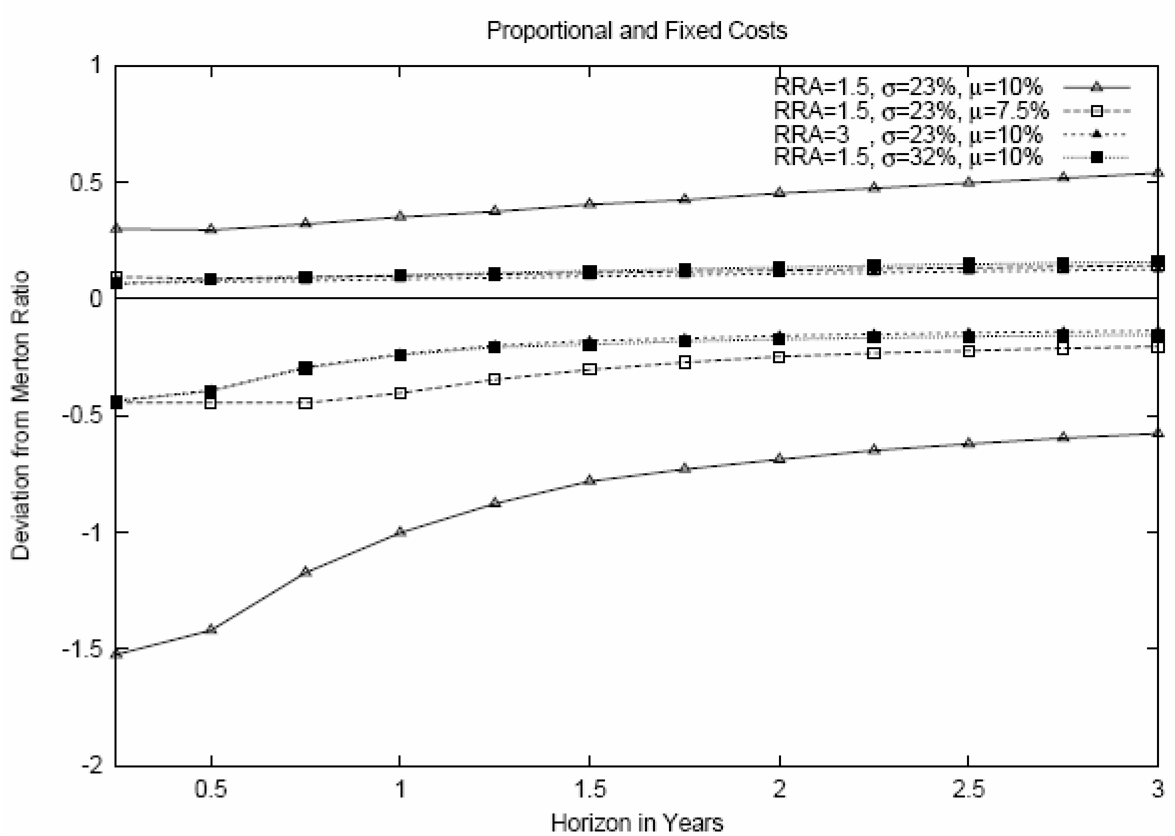

Рисунок 10 – Границы области ОС как функции горизонта планирования инвестора

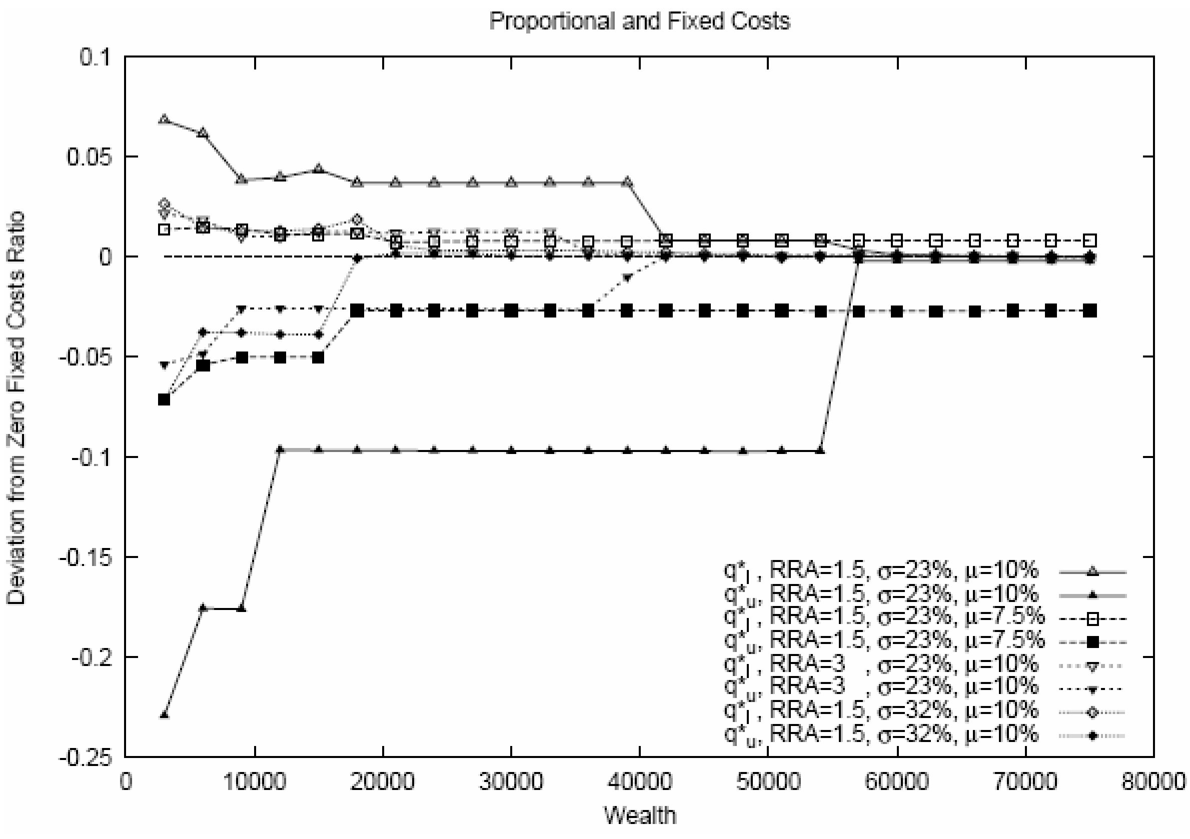

Рисунок 11 – Границы целевой области как функции богатства инвестора

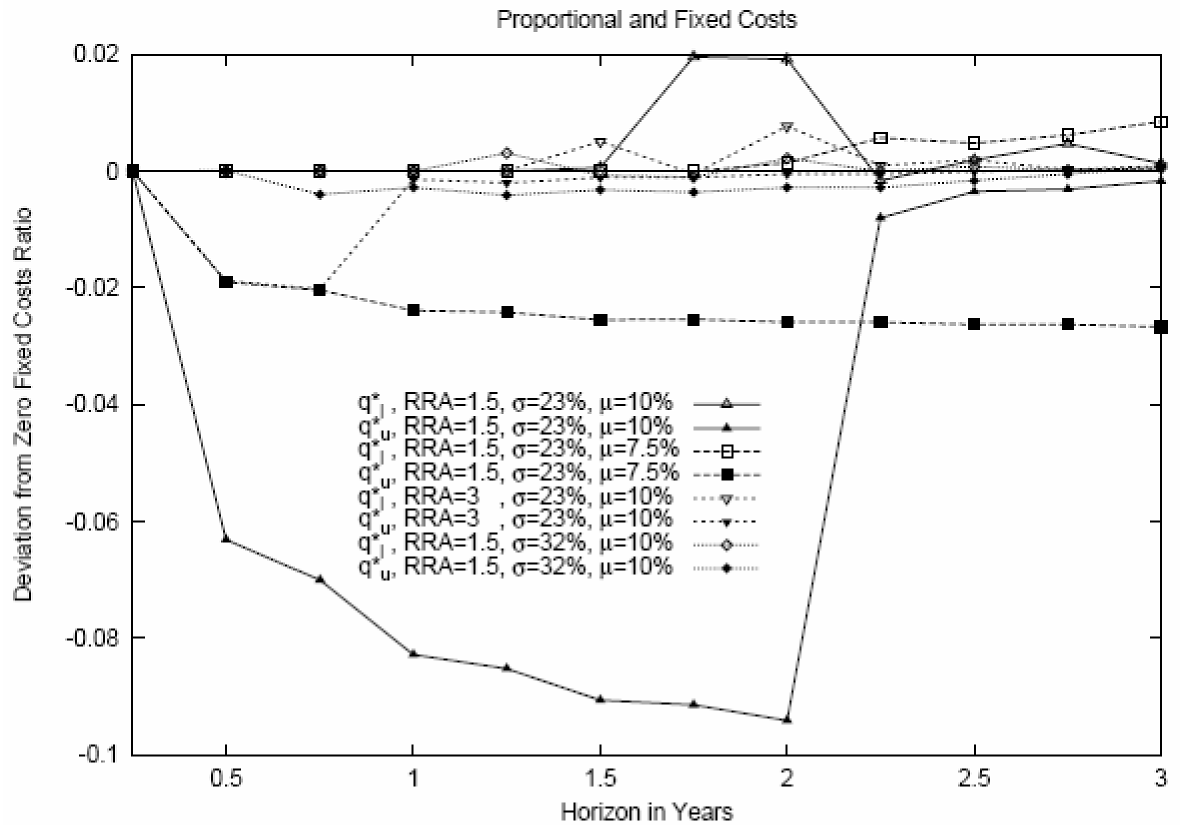

Рисунок 12 – Границы целевой области как функции горизонта планирования инвестора

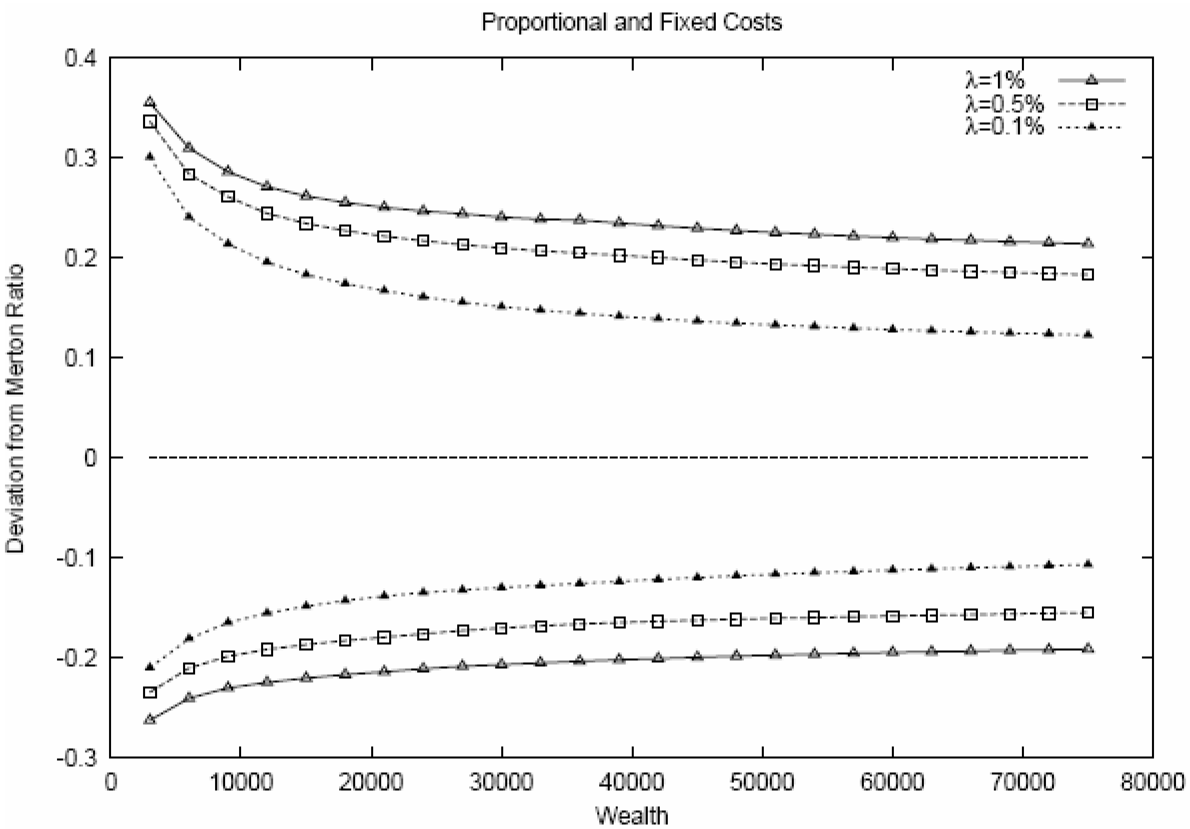

Рисунок 13 – Границы области ОС как функции богатства инвестора

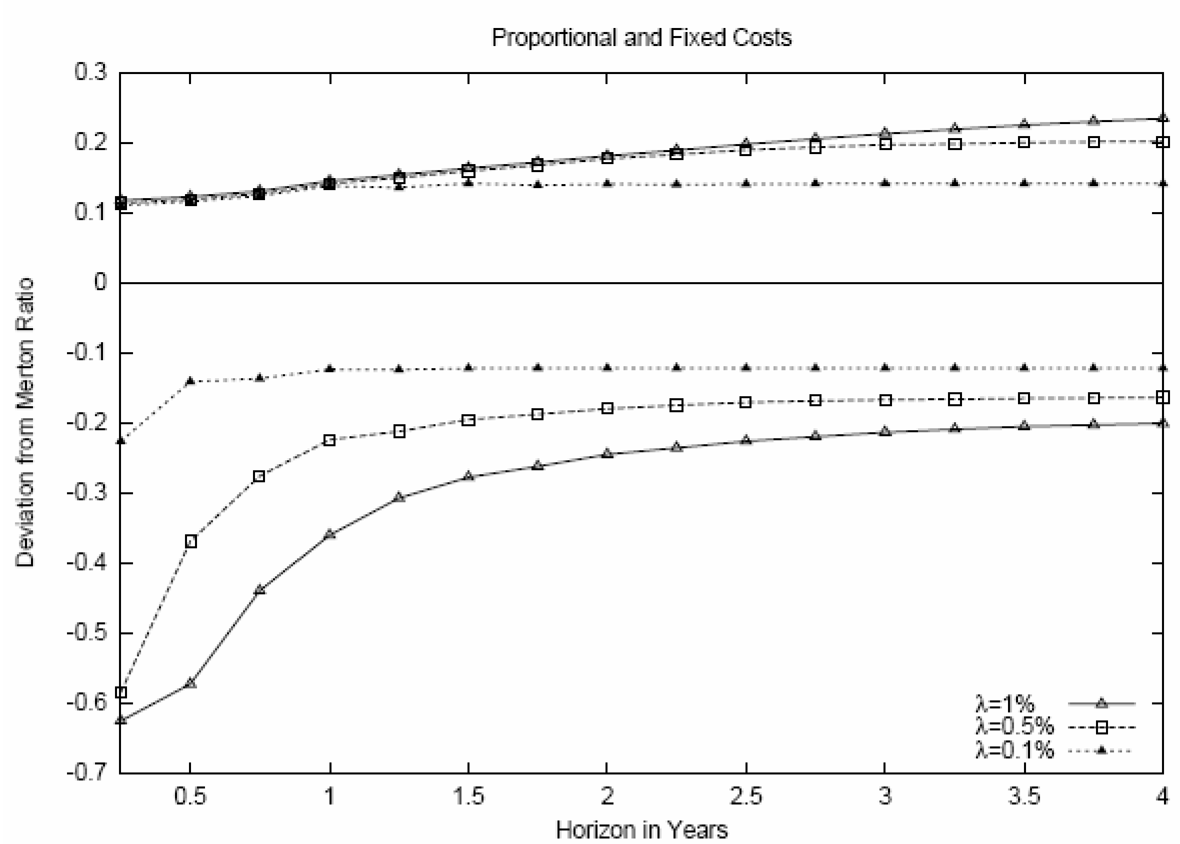

Рисунок 14 – Границы области ОС как функции горизонта планирования инвестора

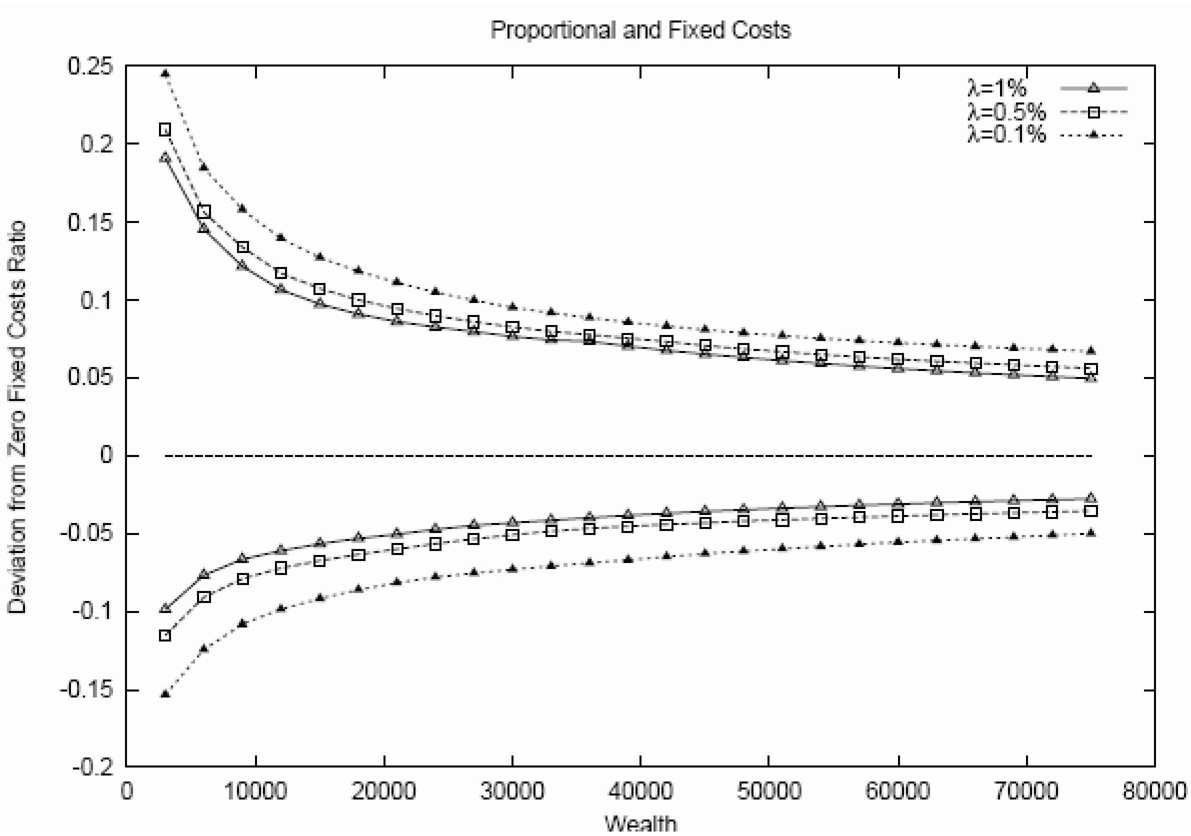

Рисунок 15 – Границы области ОС как функции богатства инвестора

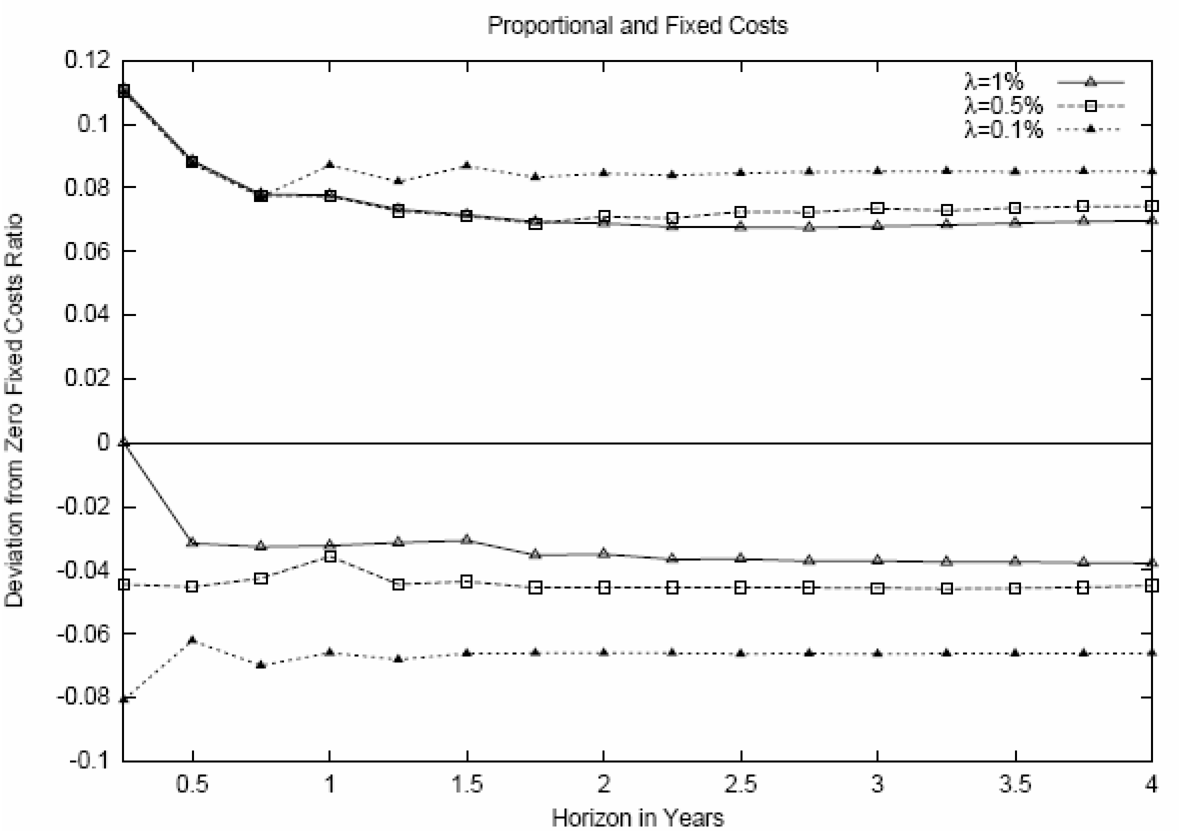

Рисунок 16 – Границы области ОС как функции горизонта планирования инвестора

На протяжении всей статьи мы предполагаем, что параметры модели всегда выбираются таким образом, чтобы исключить случаи с заимствованием безрискового актива и короткие продажи акций. Эти два случая могут быть также исследованы. Подходы, рассмотренные в данной статье, могут быть обобщены включением промежуточного потребления, более общих функций полезности, более общей структуры транзакционных издержек. Другим интересным усовершенствованием было бы рассмотрение случая с двумя и более рисковыми активами.

Тем не менее, метод расчета, который был применен, исследовался нами долгое временя. Для приемлемого количества вычислительного времени эти расчеты могут быть сделаны только либо для задачи достаточно низкой размерности n – количество периодов, либо для сетки «крупного» размера для Δx и Δy. Поэтому до сих пор практическая реализация численного метода может быть осуществлена только в течение достаточно короткого инвестиционного горизонта.

Таким образом, подход максимизации полезности и численный метод, используемый в данной работе могут быть успешно применены на рыночных ценовых опционах с фиксированными и пропорциональными транзакционными издержками.

Ссылки

Akian, M., Menaldi, J. L., and Sulem, A. (1996). "On an Investment-Consumption Model with Transaction Costs", *SIAM Journal of Control and Optimization, 34*(1), 329-364.

Bensoussan, A. and Lions, J.-L. (1984). *Impulse Control and Quasi-Variational Inequalities.* Gauthier-Villars, Paris.

Boyle, P. P. and Lin, X. (1997). "Optimal Portfolio Selection with Transaction Costs", *North American Actuarial Journal, 1* (2), 27-39.

Chancelier, J.-P., 0ksendal, B., and Sulem, A. (2000). "Combined Stochastic Control and Optimal Stopping, and Application to Numerical Approximation of Combined Stochastic and Impulse Control", Preprint, Department of Mathematics, University of Oslo.

Collings, P. and Haussmann, U. G. (1998). "Optimal Portfolio Selection with Transaction Costs", In:Proceedings of the Conference on Control of Distributed and Stochastic System. Kluwer.

Cox, J. M., Ross, S. A., and Rubinstein, M. (1979). "Option Pricing: A Simplified Approach", *Journal of Financial Economics, 7,* 229-263.

Davis, M. H. A. and Norman, A. R. (1990). "Portfolio Selection with Transaction Costs", *Mathematics of Operations Research, 15*(4), 676-713.

Davis, M. H. A., Panas, V. G., and Zariphopoulou, T. (1993). "European Option Pricing with Transaction Costs", *SIAM Journal of Control and Optimization, 31* (2), 470-493.

Dumas, B. and Luciano, E. (1991). "An Exact Solution to a Dynamic Portfolio Choice Problem under Transaction Costs", *Journal of Finance, XLVI*(2), 577-595.

Eastham, J. and Hastings, K. (1988). "Optimal Impulse Control of Portfolios", *Mathematics of Operations Research, 13,* 588-605.

Fitzpatrick, B. G. and Flemming, W. H. (1991). "Numerical Methods for an Optimal Investment-Consumption Model", *Mathematics of Operations Research, 16,* 823-841.

Flemming, W. and Soner, H. M. (1993). *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions.* Springer-Verlag, New York.

Genotte, G. and Jung, A. (1994). "Investment Strategies under Transaction Costs: The Finite Horizon Case", *Management Science, 38*(11), 385404.

Hastings, K. (1992). "Impulse Control of Portfolios with Jumps and Transaction Costs", *Communications in Statistics - Stochastic Models, 8,* 222-239.

He, H. (1990). "Convergence from Discrete to Continuous Time Contingent Claim Prices", *Review of Financial Studies, 3,* 523-546.

Hodges, S. D. and Neuberger, A. (1989). "Optimal Replication of Contingent Claims under Transaction Costs", *Review of Futures Markets, 8,* 222-239.

Korn, R. (1998). "Portfolio Optimization with Strictly Positive Transaction Costs and Impulse Controls", *Finance and Stochastics, 2,* 85-114.

Kushner, H. J. and Dupuis, P. G. (1992). *Numerical Methods for Stochastic Control Problems in Continuous Time.* Springer-Verlag, New York.

Kushner, H. J. (1977). *Probability Methods for Approximations in Stochastic Control and for Elliptic Equations.* Academic Press, New York.

Kushner, H. J. (1990). "Numerical Methods for Stochastic Control Problems in Continuos Time", *SIAM Journal of Control and Optimization, 28,* 999-1048.

Merton, R. C. (1969). "Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous-Time Case", *Review of Economics and Statistics, 51,* 247257.

Merton, R. C. (1971). "Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model", *Journal of Economic Theory, 3,* 373-413.

Merton, R. C. (1973). "An Intertemporal Capital Asset Pricing Model", *Econometrica, 41* (5), 867-887.

0ksendal, B. and Sulem, A. (1999). "Optimal Consumption and Portfolio with both Fixed and Proportional Transaction Costs", Preprint, Department of Mathematics, University of Oslo.

Schroder, M. (1995). "Optimal Portfolio Selection with Fixed Transaction Costs: Numerical Solutions", Working Paper, Michigan State University.

Shreve, S. and Soner, H. M. (1994). "Optimal Investment and Consumption with Transaction Costs", *The Annals of Applied Probability, 4,* 609692.