УДК 62-50

ОПТИМІЗАЦІЯ ПЕРЕХІДНИХ РЕЖИМІВ РУХУ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ ПРЯМИМ ВАРІАЦІЙНИМ МЕТОДОМ

Ловейкін В.С. д.т.н., проф., Ромасевич Ю.О. асп.

Національний унуверситет біоресурсів і природокористування України

Викладено методику розв'язку варіаційних задач за допомогою нового прямого варіаційного методу. Приведено розв'язок задачі оптимізації руху механічної системи при симетричних та несиметричних крайових умовах.

Постановка проблеми. Підвищення вимог, які ставляться до виконання різноманітних технологічних процесів, у тому числі і сільськогосподарських, зумовлене прагненням отримувати більшу кількість достатньо якісної продукції при мінімальних витратах (енергетичних, матеріальних тощо). Ці вимоги зумовлюють поєднання сфер науки і техніки: механіки, електроніки та обчислювальної техніки (таке поєднання отримало назву „мехатроніка" [1]). Саме мехатронні системи можуть достатньо якісно реалізовувати керування рухом механізмів і машин (у подальшому – механічних систем), причому таке керування повинно бути оптимальним за тим чи іншим критерієм або комплексом критеріїв. Оптимальне керування переводить систему з одного стану в інший, при зменшенні небажаних і збільшенні бажаних характеристик її руху, що покращує ефективність функціонування системи у цілому.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Для оптимізації режимів руху механічних систем використовуються різноманітні теорії оптимальних процесів: варіаційне числення [2], принцип максимуму Л.С. Понтрягіна [3], динамічне програмування Р. Белмана [4]. При оптимізації режимів руху за принципом максимуму критерієм руху системи виступає швидкодія, тобто тривалість руху. При цьому система, як правило, функціонує на межі області обмежень накладених на керування, або на її фазові координати, що спричиняє значну динамічну навантаженість механізмів. При оптимізації руху механічної системи за допомогою варіаційного числення у якості критеріїв руху використовуються інтегральні функціонали [5] з підінтегральними виразами, які характеризують, як правило, небажані характеристики руху, а тому такі критерії мінімізуються. Синтез оптимальних законів руху за допомогою варіаційних методів дає змогу отримувати неперервні кінематичні функції руху механічної системи, що „пом'якшує" рух системи.

Знаходження розв'язків варіаційних задач досить часто пов'язане з необхідністю інтегрування нелінійних диференціальних рівнянь [6], що є досить складною задачею. Тому набули поширення прямі варіаційні методи знаходження розв'язків варіаційних задач, які дозволяють „обходити" вказані недоліки отримання аналітичного розв'язку.

Постановка мети та задач дослідження. Метою приведеного дослідження є оптимізація перехідних режимів руху механічної системи (розгін) за допомогою прямого варіаційного методу. Для досягнення поставленої мети ставляться такі задачі: 1) викласти сутність нового прямого варіаційного методу та вказати його переваги; 2) розв'язати за допомогою нового методу задачу оптимізації розгону механічної системи (одинична маса) за критерієм динамічної складової потужності; 3) проаналізувати отримані результати за різними показниками.

Виклад основного матеріалу. Який би метод оптимізації не використовувався, необхідно забезпечити мінімум (максимум) обраного критерію:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} P_k(t,\ x(t),\ \dot{x}(t),...,x^{(k)}(t))dt, \qquad k = 1,...s, \tag{1}$$

де $x(t),\ \dot{x}(t),...,x^{(k)}(t)$ – узагальнані координати механічної системи та їх похідні включно до k-го порядку;

s – кількість узагальнених координат;

t – час;

t_0, t_1 – моменти часу початку та завершення руху системи відповідно початковий та кінцевий;

P_k – підінтегральний вираз відповідного критерію k-го порядку.

Основна ідея прямих методів полягає у тому, що варіаційна задача розглядається як гранична, для деякої задачі на екстремум функції кінцевого числа змінних. Ця задача на екстремум функції кінцевого числа змінних розв'язується звичайними методами, а потім граничним переходом отримується розв'язок відповідної варіаційної задачі.

Викладемо сутність нового прямого методу розв'язування варіаційних задач. Нехай потрібно знайти екстремум функціоналу за формулою (1) у підінтегральний вираз якого входить похідна k-го порядку. При цьому рівняння Ейлера-Пуассона (2) є рівнянням $2k$-го порядку. Тому для його розв'язування необхідно задати $2k$ крайових умов (наприклад k умов на початку руху та k в кінці руху). Новий спосіб синтезу оптимальної траєкторії руху системи полягає у тому, щоб розв'язати диференціальне рівняння ($2k$+m+r)-го порядку. Тут m – кількість додаткових крайових умов, які необхідно поставити для покращення умов руху системи (на початку і/або у кінці руху системи), тобто для усунення „жорстких" ударів [6]. У частинному випадку може бути m=0. Величина r – кількість додаткових умов, які ставляться в інтервалі [t_0, t_1], позначимо їх через q_1, q_2,…, q_r. Таким чином, розв'язок диференціального рівняння містить r параметрів. Тепер можемо знайти вираз інтегралу (1), у який також будуть входити r параметрів, тобто функціонал (1) перетворюється у функцію параметрів q_1, q_2,…, q_r. Надалі знаходимо часткові похідні функціоналу $I = \varphi(q_1,\ q_2,...,q_r)$ за параметрами q_1, q_2,…, q_r і розв'язуємо систему рівнянь:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1,\ 2,...,r). \tag{2}$$

Підставляючи визначені значення q_1, q_2,…, q_r у формулу розв'язку диференціального рівняння і спрощуючи її, отримаємо наближений розв'язок варіаційної задачі. Переходом при $r \to \infty$ отримуємо точний розв'язок варіаційної задачі.

Необхідно зазначити, що постановку додаткових r умов можна робити декількома способами:

1) задати значення функції у різні моменти часу, наприклад

$$x(\frac{i(t_1 - t_0)}{r+1}) = q_i, \ i = 1, 2, ..., r;$$

2) задати значення функції та її вищих похідних у один конкретний момент часу, наприклад посередині інтервалу $[t_0, t_1]$ $x^{(i)}(\frac{t_1 - t_0}{2}) = q_i, \ i = 0, 1, ..., r-1$;

3) задати значення функції та її вищих похідних у різні моменти часу (поєднання двох попередніх способів).

Всі способи задання додаткових умов приводять до одних і тих же результатів.

Проілюструємо дану методику розв’язком задачі, яка, на нашу думку, доволі наглядно ілюструє переваги нового методу.

Задача полягає у тому, щоб мінімізувати функціонал, у підінтегральний вираз якого входить квадрат функції динамічної складової потужності, яка потрібна для розгону механічної системи:

$$I = \int_0^{t_1} P_{äèí}^2 \, dt = \int_0^{t_1} (m_{ï} \dot{x}\ddot{x})^2 \, dt \to \min. \tag{3}$$

де $m_{ï}$ - приведена до поступального руху маса механічної системи (механізму, ланки механізму, робочого органу тощо); t_1 - тривалість перехідного режиму руху системи (тривалість розгону). Оскільки кінематичні функції, які входять у вираз (3) можуть набувати як додатних так і від’ємних значень, то підінтегральний вираз представлений квадратом динамічної складової потужності приводного механізму. Необхідно мінімізувати критерій (3), оскільки це дасть змогу проектувати приводи механізмів меншої потужності.

Розв’яжемо цю варіаційну задачу за допомогою нового прямого методу. Для цього розв’яжемо диференціальне рівняння шостого порядку.

$$\overset{VI}{x} = 0. \tag{4}$$

Пояснимо величину порядку рівняння. Рівняння Ейлера-Пуассона, яке відповідає функціоналу за виразом (3) має четвертий порядок. Крім того, поставимо одну додаткову умова на початку руху $\ddot{x}(0) = 0$ та одну додаткову умову за якою буде здійснюватись екстремізація функціоналу (3) посередині інтервалу $[0, t_1]$. Таким чином розв’язувати рівняння (4) будемо при таких крайових та додаткових умовах:

$$\begin{cases} x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad \ddot{x}(0) = 0; \\ x(\frac{t_1}{2}) = q_1; \\ \dot{x}(t_1) = v, \quad \ddot{x}(t_1) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Функція, яка є розв’язком рівняння (4) і задовольняє крайовим і додатковим умовам (5) має наступний вигляд:

$$x = \frac{t^3(32q_1(6t^2 - 15tt_1 + 10t_1^2) + t_1(-18t^2 + 37tt_1 - 14t_1^2)v)}{16t_1^5}. \qquad (6)$$

Запишемо вираз функціоналу (3) для цієї функції:

$$I_1 = \frac{m_r^2}{4100096t_1^5}(1179648000q_1^4 + 68812800q_1^3t_1v + 358400q_1^2t_1^2v^2 - \\ -10455424q_1t_1^3v^3 + 2373413t_1^4v^4). \qquad (7)$$

Продиференціюємо вираз (7) за параметром q_1 та прирівняємо отримане до нуля, в результатічого будемо мати:

$$\frac{m_r^2}{32032t_1^5}(36864000q_1^3 + 1612800q^2t_1v + 5600q_1t_1^2v^2 - 81683t_1^3v^3) = 0. \qquad (8)$$

Отримане рівняння являє собою кубічне алгебраїчне рівняння, яке будемо розв'язувати методом Кардано [7]. Не будемо детально зупинятись на його розв'язуванні, а запишемо лише його розв'язок:

$$q_1 = \frac{-21t_1v + 4\sqrt[3]{51597t_1^3v^3 - 42t_1^3v^3\sqrt{1509207}} + 4\sqrt[3]{51597t_1^3v^3 + 42t_1^3v^3\sqrt{1509207}}}{1440}. \qquad (9)$$

Підставивши знайдений розв'язок у залежність (6), отримаємо функцію, на якій функціонал набуває екстремуму. Побудуємо графіки отриманих функцій для переміщення, швидкості, прискорення та ривка механічної системи (рис. 1).

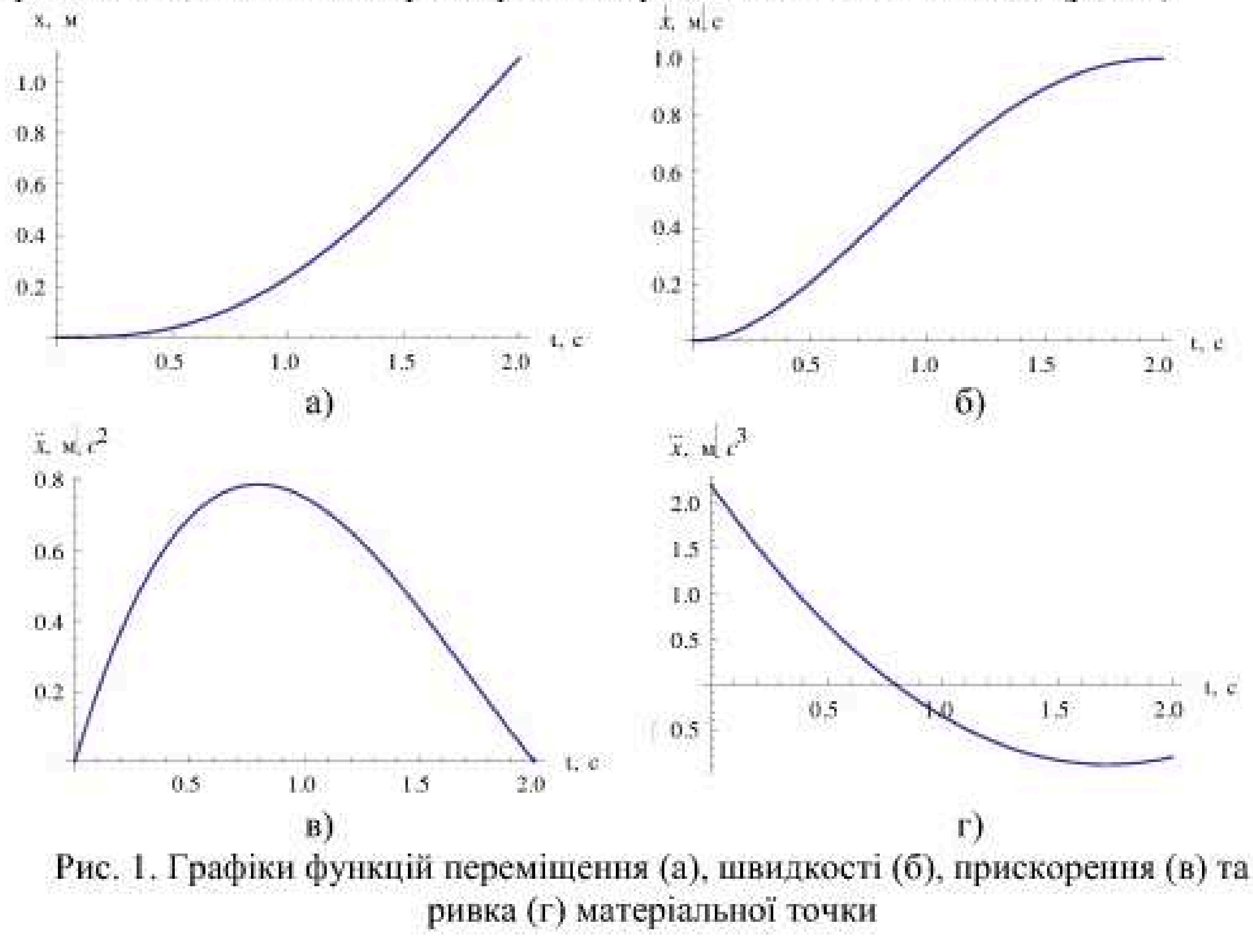

Рис. 1. Графіки функцій переміщення (а), швидкості (б), прискорення (в) та ривка (г) матеріальної точки

Рівняння Ейлера-Пуассона для функціоналу (3) є нелінійним диференціальним рівнянням четвертого порядку, розв'язок якого досить важко знайти в аналітичному вигляді. Використавши новий прямий метод, знайдено закон руху матеріальної точки, при якому значення функціоналу (3) набуває мінімуму. При цьому розв'язувалось кубічне рівняння. Тому даний метод можна рекомендувати для екстремізації функціоналів з нелінійними рівняннями Ейлера-Пуассона, які їм відповідають. Крім того, введенням додаткової умови (нульове початкове прискорення) досягається покращення динаміки руху механічної системи.

Можна розв'язати цю задачу дещо по іншому, а саме: поставити симетричні крайові умови. Тоді необхідно шукати розв'язок диференціального рівняння сьомого порядку:

$$\overset{VII}{x} = 0. \tag{10}$$

Ця задача буде відрізнятись від попередньої наявністю крайової умови $x(t_1) = \dfrac{vt_1}{2}$. Тому порядок диференціального рівняння збільшився на одиницю. Знайдемо розв'язок рівняння (10) для таких крайових та додаткових умовах:

$$\begin{cases} x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v, \quad \ddot{x}(0) = 0; \\ x(\dfrac{t_1}{2}) = q_1; \\ x(t_1) = \dfrac{vt_1}{2}, \quad \dot{x}(t_1) = v, \quad \ddot{x}(t_1) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Функція, яка є розв'язком рівняння (10) і задовольняє умовам (11) має такий вигляд:

$$x = \frac{t^3(-128q_1(t-t_1)^3 + (2t-t_1)t_1(6t^2 - 15tt_1 + 10t_1^2)v)}{2t_1^5}. \tag{12}$$

Запишемо вираз функціоналу за формулою (3):

$$\begin{gathered} I_2 = \frac{m_{\bar{\imath}}^2}{1616615t_1^5}(1207959552q_1^4 - 826540032q_1^3t_1v + 305033216q_1^2t_1^2v^2 - \\ - 43991360q_1t_1^3v^3 + 2639825t_1^4v^4). \end{gathered} \tag{13}$$

Продиференціюємо вираз (13) за параметром q_1 та прирівняємо отримане до нуля:

$$\frac{64m_{\bar{\imath}}^2}{1616615t_1^5}(75497472q_1^3 - 38744064q_1^2t_1v + 9532288q_1t_1^2v^2 - 687365t_1^3v^3) = 0. \tag{14}$$

Розв'язком кубічного рівняння (14) є вираз:

$$q_1 = \frac{1}{18432}((57(-136364391 + 32\sqrt{43020495216186}))^{\frac{1}{3}} t_1 v +$$
$$+ t_1 v (3153 - \frac{(57(-136364391 + 32\sqrt{43020495216186}))^{\frac{1}{3}}}{t_1 v})). \tag{15}$$

Підставивши знайдений розв'язок у вираз (12), отримаємо функцію, на якій функціонал набуває екстремуму. Побудуємо графіки отриманої функції та її вищих похідних за часом (рис. 2).

Аналіз графіків наведених на рис. 2 вказує на те, що постановка симетричних крайових умов для розв'язання варіаційної задачі є прийнятнішою, оскільки максимальне прискорення (а відповідно і приводне зусилля) є у другому випадку меншим.

Приведемо графіки функцій динамічної потужності, які отримані при постановці симетричних та несиметричних крайових умов (рис. 3).

Аналіз графічних залежностей (рис. 3) показує, що кращим є постановка несиметричних крайових умов, оскільки при цьому максимальна величина динамічної потужності є меншою. Однак різниця між максимальними значеннями динамічної потужності для обох випадків є незначною.

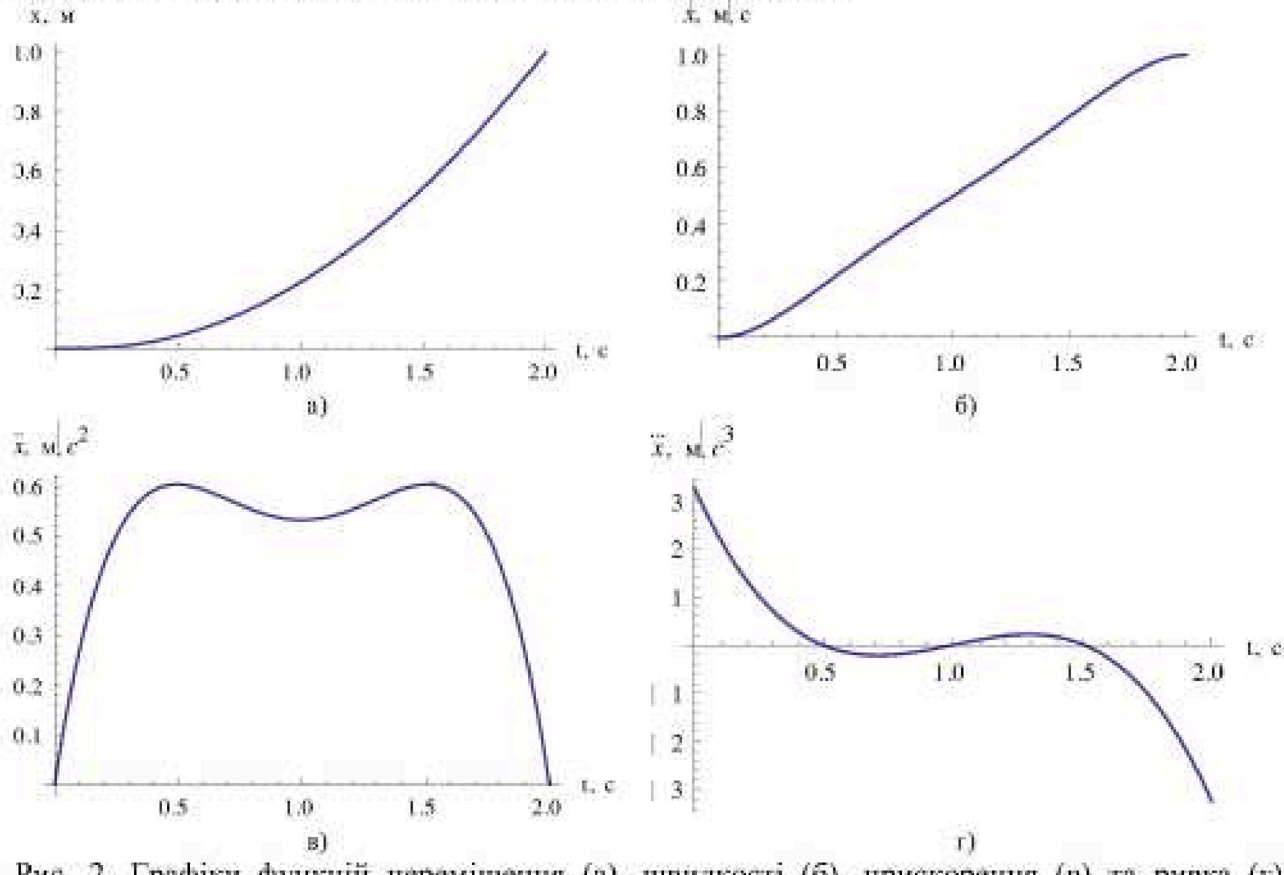

Рис. 2. Графіки функцій переміщення (а), швидкості (б), прискорення (в) та ривка (г) матеріальної точки

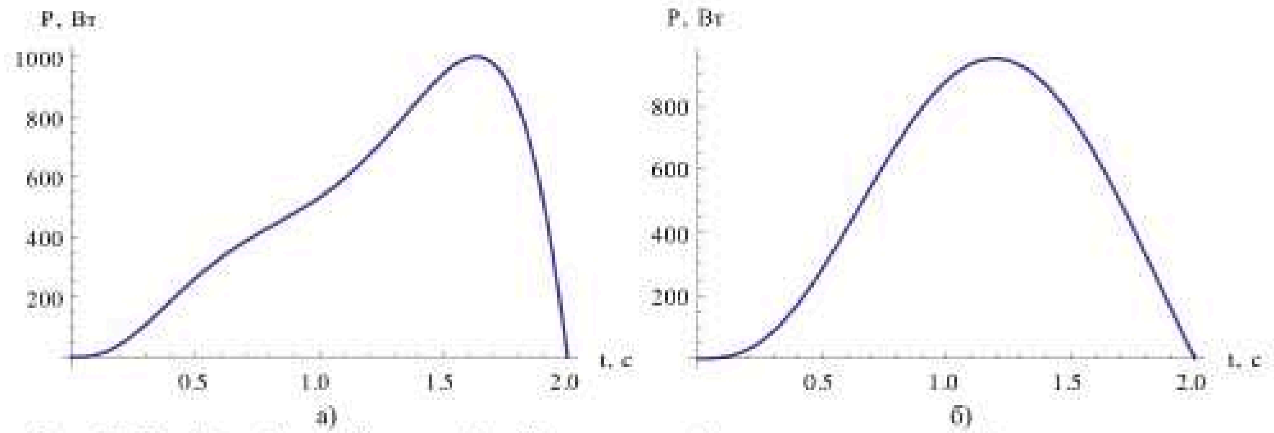

Рис. 3. Графіки функцій динамічної потужності при симетричних (а) та несиметричних (б) крайових умовах

Дослідимо значення функціоналу для обох розв'язків. Побудуємо графік функціоналу I_2, як функції від тривалості часу перехідного режиму руху механічної системи (при заданих параметрах $m_t = 2000\ \hat{e}\bar{a},\ \ v = 1\grave{i}\ /\tilde{n}$).

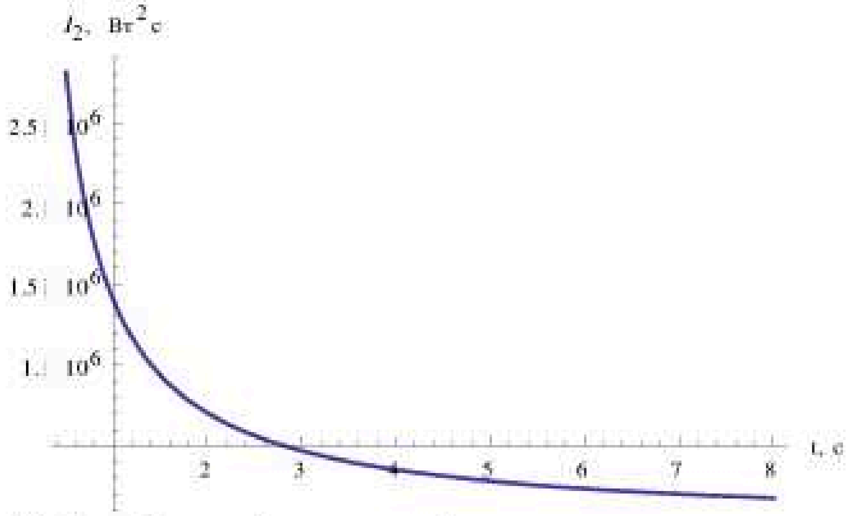

Рис. 4. Графік функціоналу від параметра t_1

Побудова графіку I_1 не дає змоги оцінити відмінність цих функціоналів – вони досить схожі. Тому побудуємо графік їх різниці $\Delta = I_1 - I_2$ (рис. 5).

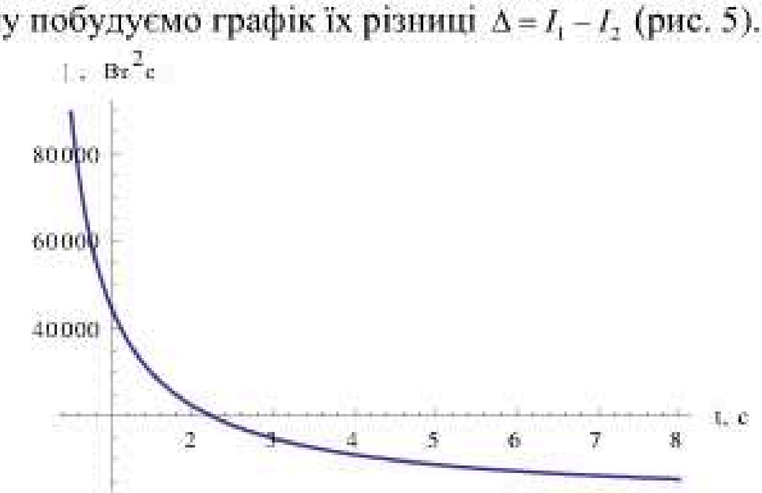

Рис. 5. Графік різниці функціоналів Δ від параметра t_1

Бачимо, що ця різниця функціоналів на 2 порядки менша ніж значення функціоналів, але зі зменшенням часу t_1 вона спадає і стає на 1 порядок меншою ніж значення функціоналів. Тому з позицій мінімізації значення функціоналу постановка симетричних крайових умов є прийнятнішою.

Висновки. На основі проведених досліджень можна зробити наступні висновки:

1) розроблено новий прямий метод розв’язування варіаційних задач, який зводиться до постановки додаткових умов для відповідним чином складеного диференціального рівняння та мінімізації функціонала за цими умовами;

2) розв’язування задачі мінімізації функціонала, який характеризує динамічну потужність, показує, що за допомогою даного методу можна „обходити” нелінійні рівняння Ейлера-Пуассона, розв’язуючи алгебраїчні кубічні рівняння;

3) оптимізація режиму розгону механічної системи з використанням симетричних крайових умов дає кращі результати у плані величини функціоналу і динаміки руху механічної системи.

Список використаної літератури

1. Мехатроника / [Исин Т., Симояна И., Иноуэ Х. и др.]; под. ред. В.В. Василькова.; пер. с японского С.Л. Масленников. – М.: Мир, 1988. – 318 с.
2. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969. – 424 с.
3. Понтрягин Л.С., Болтнянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальних процессов. – М.: Физматгиз, 1961. – 392 с.
4. Беллман Р. Динамическое программирование. – под. ред. Воробьева Н.Н. – М.: Издательство иностранной литературы, 1960. – 400 с.
5. Ловейкин В. С. Расчеты оптимальних режимов движения механизмов строительных машин. – К.: УМК ВО, 1990. – 168 с.
6. Хитрик В.Э. Методы динамической оптимизации механизмов машин-автоматов. – Л.: из-во Ленинградского ун-та, 1974. – 116 с.
7. Корн Г., Корн Т. Справочник по высшей математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1973. – 832 с.

Аннотация

Оптимизация переходных режимов движения механических систем прямым вариационным методом

Ловейкин В.С., Ромасевич Ю.О.

Изложена методика решения вариационных задач с помощью нового прямого вариационного метода. Приведено решение задачи оптимизации движения механической системы при симметричных и несимметричных краевых условиях.

Abstract

Optimization connecting mode moving the mechanical systems by direct variational method

Loveykin V.S., Romasevich Y.O.

The stated methods of the decision of the variational problems by means of new direct variational method. The broughted decision of the problem to optimization of the moving the mechanical system under symmetrical and non symmetrical marginal condition.