УДК 528.482 → 69.058.2:528.3

Московский государственный университет геодезии и картографии
Аспирант *Мануэль Трехо Сото*
(Мексика)

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СПУТНИКОВЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ДЕФОРМАЦИЙ ИНЖЕНЕРНЫХ СООРУЖЕНИЙ

За последнее время в геодезической практике при решении задачи оценивания осадок и смещений крупных инженерных сооружений при анализе результатов измерений, полученных при помощи системы GPS, шире стали применяться нестандартные математические подходы [1—4]. В статье рассмотрен один из вариантов решения данной задачи, используемый при наблюдениях за осадками и смещениями плотины «Саналона», Мексика.

Проводится статистический тест для обнаружения небольших ошибок, которые не были обнаружены во время первых статистических испытаний. Данный тест известен под термином «внутренняя надежность». Его цель — установить эффект, который производят данные ошибки на оцениваемые нами параметры [1]. Надежность геодезических сетей можно разделить на две части. Первая — внутренняя надежность — состоит в способности сети обнаруживать ошибки статистическими методами. Внешняя надежность является проявлением ошибок, которые невозможно установить, применяя статистический тест, и является максимально возможным воздействием, которое способно выявить воздействие этих ошибок на оцениваемые параметры [2].

Вторым этапом такой методики является анализ на устойчивость, известный как свойство любой сети быть достаточно прочной по отношению к деформациям, которым она может быть подвергнута в результате воздействия ошибок, совершенных в процессе измерения. В концепции устойчивости можно выделить три аспекта: устойчивость к масштабу, устойчивость к конфигурации и устойчивость к повороту.

Основным соотношением минимально обнаруживаемой ошибки $\lambda'(\alpha, \beta, r_1, r_2)$ является

$$\lambda' = \delta_{\min}^{(K)^T} \left[H_K^T (PQ_e P) H_K \right] \delta_{\min}^{(K)}, \quad (1)$$

где $H_K^T = \left[0,.....0, \quad \underset{3\times 3}{I} \quad ,0,.....,0 \right]^T$; $\delta_{\min}^{(k)}$ — минимально обнаруживаемый вектор ошибок; P — матрица весов; Qe — матрица кофакторов поправок.

Определяемый вектор $\delta_{\min}^{(k)}$ имеет размерность 3×1. Это означает, что данная задача становится неопределенной, так как, зная значение λ', имеем уравнение с тремя переменными, которое не имеет решения. Поэтому необходимо сделать дополнительные предположения о компонентах векторов GPS. Опыт подсказывает, что точность компоненты, соответствующей измерению высоты Δh, примерно в два раза выше, чем точность горизонтальных компонент Δx Δy или $\Delta\lambda$ $\Delta\varphi$. Если предположить, что точности горизонтальных компонент равны между собой, получаем

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_h / 2. \quad (2)$$

Используя данные выражения для трех компонент вектора GPS в обнаружении и оценке ошибок геодезической сети, можно получить выражение для минимально определяемой ошибки как

$$\left(\delta_{\min}^{(k)} \right)_{x,y,h} = \gamma [1 \quad 1 \quad 2]^T, \quad (3)$$

где γ — скаляр. Предполагая, что уравнивание производилось в пространственной геоцентрической системе и точности рассматривались в горизонтальной системе, осуществим поворот предыдущего вектора из горизонтальной в пространственную систему, используя следующую матрицу поворота:

$$R = \begin{bmatrix} -\sin\varphi\cos\lambda & -\sin\lambda & \cos\varphi\cos\lambda \\ -\sin\varphi\sin\lambda & \cos\lambda & \cos\varphi\sin\lambda \\ \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \end{bmatrix}. \quad (4)$$

После поворота, принимая во внимание определение минимально определяемых ошибок в уравнении (3), имеем

$$\delta_{\min}^{(k)} = R\left(\delta_{\min}^{(k)}\right)_{x,y,h} = \gamma R\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\end{bmatrix}^T. \tag{5}$$

Вектор $[1\ \ 1\ \ 2]^T$ в (5) представляет собой разницу в точности для северной, восточной и высотной компонент в горизонтальной системе координат. При этом φ и λ в (4) представляют собой средние геодезические координаты для каждого исследуемого вектора. Принимая во внимание ограничение (3), вектор $\delta_{\min}^{(k)}$ однозначно определяется с учетом выражения для γ как

$$\gamma^2 = \frac{\lambda'}{\left(R\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\end{bmatrix}^T\right)^T\left[H_K^T(PQ_eP)H_K\right]R\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\end{bmatrix}^T}. \tag{6}$$

При этом параметр λ' определяется как

$$\lambda' = (f_1 + 1)\frac{\varphi^2}{2}, \tag{7}$$

где $f_1 = r_1 = 3$ для измерений с помощью спутниковой GPS-технологии; φ — является табличным значением и является функцией $(\alpha, \beta, f_1, f_2)$; $f_2 = r_2 = r - 3$, если минимально обнаруживаемая ошибка для каждой триады векторов задается как

$$\delta_{(\min)}^{k} = \gamma R\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\end{bmatrix}^T. \tag{8}$$

В табл. 1 показана оценка минимально обнаруживаемых ошибок сети, созданной в районе плотины «Саналона», Мексика с помощью спутниковой GPS-технологии.

Чтобы обладать способностью измерить степень устойчивости сети, необходимо также уметь измерить степень деформации, которой подвергается сеть. Одним из самых простых способов для описания степени деформации является учет индивидуальных смещений каждой из точек, из которых состоит сеть. Известно, что при уравнивании геодезических сетей, можно записать существующее выражение [5]:

$$\hat{X} = X^{(0)} + \delta\hat{X} = (A^TPA)^{-1}A^TP\left[l - F(X^{(0)})\right], \tag{9}$$

где $\hat{X}$ — вектор искомых неизвестных; $X^{(0)}$ — вектор начальных значений каждого из параметров, подлежащих определению;

Таблица 1

Оценка минимально обнаруживаемых ошибок

$\alpha = 0.01;\ \beta = 0.8;\ r_1 = 3;\ r_2 = 9;\ \lambda = 15.207$

Векторы	δx_{min}	δy_{min}	δz_{min}
LOM/TEMP	−0,004	0,002	0,004
LOM/AAAA	−0,003	0,002	0,003
LOM/BBBB	−0,003	0,003	0,003
LOM/CAST	−0,006	0,005	0,007
CARD/TEMP	−0,004	0,003	0,004
CARD/AAAA	−0,003	0,005	0,003
CARD/BBBB	−0,003	0,002	0,004
CARD/CAST	−0.005	−0.006	−0.005
BBBB/TEMP	−0,004	0,005	0,004
BBBB/AAAA	−0,003	0,003	0,003
CULE/BBBB	−0,003	0,002	0,003
CULE/TEMP	−0,004	0,003	0,004
CULE/AAAA	−0,003	0,0042	0,002
CULE/CAST	−0,005	0,005	0,007
AAAA/CAST	−0,007	0,006	0,008

$\delta\hat{X}$ — вектор поправок приближенных значений; A — матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок; P — матрица весов; $[l - F(X^{(0)})]$ — вектор-столбец свободных членов уравнений поправок.

Разница в определении параметров, не принимая во внимание минимально обнаруживаемые ошибки и принимая во внимание определение минимально определяемых ошибок, может быть записана как

$$\delta = \hat{X} - \hat{X}^{(K)}. \qquad (10)$$

Отсюда получаем значение $\hat{X}^{(K)}$, которое может быть выражено как функция минимально определяемых ошибок $\delta_{\min}^{(k)}$ (внутренняя надежность). Так, применяя (5) и (9), имеем

$$\hat{X}^{(k)} = N^{-1}A^T P(L - \delta^k_{\min});$$
$$\hat{X}^{(k)} = N^{-1}A^T PL - N^{-1}A^T P\delta^k_{\min}; \qquad (11)$$
$$\hat{X}^{(k)} = \hat{X} - N^{-1}A^T P\delta^k_{\min}.$$

Подставляя (11) в (10), получаем определение внешней надежности для измерений с помощью спутниковой GPS-технологии [3]:

$$\delta = \hat{X} - \hat{X}^{(k)};$$
$$\delta = \hat{X} - \hat{X}^{(k)} = N^{-1}A^T P\delta^k_{\min}. \qquad (12)$$

Данные табл. 2 показывают влияние в пространстве и в плоскости минимально обнаруживаемых ошибок в сети «Саналона», Мексика.

Анализ концепции деформации в геометрии сети похож на анализ деформации в твердом теле, которая определяется как отношение или пропорция изменения (градиента) смещения объекта относительно своего положения.

Предположим, что точка сети P_i испытывает горизонтальное смещение, выраженное в терминах внутренней надежности через следующий вектор ΔX_i:

$$\Delta X_i = \begin{bmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}. \qquad (13)$$

Необходимо отметить, что устойчивость рассматривается только в горизонтальной системе, тем самым для измерений GPS необходимо трансформировать вектор смещений (12) из пространственной в горизонтальную систему, используя матрицу поворота, задаваемую как

$$R = \begin{bmatrix} -\sin\varphi\cos\lambda & -\sin\varphi\sin\lambda & \cos\varphi \\ -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ \cos\varphi\cos\lambda & \cos\varphi\sin\lambda & \sin\varphi \end{bmatrix}, \qquad (14)$$

где φ, λ — геодезические координаты, измеренные на изучаемом участке. Эта матрица переводит воздействие минимально обнаруживаемых ошибок для измерений GPS из пространственной

Таблица 2

Пункт	Влияние $\delta^{(k)}_{\min}$ в пространстве (в м) $\Delta\hat{x}$		Влияние $\delta^{(k)}_{\min}$ в плоскости (в м) $\Delta\hat{x}$		Δx_i
TEMP	Δx	−0.007	Δx	0.002	u_i
	Δy	0.009	Δy	0.004	v_i
	Δz	0.008			
AAAA	Δx	−0.003	Δx	0.004	u_i
	Δy	0.003	Δy	0.002	v_i
	Δz	0.005			
BBBB	Δx	−0.002	Δx	0.002	u_i
	Δy	0.005	Δy	0.004	v_i
	Δz	0.005			
CAST	Δx	−0.003	Δx	0.002	u_i
	Δy	0.004	Δy	0.003	v_i
	Δz	0.005			

в локальную систему. Тем самым искомый вектор смещений представляет собой

$$R\delta = R\,[\hat{X} - \hat{X}^{(k)}], \quad R\delta = R\,[N^{-1} A^{T} P\, H_K \delta^{k}_{\min}]. \qquad (15)$$

Вводя определение матрицы смещений E как тензора градиента по отношению к его начальному положению, можно определить матрицу, состоящую из четырех линейных смещений как [4]:

$$E_i = grad(\Delta X_i) = \begin{bmatrix} \partial u_i/\partial x & \partial u_i/\partial y \\ \partial v_i/\partial x & \partial v_i/\partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{ux} & e_{uy} \\ e_{vx} & e_{vy} \end{bmatrix}, \qquad (16)$$

где ΔX_i — вектор смещений точки P_i; E_i — матрица деформаций в точке P_i.

В точке P_i производится оценка четырех производных. Матрица деформаций E_i может быть представлена в виде симметричной S и антисимметричной A частей. Симметричная часть отвечает за расширение и сжатие сети, а также за сдвиг, тогда как антисимметричная часть описывает поворот интересующей нас точки w:

$$E_i = S + A, \tag{17}$$

где

$$S = \begin{bmatrix} \partial u_i/\partial x & \frac{1}{2}(\partial u_i/\partial y + \partial v_i/\partial x) \\ \frac{1}{2}(\partial u_i/\partial y + \partial v_i/\partial x) & \partial v_i/\partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix};$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(\partial u_i/\partial y - \partial v_i/\partial x) \\ \frac{1}{2}(\partial v_i/\partial x - \partial u_i/\partial y) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -w \\ w & 0 \end{bmatrix}.$$

Градиент локального смещения оценивается независимо для каждой координаты. Для анализа устойчивости необходимо установить, что для каждой из анализируемых точек P_i существуют, по крайней мере, две соседние точки P_j, в противном случае анализ не является полным (законченным).

Матрицы деформаций (16) могут определяться независимо для каждой из интересующих нас точек различными способами. В данной работе применяется метод прямого нахождения частных производных смещений, полученных из вектора (13).

Полученная система уравнений может быть решена методом наименьших квадратов. Решая данную систему для неизвестных частных производных и для независимых параметров и принимая во внимание, что параметры u, v имеют одинаковый вес, можно записать данную систему уравнений в матричном виде, а именно для каждой точки (P_i) сети:

$$K_i \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \left[(K_i^T K_i)^{-1} K_i^T \right] u_i = Q_i u_i;$$

$$K_i \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \left[(K_i^T K_i)^{-1} K_i^T \right] v_i = Q_i v_i, \tag{18}$$

где $Q_i = (K_i^T K_i)^{-1} K_i^T$; K_i — матрица, размерностью $n \times 3$, имеющая вид $[1 \;\; x \;\; y]$.

После получения значений $[a_0 \;\; a_1 \;\; a_2]^T$ и значений $[b_0 \;\; b_1 \;\; b_2]^T$ переобозначим переменные как

$$e_{ux} = a_1 \qquad e_{uy} = a_2$$
$$e_{vx} = b_1 \qquad e_{vy} = b_2. \tag{19}$$

Теперь три параметра, определяющие устойчивость сети, определены через расширение, поворот и наклон (рис. 1—3):

— расширение σ. Этот элемент описывает среднее расширение и сжатие точки сети, он также известен как устойчивость к масштабу и определяется как

$$\sigma = \frac{e_{ux} + e_{vy}}{2}; \tag{20}$$

— дифференциальное вращение w_z. Этот элемент известен как среднее значение дифференциального вращения. Описывает вращение через локальную вертикальную ось интересующей точки. Также известен как показатель устойчивости к повороту и задается как

$$w_z = \frac{e_{uy} - e_{vx}}{2}; \tag{21}$$

— локальная конфигурация (полный сдвиг) γ_{xy}. Этот элемент описывает скалярную деформацию (устойчивость к конфигурации) и определяется по следующей формуле:

$$\gamma_{xy} = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \upsilon_{xy}^2},$$

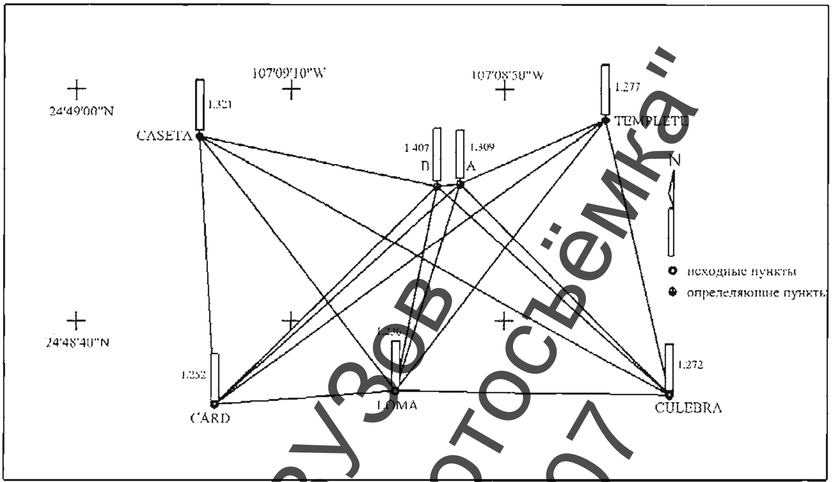

Рис. 1. Анализ устойчивости к масштабу (расширению) сети плотины «Саналона», Мексика

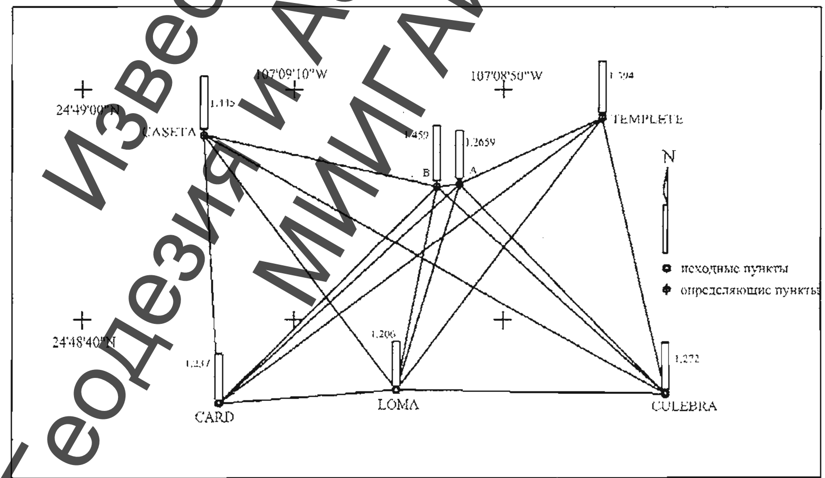

Рис. 2. Анализ устойчивости к повороту (дифференциальному вращению) сети плотины «Саналона», Мексика

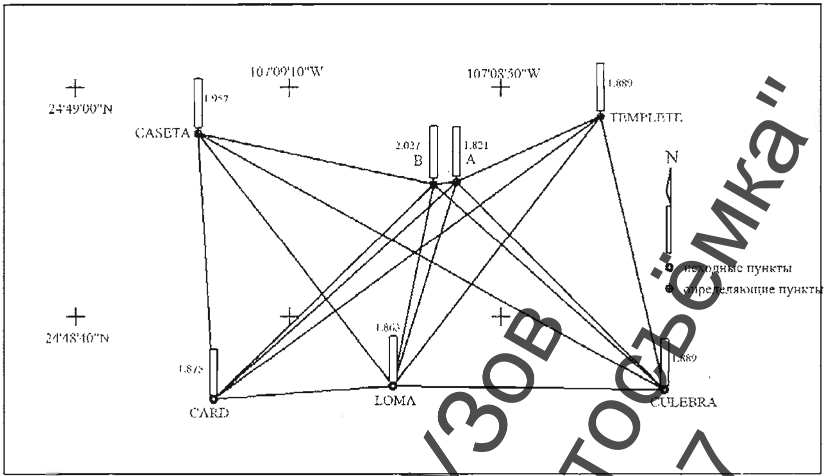

Рис. 3. Анализ устойчивости к конфигурации (польному сдвигу) сети плотины «Саналона», Мексика

где

$$\tau_{xy} = -\tau_{yx} = \frac{1}{2}(e_{ux} - e_{vy}); \quad \upsilon_{xy} = -\upsilon_{yx} = \frac{1}{2}(e_{uy} + e_{vx}). \quad (22)$$

Значения трех параметров, вычисленные по формулам (20)—(22) и характеризующие устойчивость сети, показаны в табл. 3.

Таблица 3

Пункт	Устойчивость к масштабу (расширение σ), мм	Устойчивость к повороту (дифференциальное вращение ω_h), мм	Устойчивость к конфигурации (полный сдвиг γ_{xy}), мм
CAST	1.32	1.44	1.96
AAAA	1.31	1.26	1.82
BBBB	1.40	1.46	2.03
TEMP	1.28	1.39	1.89
CARD	1.25	1.24	1.87
LOMA	1.24	1.21	1.86
CULE	1.27	1.27	1.89

Полученные результаты измеряются в частях на миллион (ppm), что позволяет легко сравнивать результаты, полученные для различных точек. Необходимо отметить, что наибольшее значение каждого из параметров устойчивости сети соответствует наименьшей устойчивости сети в данной точке. Поэтому в случае устойчивой сети необходимо добиться относительно небольших значений по этим трем показателям.

Изложенная выше краткая информация о нестандартных подходах к изучению и анализу надежности и устойчивости геодезических сетей, свидетельствует о целесообразности их использования, позволяет получать оперативную информацию об изучаемых деформационных процессах. Изучение такого подхода является предметом будущих исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Even-Tzur. GPS vector configuration design for monitoring deformation network. Springer Berlin / Heidelberg. Journal of Geodesy (2002) 76: 455—461.

2. Kyle Brian Snow. Applications of Parameter Estimation and Hypothesis Testing GPS Network Adjustments. Report No. 465. The Ohio State University (2002). Geodetic and Geoinformation Science.

3. P. Vanicek, M. R. Craymer, E. J. Krakiwsky. Robustness analysis of geodetic horizontal networks. Springer Berlin / Heidelberg. Journal of Geodesy (2001) 75: 199—209.

4. R. Hsu, S. Li. Decomposition of deformation primitives of horizontal geodetic networks: Applications to Taiwan's GPS network. Springer Berlin / Heidelberg. Journal of Geodesy (2004) 78: 251—262.

5. Маркузе Ю. И. Обобщенный рекуррентный алгоритм уравнивания свободных и несвободных геодезических сетей с локализацией грубых ошибок // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 2000. № 1. С. 3—16.

Поступила 14 ноября 2006 г.
Рекомендована кафедрой прикладной геодезии МИИГАиК.