

Канд. техн. наук РУСАНОВ В.А., магистр НЕКРАВЕЦ О.С. (ДонНТУ, г. Донецк, Украина)

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВЫХ И НЕУСТОЙЧИВЫХ КОЛЕБАНИЙ БУРОВОГО СНАРЯДА

Геологоразведочные работы и инженерно-геологические изыскания, проводимые многими странами в последние годы на дне морей и океанов, дали толчок развитию техники в этой малоизученной области. По результатам исследований, литературным и патентным источникам можно заключить, что большое значение в прогрессе указанных работ имеют средства опробования, в частности колонковые прободоотборники. Это объясняется тем, что большинство твердых полезных ископаемых залегает в виде морских россыпей или илистых осадков в области шельфа вблизи от поверхности дна на глубинах, редко превышающих 5 – 10 м. Колонковые прободоотборники при сравнительно малых затратах на их обслуживание позволяют получать геологическую информацию о верхней части дна на глубину 2 – 5 м, а иногда, в илистых осадках и на большей глубине моря, – до 40 м [1].

Широко используются для бурения подводных скважин прободоотборники вибрационного и ударно-вибрационного типов. Они могут быть оснащены пневматическим, гидравлическим или электрическим приводом и, при наличии дополнительных приспособлений для повышения качества отбираемого керна, вполне приемлемы как для геологоразведочных, так и для инженерно-геологических изысканий на шельфе [1].

В общем случае подводные прободоотборники состоят из погружателя 1, генерирующего периодическую возмущающую силу, колонкового набора 2, совмещающего породоразрушающий инструмент (башмак) и керноприемную трубу, и стабилизирующего устройства 3 (рис. 1а).

В процессе погружения прободоотборника силовое возмущение от погружателя передается к башмаку по керноприемной трубе в виде продольной волны. Наряду с продольными колебаниями в буровом снаряде при приложении периодической силы возникают колебания изгибные [2], имеющие форму поперечной волны. Точный механизм воздействия сложным образом колеблющегося бурового снаряда на контактирующие с ним частицы грунта остается все еще спорным вопросом. Исследователями установлено, что слой грунта, прилегающий к буровому снаряду, под воздействием воспринимаемых от погружателя колебаний становится подобным вязкой жидкости.

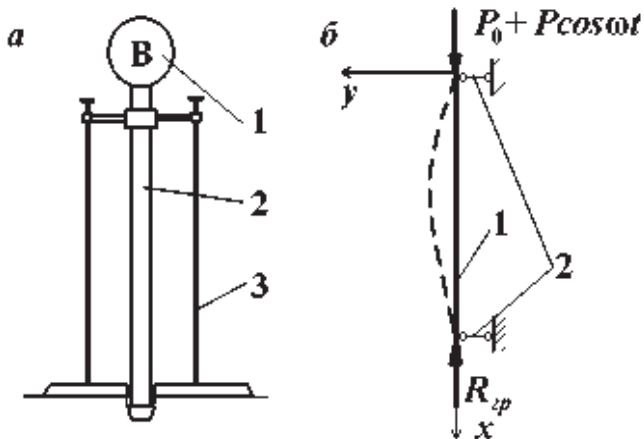


Рис. 1. Подводный прободоотборник:
а – общая структурная схема;
б – расчетная схема.

Однако эффект виброоживления достигается не при любом сочетании параметров

колебательной системы, а лишь при определенном, определяемом соотношением амплитуды колебаний и размера частиц грунта [3]:

$$A \geq [A_{min}] = \alpha d_0 \quad (1)$$

где A – амплитуда колебаний частиц; $[A_{min}]$ – минимально допустимая амплитуда колебаний; α — экспериментальный коэффициент ($\alpha=1..4$) [4].

Если же амплитуда меньше размера частиц, то грунт будет уплотняться и сильнее зажимать буровой снаряд, что отрицательно скажется на механической скорости бурения и качестве керна.

Оценить амплитуду поперечных колебаний бурового снаряда можно, составив математическую модель колебательного процесса стержневой системы, которой для упрощения расчетной схемы с известной долей погрешности можно заменить керноприемную часть пробоотборника (рис. 1б).

Пренебрегая продольными колебаниями от действия силы $P \cos \omega t$, запишем уравнение, которое в линейном приближении описывает поперечные колебания стержня (рис. 1б).

$$\rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + (P_0 + P \cos \omega t - R_{zp}) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0, \quad (2)$$

где ρ – плотность материала стержня, кг/м³; F – площадь поперечного сечения стержня (трубы), м²; E – модуль упругости материала стержня, Па; J – момент инерции поперечного сечения стержня (трубы), м⁴.

Для решения полученного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами в частных производных положим

$$y = Y(t) \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right), \quad (3)$$

где $Y(t)$ – неизвестная функция времени.

При этом уравнение (2) приобретает вид

$$\ddot{Y} + \frac{\pi^2}{l^2 \rho F} (P_0 + P \cos \omega t - R_{zp} + P_{кр}) Y = 0, \quad (4)$$

где $P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$ – первая эйлерова критическая сила для рассматриваемого стержня.

Если теперь в уравнении (4) перейти к безразмерному времени $\tau = \frac{\omega t}{2}$, получим

$$\frac{d^2 Y}{d\tau^2} = \frac{\omega^2}{4} \frac{d^2 Y}{d\tau^2} \quad (5)$$

и дифференциальное уравнение (4) принимает следующую форму

$$\frac{d^2 Y}{d\tau^2} + (\delta + 2\varepsilon \cos 2\tau) Y = 0, \quad (6)$$

где $\delta = \frac{4\pi^2}{l^2 \rho F \omega^2} (P_0 - R_{zp} - P_{кр})$; $\varepsilon = \frac{2\pi^2}{l^2 \rho F \omega^2}$.

Уравнение (6) представляет собой стандартную форму уравнения Матье, которое в свою очередь является частным случаем дифференциального уравнения второго

порядка с периодическими коэффициентами. Этот тип уравнений подробно исследовался рядом ученых, однако существующие теории (например, А.М.Ляпунов), дают возможность производить только качественный анализ поведения уравнения (6) и не указывают способов построения приближенных решений или способов, позволяющих решить вопрос об устойчивости этих уравнений [5].

Решения этого уравнения носят колебательный характер и зависят от конкретных значений δ и ε . Одним случаем данной комбинации соответствуют колебания, ограниченные по амплитуде, и тогда система считается устойчивой, а другим – колебания с возрастающими амплитудами. В последнем случае имеет место параметрический резонанс и система неустойчива.

Для практических целей наибольшее значение имеют границы между областями устойчивых и неустойчивых решений, построенные в декартовых координатах, где по оси абсцисс откладывается ε , а по оси ординат – δ (диаграмма Айнса-Стретта).

Для нахождения зависимости δ от ε следует наряду с разложением по ε решения $Y(\tau, \varepsilon)$ разложить в ряд по степеням ε и параметр δ (метод растянутых параметров [x]).

Будем искать равномерно пригодное разложение вида

$$Y(\tau, \varepsilon) = Y_0(\tau) + \varepsilon Y_1(\tau) + \varepsilon^2 Y_2(\tau) + \dots \quad (7)$$

$$\delta = n^2 + \varepsilon \delta_1 + \varepsilon^2 \delta_2 + \dots \quad (8)$$

Определяем коэффициент δ_n из требования периодичности решения.

Подставляя разложения (7) и (8) в уравнение (6) и приравнявая нулю коэффициенты при последовательных степенях ε получаем

$$\ddot{Y}_0 + n^2 Y_0 = 0, \quad (9)$$

$$\ddot{Y}_1 + n^2 Y_1 = -\delta_1 Y_0 - 2Y_0 \cos 2\tau, \quad (10)$$

$$\ddot{Y}_2 + n^2 Y_2 = -\delta_1 Y_1 - \delta_2 Y_0 - 2Y_1 \cos 2\tau. \quad (11)$$

Общее решение уравнения (8) можно представить в виде

$$Y_0 = C_1 \cos n\tau + C_2 \sin n\tau \quad (12)$$

Из формулы (12) следует, что функция Y_0 является периодической с периодом π , если n четное, и 2π , если n нечетное. Поэтому далее последовательно рассматриваем случаи $n = 0, 1$ и 2 .

Случай $n = 0$.

В этом случае решение (12) сводится к $Y_0 = C_1$. Тогда уравнение (9) принимает вид

$$\dot{Y}_1 = -\delta_1 C_1 - 2C_1 \cos 2\tau, \quad (13)$$

Требование отсутствия в правой части (13) слагаемого, порождающего секулярный член в решении Y_1 (т.е. подчинение Y_1 условию периодичности), приводит к условию

$$\delta_1 = 0 \quad (14)$$

В результате решение уравнения (13), не включающее в себя решение соответствующего однородного уравнения, имеет вид

$$Y_1 = \frac{1}{2} C_1 \cos 2\tau \quad (15)$$

При этом уравнение (11) можно представить как

$$\ddot{Y}_2 = -\delta_2 C_1 - C_1 \cos^2 2\tau \quad (16)$$

и с помощью известных тригонометрических формул преобразовать его к виду

$$\ddot{Y}_2 = -\delta_2 C_1 - \frac{1}{2} C_1 - \frac{1}{2} C_1 \cos 4\tau \quad (17)$$

Для периодичности Y_2 требуется выполнить условие

$$\delta_2 C_1 + \frac{1}{2} C_1 = 0 \quad (18)$$

откуда при $C_1 \neq 0$ (т.е. в случае нетривиального решения) имеем

$$\delta_2 = -\frac{1}{2} \quad (19)$$

Используя полученные результаты, находим решение во втором приближении

$$Y = C_1 + \frac{1}{2} \varepsilon C_1 \cos 2\tau + \dots \quad (20)$$

$$\delta = -\frac{1}{2} \varepsilon^2 + \dots \quad (21)$$

Таким образом, переходная кривая, отделяющая области устойчивости и выходящая из точки $\varepsilon = 0$, $\delta = 0$, описывается уравнением (21). Соотношение (20) показывает, что на этой кривой решение периодически с периодом π .

Случай $n = 1$.

Подставляя (12) в уравнение (10), полагая $n = 1$, после простых тригонометрических преобразований получаем

$$\ddot{Y}_1 + Y_1 = -(1 + \delta_1) C_1 \cos \tau - (\delta_1 - 1) C_2 \sin \tau - C_1 \cos 3\tau - C_2 \sin 3\tau \quad (22)$$

Требование исключения слагаемых, порождающих секулярные члены в Y_1 , приводит к условиям

$$(1 + \delta_1) C_1 = 0 \quad (23)$$

$$(\delta_1 - 1) C_2 = 0 \quad (24)$$

В результате чего уравнение (22) принимает вид

$$\ddot{Y}_1 + Y_1 = -C_1 \cos 3\tau - C_2 \sin 3\tau \quad (25)$$

Условие (23) удовлетворяется при $\delta_1 = -1$ или при $C_1 = 0$, а условие (24) – при $\delta_1 = 1$ или $C_2 = 0$. Таким образом, имеем две возможности:

$$\delta_1 = -1, C_2 = 0 \quad (26)$$

$$\delta_1 = 1, C_1 = 0 \quad (27)$$

Следовательно, решение уравнения (25), не содержащее решения соответствующего однородного уравнения, имеет вид

$$Y_1 = \frac{1}{8} C_1 \cos 3\tau \quad (28)$$

или

$$Y_1 = \frac{1}{8} C_2 \sin 3\tau \quad (29)$$

Подстановка (26), (28) и (27), (29) в уравнение (11) с учетом требования отсутствия слагаемого $\delta_2 = -\frac{1}{8}$, которое приводит к появлению секулярного члена в решении Y_2 , дает решение во втором приближении

$$Y = C_1 \cos \tau + \frac{1}{8} \varepsilon C_1 \cos 3\tau + \dots \quad (30)$$

$$\delta = 1 - \varepsilon + \frac{1}{8} \varepsilon^2 + \dots \quad (31)$$

или

$$Y = C_2 \sin \tau + \frac{1}{8} \varepsilon C_2 \sin 3\tau + \dots \quad (32)$$

$$\delta = 1 + \varepsilon - \frac{1}{8} \varepsilon^2 + \dots \quad (33)$$

Уравнения (31) и (33) описывают две ветви переходной кривой, выходящей из точки $\varepsilon = 0, \delta = 1$, а соотношения (30) и (32) показывают, что на этих кривых решение является периодическим с периодом 2π

Используя те же методы, что и в двух первых случаях, полагая $n = 2$ и $n = 3$ во втором приближении получаем решения:

Случай $n = 2$.

$$\delta = 4 + \frac{5}{12} \varepsilon^2 + \dots \quad (34)$$

или

$$\delta = 4 - \frac{1}{12} \varepsilon^2 + \dots \quad (35)$$

Уравнения (34) и (35) описывают две ветви переходной кривой, выходящей из точки $\varepsilon = 0, \delta = 4$.

Случай $n = 3$.

$$\delta = 9 + \frac{1}{16} \varepsilon^2 + \dots \quad (36)$$

или

$$\delta = 9 - \frac{1}{16} \varepsilon^2 + \dots \quad (37)$$

Уравнения (36) и (37) описывают две ветви переходной кривой, выходящей из точки $\varepsilon = 0, \delta = 9$.

На основании полученных зависимостей можно построить диаграмму Айнса-Стретта (рис. 2).

В плоскости параметров δ и ε области устойчивости чередуются с областями неустойчивости, причем наиболее широкая, а потому и наиболее важная область неустойчивости содержит точку $\delta = 1, \varepsilon = 0$. Диаграмма Айнса-Стретта полностью освобождает от выполнения каких-либо операций по решению уравнения Матье. Достаточно составить это уравнение, т.е. найти значения параметров системы δ и ε , после чего диаграмма дает ответ на вопрос об устойчивости или неустойчивости системы. Попадание в заштрихованную зону соответствует параметрическому резонансу, амплитуда нарастает по экспоненте.

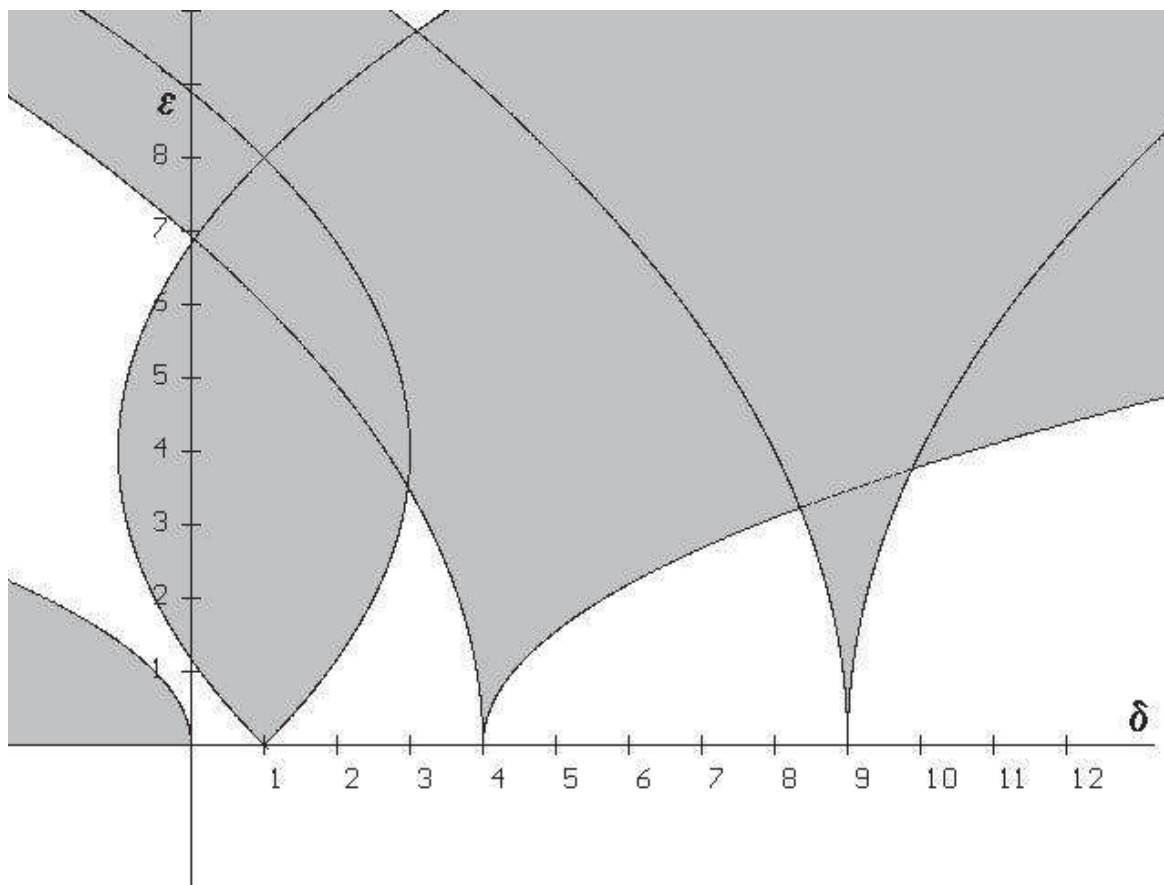


Рис. 2. Диаграмма Айнса-Стретта для колонковых снарядов морских вибрационных пробуривающих устройств (области неустойчивого режима заштрихованы).

Так же качественную оценку уравнения согласно данной диаграммы можно использовать для выбора метода решения уравнения (6) с целью определения амплитуды и частоты колебаний бурового снаряда.

В частности, в таблице 1 приведены характеристики установок для подводного бурения, успешно зарекомендовавших себя при решении различного рода геологоразведочных и инженерно-геологических задач на шельфе. Анализ величины параметров δ и ε показывает, что система, в которой возникают вынужденные колебания, является устойчивой, и позволяет определиться с методом нахождения корней уравнения (6).

Табл.1 Расчет параметров δ и ε подводных пробуривающих устройств

Наименование	Глубина бурения, м	Диаметр, м		Возмущающее усилие, кН	Частота вибрации, Гц	Масса пробуривающего устройства, кг	δ	ε
		колонковой трубы	керн					
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ВПГТ-59	4,5	0,070	0,062	6,5	25	350	23,4	$25 \cdot 10^{-5}$
ПВПТ-68	20	0,070	0,062	21	16	900	0,66	$3 \cdot 10^{-5}$

УГВП-130/8М	8	0,127	0,098	550	35		3,3	$0,64 \cdot 10^{-5}$
-------------	---	-------	-------	-----	----	--	-----	----------------------

Библиографический список

1. Шелковников И.Г., Лукошков А.В. Технические средства подводного разведочного бурения и опробования. – Л.: Изд - во ЛГУ, 1979. – 224 с.
2. Пановко?
3. Баркан Д.Д. Виброметод в строительстве. – М.: Госстройиздат, 1949. – 193с.
4. Сорокин Е.С. Внутренние и внешние сопротивления при колебаниях твердых тел // Научное совещание ЦНИИСК. — Москва, 1957, вып.3.– С.23 – 28.
5. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Издательство "Наука", 1974. – 504 с.
6. Найфе

© Русанов В.А., Некравец О.С. 2006