УДК 531.8+669.14

**Алюшин Ю.А., д.т.н., проф.**
**Московский государственный горный университет, г. Москва, Россия**

# ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ В ПЕРЕМЕННЫХ ЛАГРАНЖА

**Alyushin Y.**
**Moscow state mountain university, Moscow, Russia (alyushin7@gmail.com.)**

## AXISYMMETRIC DEFORMATION IN LAGRANGIAN

*Предложены уравнения движения в форме Лагранжа для процессов осадки, сдвига, раздачи, обратного выдавливания в условиях осесимметричной деформации, полученные интегрированием кинематически возможных полей скоростей в форме Эйлера. Принцип суперпозиции движений позволяет использовать их для анализа более сложных процессов деформации. Визуальное сравнение наблюдаемых и рассчитываемых траекторий перемещения узлов координатной сетки допускает корректировку решений для повышения точности определения энерго–силовых параметров процесса с учётом локальных и среднеинтегральных характеристик деформированного состояния.*
*Ключевые слова:* *Уравнения движения в форме Лагранжа, принцип суперпозиции, инварианты, мощность и усилия деформации*

При разработке новых технологии и оборудования для обработки давлением следует учитывать достижения, в частности, теории пластичности и развиваемых на её основе различных методов исследования операций. В задачи теоретического исследования входит, как правило, анализ напряженно – деформированного состояния с определением мощности для расчёта усилий, если предполагается штамповка на прессе, или энергии для ковки на молоте. Для учёта упрочнения деформируемого материала необходимо знать, как минимум, усреднённые по объёму характеристики деформированного состояния, а для оценки предельных степеней деформации – локальные критерии, используемые в соответствующих методах оценки пластичности [1-2].

Точность решения любой задачи механики зависит от принятых исходных предпосылок, которые формулируются в виде основных уравнений. Как правило, с учётом современных требований, это дифференциальные уравнения в частных производных, решение которых зависит от начальных (если рассматриваются нестационарные процессы) или граничных (для стационарных процессов) условий. Наибольшую погрешность обычно имеют граничные условия для напряжений, как нормальных, так и касательных с соотношениями Кулона или Мизеса [1]. С достаточно высокой точностью могут быть заданы только непосредственно наблюдаемые и измеряемые условия в перемещениях.

Сократить математические трудности решения различных задач можно за счёт перехода к описанию движения частиц в форме Лагранжа

$$x_i = x_i(\alpha_p, t), \qquad (1)$$

где $t$ –время, $x_i \in (x, y, z)$, $\alpha_p \in (\alpha, \beta, \gamma)$ - переменные Эйлера и Лагранжа, соответственно. В этом случае деформированное состояние определяет несимметричный тензор производных от переменных Эйлера по переменным Лагранжа $x_{i,p} = \partial x_i / \partial \alpha_p$, дифференциальные уравнения равновесия преобразуются к трём уравнениям Лапласа, причём каждое из них содержит только одну неизвестную функцию [3].

При недостаточной точности исходных данных или низких требованиях к точности конечных результатов практические задачи можно решать более простыми методами, например инженерными или с применением экстремальных принципов механики [1-3], в том числе по методу верхней оценки. Теория линий скольжения хорошо разработана только для процессов плоской деформации, к тому же она не предусматривает анализ деформированного состояния и поэтому менее предпочтительна.

С учётом более достоверной информации на границах заготовки и инструмента для скоростей и перемещений, особенно для нормальных компонент, широкое распространение получили методы, основанные на анализе кинематически возможных полей скоростей, в том числе из «жестких» блоков в методе верхней оценки [1]. Погрешность результатов зависит от степени соответствия действительных и принятых полей скоростей (перемещений) и увеличивается при повышении сложности геометрических особенностей очага деформации. Для нестационарных процессов она также возрастает за счёт необходимости интегрирования по времени скоростей деформации для фиксированных частиц при определении «накопленной» деформации, например, по критерию Одквиста [2].

С учётом большого опыта, накопленного в последние годы, по исследованию процессов деформации с применением кинематически возможных полей скоростей в пространстве переменных Эйлера [1-3], представляет интерес описание на их основе траекторий частиц деформируемого материала в форме Лагранжа. Набор таких полей скоростей для простейших процессов и принцип суперпозиции движений [4-5] позволяет использовать известные решения для анализа более сложных процессов деформации [6-7].

К преимуществам переменных Лагранжа можно отнести наглядность траекторий с возможностью визуального сравнения наблюдаемых и рассчитываемых траекторий перемещения узлов координатной сетки. Последние могут быть скорректированы дополнительным наложением простейших операций из числа упомянутых выше. При этом не требуется перестроения сетки узлов после достаточно малых смещений инструмента, но может появиться необходимость сравнения численных значений характеристик деформированного состояния, используемых в классической теории (в пространстве переменных Эйлера) и близких по геометрическому и физическому смыслам, получаемых при описании движения в переменных Лагранжа. Конечно, при необходимости, любые из них могут быть строго математически преобразованы к соответствующим общепринятым мерам, однако, как показывают расчёты, для решения практических задач такие преобразования не требуются и, более того, меры деформации в пространстве переменных Лагранжа имеют более простую геометрическую интерпретацию, текущие или конечные их значения легко проверить по форме искажений линий координатной сетки.

В работах [6-7] рассмотрена методика перехода от кинематически возможных полей скоростей в пространстве переменных Эйлера к уравнениям движения в форме Лагранжа для процессов плоской деформации. Ниже она распространена на процессы осесимметричной деформации, из которых, как частные случаи, могут быть получены соответствующие уравнения для плоской деформации.

Как показывает анализ картин течения даже самых сложных поковок, любой выделенный в исходном состоянии элементарный объем в виде кольца с прямоугольным поперечным сечением в конечном итоге преобразуется в блоки, ограниченные коническими или близкими к ним поверхностями. Такие преобразования формы могут быть получены последовательными или одновременными наложениями процессов раздачи, осадки и сдвига. Для этих процессов ниже приведены уравнения движения в форме Лагранжа (1), компоненты скорости в переменных Лагранжа и Эйлера, а также основные инварианты деформированного состояния, в том числе энергетическая мера деформации [4]

$$\Gamma_e^2=\left(\frac{\partial\rho}{\partial\rho_0}\right)^2+\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\rho_0}\right)^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial z_0}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial z_0}\right)^2. \tag{2}$$

Для проверки условия постоянства объёма использованы равенство потоков вектора скорости на границах рассматриваемого очага деформации, дивергенция вектора скорости и отношение объёмов частицы в текущем ($\delta V$) и исходном ($\delta V_0$) состояниях (якобиан $R$)

$$div\vec{v}=\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{u}{\rho}+\frac{\partial w}{\partial z}=0,\; R=\frac{\delta V}{\delta V_0}=\frac{\rho}{\rho_0}\begin{bmatrix}\frac{\partial\rho}{\partial\rho_0} & \frac{\partial\rho}{\partial z_0}\\ \frac{\partial z}{\partial\rho_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0}\end{bmatrix}=1. \tag{3}$$

Алгоритм расчёта мощности деформации с учёт упрочнения материала приведен в заключительной части статьи.

*1. Однородная осадка*

Предположение об однородной деформации чаще других используют при построении кинематически возможных полей скоростей [1-4]. Для осадки между параллельными плитами общепринятым соотношениям для компонент скорости в форме Эйлера

$$u\equiv\rho_t=v_0\frac{\rho}{2h},\quad w\equiv z_t=-v_0\frac{z}{h}, \tag{1.1}$$

где $v_0=-dh/dt\equiv -h_t$ – скорость перемещения верхней плиты, соответствуют уравнения движения в форме Лагранжа ($0\le\rho_0\le R_0$, $0\le z_0\le h$, $h$ – высота заготовки),

$$\rho=\rho_0\sqrt{h_0/h},\quad z=z_0 h/h_0. \tag{1.2}$$

Дифференцируя соотношения (1.2), получаем компоненты скорости в формах Лагранжа и Эйлера

$$u\equiv\rho_t=v_0\frac{\rho_0}{2h}\sqrt{\frac{h_0}{h}}=v_0\frac{\rho}{2h},\quad w\equiv z_t=-v_0\frac{z_0}{h_0}=-v_0\frac{z}{h} \tag{1.3}$$

На поверхности контакта $z_0=h_0$ или $z=h$ граничное условие $(z_t)\big|_{z=h}=h_t=-v_0$ выполняется.

Для перехода от переменных Лагранжа к переменным Эйлера достаточно заменить начальные координаты $\rho_0$ и $z_0$ на текущие $\rho$, $z$ с помощью соотношений типа (1.2).

Компоненты вектора перемещения

$$\upsilon_\rho = \rho - \rho_0 = \rho_0(\sqrt{h_0/h} - 1) = \rho(1 - \sqrt{h/h_0}), \quad \upsilon_z = z - z_0 = z_0(h/h_0 - 1) = z(1 - h_0/h), \tag{1.4}$$

как и компоненты скорости удовлетворяют условиям постоянства объёма (3). Интенсивность скорости деформации сдвига [4] по всему объёму одинакова

$$H = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{(\xi_1-\xi_2)^2 + (\xi_2-\xi_3)^2 + (\xi_3-\xi_1)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{9v_0^2}{4h^2} + \frac{9v_0^2}{4h^2}} = \sqrt{3}\frac{v_0}{h}. \tag{1.5}$$

Для сравнения с общепринятой интенсивностью деформации сдвига $\gamma_e$

$$\gamma_e = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{(\varepsilon_\rho-\varepsilon_\phi)^2 + (\varepsilon_\phi-\varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z-\varepsilon_\rho)^2 + (3/2)\gamma_{\rho z}^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{h_0}{h} - \sqrt{\frac{h}{h_0}}\right) \tag{1.6}$$

использованы параметр упрочнения Одквиста $\Lambda$, энергетическая мера (2) и среднеквадратическое отклонение длин рёбер бесконечно малой частицы в форме прямоугольного параллелепипеда от их среднего значения ($\Gamma$) [4]

$$\Lambda = \int H dt = \sqrt{3}\int_h^{h_0} h^{-1}dh = \sqrt{3}\ln\frac{h_0}{h}, \quad \Gamma_e^2 = 2\frac{h_0}{h} + \frac{h^2}{h_0^2}, \quad \Gamma^2 \approx 2\frac{h_0}{h} + \frac{h^2}{h_0^2} - 3.$$

Разница в значениях $\Lambda$ и $\sqrt{\Gamma_e^2 - 3}$ не превышает 5,45% вплоть до осадки на 25%. С другой стороны, учитывая $e \approx 1$, $\Gamma^2 = \Gamma_e^2 - 3e^2 \approx \Gamma_e^2 - 3$, параметр Одквиста можно считать характеризующим среднеквадратическое отклонение длин рёбер бесконечно малого параллелепипеда от их среднего значения [4]. Это может служить основой для новой интерпретации геометрического и энергетического смысла параметра $\Lambda$.

2. *Однородный сдвиг*

Однородным сдвигом при осесимметричной деформации кольцевой заготовки в данной работе, по аналогии с однородным сдвигом при плоской деформации, названы два процесса. В первом движение частиц описывают уравнения ($\theta$ – угол сдвига в меридиональной плоскости от оси $\rho$)

$$\rho = \rho_0, \quad z = z_0 + \theta\rho_0 \tag{2.1}$$

с областью определения переменных Лагранжа $0 \le \rho_0 \le R_0$, $0 \le z_0 \le h$. При осевой скорости на внешней боковой поверхности заготовки $v_0 = \theta_t R_0$ для произвольной частицы получаем

$$u = \rho_t = 0, \quad w = z_t = \theta_t\rho_0 = v_0\rho_0/R_0 = v_0\rho/R_0. \tag{2.2}$$

Условия постоянства объёма (3) выполняются, интенсивность скорости деформации сдвига зависит от осевой компоненты скорости перемещения частиц внешнего контура и его радиуса $R_0$

$$H = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{(\xi_\rho-\xi_\phi)^2 + (\xi_\phi-\xi_z)^2 + (\xi_z-\xi_\rho)^2 + (3/2)\xi_{\rho z}^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{3v_0^2}{2R_0^2}} = \frac{v_0}{R_0}. \tag{2.3}$$

Если процесс монотонный (без промежуточных разгрузок и наложения других деформаций), интенсивность деформации сдвига $\gamma_e$, параметр Одквиста $\Lambda$ и среднеквадратическое отклонение $\Gamma$ совпадают

$$\gamma_e = \gamma_{\rho z} = \frac{\partial u_z}{\partial\rho} + \frac{\partial u_\rho}{\partial z} = \frac{\partial(\theta\rho)}{\partial\rho} = \theta, \quad \Lambda = \int H dt = \int\frac{v_0}{R_0}dt = \int_0^\theta \theta_t dt = \theta,$$

$$\Gamma_e^2 = 3 + \theta^2, \quad \Gamma^2 = \Gamma_e^2 - 3 = \theta^2, \quad \Gamma = \sqrt{\Gamma_e^2 - 3} = \gamma_e = \Lambda = \theta. \tag{2.4}$$

Во втором варианте сдвиг определяют отклонения сечений $\rho = const$ от вертикали (оси $z$), движение частиц описывают уравнения

$$\rho^2 = \rho_0^2 + r^2 - r_0^2, \quad z = z_0 \tag{2.5}$$

с областью определения переменных Лагранжа $r_0 \le \rho_0 \le R_0$, $z_m \le z_0 \le z_m + h$, где $z_m$ – осевая координата нижней плоскости рассматриваемого кольцевого элемента.

Наклон линий $\rho = const$ в меридиональной плоскости определяет изменение радиальной компоненты скорости на внутренней поверхности, например, в виде линейной функции $z$

$$u = u_1 + (u_2 - u_1)(z - z_m)/h.$$

Скорость изменения угла сдвига при линейной зависимости $u(z)$ составляет $\vartheta_t = (u_2 - u_1)/h$, для произвольной частицы внутри рассматриваемой области получаем

$$u(\rho_0, z_0, t) = \rho_t = \frac{r}{\sqrt{\rho_0^2 + r^2 - r_0^2}}[u_1 + \vartheta_t(z_0 - z_m)], \quad w = z_t = 0.$$

Если принять, как в первом варианте, частицу с координатами $\rho_0 = r_0$, $z_0 = z_m = 0$ неподвижной, тога

$$u(\rho_0, z_0, t) = \rho_t = u_k r / \rho = \vartheta_t z_0 r / \rho = \vartheta_t z_0 r / \sqrt{\rho_0^2 + r^2 - r_0^2}.$$

На внутреннем контуре $u_k(r_0, z_0, t) = r_t = u_2 z_0 / h = \vartheta_t z_0$.

Наложение двух вариантов сдвига (2.1) и (2.5) при одновременном или последовательном протекании этих процессов описывают уравнения движения в форме Лагранжа

$$\rho^2 = \rho_0^2 + r^2 - r_0^2, \qquad z = z_0 + \theta\rho_0,$$

которые позволяют определить все другие характеристики процесса.

3. *Раздача (обжим) кольцевой заготовки при неизменной толщине*

Процессы соответствуют затеканию металла в щель постоянной высоты. Предполагается, что перемещения частиц по всему объёму заготовки описывают уравнения

$$\rho^2 = \rho_0^2 + f(t), \quad z = z_0, \tag{3.1}$$

где $f(t) = V_{см} / (\pi h)$ - мера смещённого металла. Например, у кольца с отношением внешнего ($R_0$) и внутреннего ($r_0$) радиусов в исходном состоянии $R_0 / r_0 = 2$ после увеличения внутреннего радиуса до $r = 1{,}5 r_0$ внешний примет значение $R = 2{,}29 r_0$, при этом объём заготовки сохраняется неизменным $\pi h(R^2 - r^2) = \pi h(R_0^2 - r_0^2) = 3\pi h r_0^2$, мера смещённого металла составит $f(t) = R^2 - R_0^2 = r^2 - r_0^2 = 3r_0^2$.

Если известна радиальная компонента скорости на внутреннем контуре $u_0 = r_t$, где $r$ – текущее значение радиуса внутреннего контура, тогда, принимая уравнения движения (3.1) в форме

$$\rho^2 - \rho_0^2 = r^2 - r_0^2,$$

после дифференцирования по времени ($2\rho\rho_t = 2rr_t$) находим уравнение для радиальной компоненты скорости произвольной частицы

$$u \equiv \rho_t = (r/\rho) r_t = u_0 (r/\rho).$$

Осевая компонента скорости, в соответствии с предположением о неизменности толщины, по всему объёму заготовки равна 0 ($w \equiv z_t = 0$). Интенсивность скорости деформации сдвига зависит от текущего радиуса частицы и скорости внутреннего контура

$$H = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{4\frac{u_0^2 r^2}{\rho^4} + \frac{u_0^2 r^2}{\rho^4} + \frac{u_0^2 r^2}{\rho^4}} = 2\frac{u_0 r}{\rho^2}.$$

Параметр Одквиста определяют смещённый объём и начальное положение частицы

$$\Lambda = \int H dt = \int 2\frac{u_0 r}{\rho^2} dt = \int_{r_0}^{r} 2\frac{r}{\rho^2} dr = \int_{r_0}^{r} \frac{dr^2}{r^2 + \rho_0^2 - r_0^2} = \ln\left(\frac{r^2 + \rho_0^2 - r_0^2}{\rho_0^2}\right) = \ln\left(1 + \frac{r^2 - r_0^2}{\rho_0^2}\right)$$

Переходя к перемещениям

$$\upsilon_\rho = \rho - \rho_0 = \sqrt{\rho_0^2 + f(t)} - \rho_0 = \rho - \sqrt{\rho^2 - f(t)}, \qquad f(t) = r^2 - r_0^2,$$

для интенсивности деформации сдвига и меры деформации (2) получим

$$\gamma_e = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(\rho/\rho_0)^2 + (\rho_0/\rho)^2 - \rho_0/\rho - \rho/\rho_0},$$

$$\Gamma_e^2 = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 + \left(1 + \frac{f(t)}{\rho_0^2}\right) + 1 = \frac{\rho_0^2}{\rho_0^2 + f(t)} + \frac{\rho_0^2 + f(t)}{\rho_0^2} + 1.$$

Так как выше использовано только предположение (3.1), все вышеизложенное можно распространить на обжим (затекание металла в центральную полость постоянной толщины).

4. *Центральная зона при обратном выдавливании с произвольной формой пуансона*

Для большинства реальных процессов штамповки и выдавливания описать процесс деформации в виде одной зоны с достаточно простым полем скоростей, примеры которых рассмотрены выше, не представляется возможным и возникает необходимость анализа двух и более зон с отличающимися полями скоростей и перемещений. При этом особую роль играют зоны, непосредственно прилегающие к пуансону. Несмотря на их многообразие, в этой зоне можно воспользоваться достаточно простым полем скоростей, которое удовлетворяет не только условию постоянства объёма, но и граничному условию равенства нормальных компонент скорости на поверхности пуансона.

Рассмотрим процесс осесимметричной штамповки с произвольной формой пуансона $f(\rho)$ с производной $\partial f/\partial\rho = f'(\rho)$, положение которого в любой момент времени в системе координат $\rho - z$ описывает уравнение

$$\psi = \psi(\rho, t) = h(t) + f(\rho), \tag{4.1}$$

где $h(t)$ – расстояние от неподвижной плоскости $z = 0$ до поверхности пуансона на оси $z$. В зоне пуансона должно выполняться условие $w = -v_0$ при $z \ge \psi(\rho)$.

Предполагая зависимость радиальной компоненты скорости только от одной координаты $u = u(\rho)$, из условия равенства потоков вектора скорости при любом виде функции $u = u(\rho)$ получаем

$$2\pi\rho\psi u = v_0\pi\rho^2, \quad u = v_0\frac{\rho}{2\psi(\rho)}. \tag{4.2}$$

С учётом $v_0 dt = -d\psi$ и граничного условия $w = 0$ при $z = 0$ из условия постоянства объёма (3) получаем

$$\frac{\partial w}{\partial z} == -\frac{v_0}{\psi}\left(1 - \frac{\rho}{2\psi}f'\right), \quad w = -v_0\frac{z}{\psi}\left(1 - \frac{\rho}{2\psi}f'\right). \tag{4.3}$$

Чтобы поле скоростей было кинематически возможным, необходимо дополнительно выполнение граничного условия в виде равенства нормальных компонент скоростей на поверхности пуансона. Проектируя компоненты $w$ и $u$ на нормаль к поверхности пуансона с углом наклона $tg\theta = \partial f/\partial\rho$, получим

$$v_n = u_k\sin\theta - w_k\cos\theta = v_0\cos\theta \quad \text{или} \quad w_k = -v_0 + u_k f'. \tag{4.4}$$

На поверхности контакта заготовки и инструмента при $z = h$ осевая компонента скорости состави

$$w_k = -v_0\left(1 - \frac{\rho}{2\psi}f'\right) = -v_0 + u_k f'. \tag{4.5}$$

Таким образом, предположение о независимости радиальной компоненты скорости от осевой координаты обеспечивает выполнение всех условий, поле скоростей с компонентами (4.2) и (4.3) является кинематически возможным.

Чтобы преобразовать уравнения движения (4.2) и (4.3) к форме Лагранжа, запишем уравнение (4.2) в виде

$$\frac{d\rho}{dt} = v_0\frac{\rho}{2\psi(\rho,t)} \quad \text{или} \quad \frac{d\psi}{d\rho} + \frac{2\psi(\rho,t)}{\rho} = 0. \tag{4.6}$$

Например, для конического пуансона с уравнением $\psi = h + k\rho$ уравнение (4.6) принимает вид

$$\frac{dh}{d\rho} + \frac{2h}{\rho} + 2k = 0. \tag{4.7}$$

Линейное уравнение первого порядка (4.7) имеет решение [8]

$$h\rho^2 + (2/3)k\rho^3 = h_0\rho_0^2 + (2/3)k\rho_0^3, \tag{4.8}$$

в справедливости которого можно убедиться непосредственной проверкой через обратные операции дифференцирования.

Для осевой координаты уравнение (4.3) преобразуем к виду

$$\frac{dz}{z} = \frac{dh}{h + k\rho}\left(1 - \frac{\rho k}{2(h + k\rho)}\right). \tag{4.9}$$

Здесь от времени зависят $z$, $h$, $\rho$. Для преодоления трудностей интегрирования можно принять $\rho$ константой как среднее значение на рассматриваемом интервале времени

$$z = z_0\frac{h + k\tilde{\rho}}{h_0 + k\rho_0}\exp\left(\frac{k}{2}\left(\frac{\tilde{\rho}}{h + k\tilde{\rho}} - \frac{\rho_0}{h_0 + k\rho_0}\right)\right), \quad \tilde{\rho} = (\rho|_{h_0} + \rho|_h)/2. \tag{4.10}$$

Погрешность расчёта координаты $z$ при таком предположении и уменьшении $h_0$ на 50% составляет менее 3%. При $k = 0$ решение преобразуется к полученному выше для осадки цилиндрической заготовки между параллельными плитами.

Для сферического пуансона

$$\psi = h + R - \sqrt{R^2 - \rho^2}, \quad d\psi = dh, \quad \frac{d\psi}{d\rho} + \frac{2\psi(\rho)}{\rho} = 0 \tag{4.11}$$

решением дифференциального уравнения (4.6) будет

$$\rho^2(h + R) + (2/3)(R^2 - \rho^2)^{3/2} = \rho_0^2(h_0 + R) + (2/3)(R^2 - \rho_0^2)^{3/2} \tag{4.12}$$

Для осевой координаты из общего (4.3) и $\psi' = \dfrac{\partial\psi}{\partial\rho} = \dfrac{\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}$ окончательно получаем

$$z = z_0\frac{h}{h_0}\exp\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\rho^2}{h\sqrt{R^2-\rho^2}} - \frac{\rho_0^2}{h_0\sqrt{R^2-\rho_0^2}}\right)\right). \quad (4.13)$$

Если сфера преобразуется в плиту ( $R = \infty$ ), решение совпадает с (1.2) для однородной осадки цилиндра.

5. *Процессы деформации с зонами разной высотной деформации*

Если в реальном процессе, например, при обратном выдавливании, гипотеза о параллельности перемещений границ кольцевой области неприемлема, тогда зону деформации можно разделить на несколько смежных зон, для каждой из которых предусматривается изменение толщины за счёт дополнительного наложения процесса типа осадка (с любым знаком осевой скорости на поверхностях зон).

Предположим, что кольцевой элемент с цилиндрическими внутренним и внешним контурами в исходном состоянии ограничен областью $0 \le z \le h_0$, причём нижняя плоскость остаётся неподвижной. Для каждой зоны с внутренним радиусом $r_A$ и внешним $r_B$ должно выполняться условие постоянства объёма, в том числе через равенство потоков вектора скорости на их границах

$$u_A 2\pi r_A h = u_B 2\pi r_B h + w_1\pi(r_B^2 - r_A^2). \quad (5.1)$$

В каждой зоне принимаем линейное изменение скорости по оси z и, следовательно,

$$z = z_0\frac{h}{h_0} \quad z_t = z_0\frac{h_t}{h_0} \quad w = v_1\frac{z}{h}. \quad (5.2)$$

Для радиальной координаты уравнение движения ищем из условия постоянства объёма в виде равенства потоков вектора скорости на подвижных поверхностях кольцевого элемента

$$\rho^2 = r_A^2 + (\rho_0^2 - r_{A0}^2)h_0/h \text{ или } \rho^2 = r_B^2 - (r_{B0}^2 - \rho_0^2)h_0/h \quad (5.3)$$

при обязательном выполнении условия

$$\pi(r_B^2 - r_A^2)h = \pi(r_{B0}^2 - r_{A0}^2)h_0.$$

Особо отметим принципиальное отличие выделяемых кольцевых зон в пространствах переменных Эйлера и Лагранжа. В первом случае частицы деформируемого материала переходит из одной зоны в другую, пересекая границы, и в разных зонах следует использовать различные формулы для расчёта скоростей и других характеристик деформированного состояния. Кроме того, на границах зон частицы испытывают дополнительную деформацию сдвига (за счёт разницы касательных составляющих скорости). Во втором случае лагранжевы границы зон перемещаются вместе с частицами, они не могут их пересечь, расчётные формулы внутри зон сохраняются неизменными и могут изменяться лишь на разных интервалах времени, если предусматривается изменение, например, высотной деформации.

Анализ реальных процессов сводится к суперпозиции (наложению) рассмотренных выше простых видов деформации путём замены лагранжевых координат внешнего (переносного) движения выражениями для соответствующих эйлеровых координат внутреннего (относительного) движения [5]. Так как в процессах деформации перемещения внутреннего и внешнего движений малы, любой из процессов может быть принят внешним, а другой – внутренним. Например, при суперпозиции осадки (1.2) и раздачи (3.1) в обоих вариантах выбора внешнего и внутреннего движений получаем одинаковые уравнения

$$\rho^2 = \rho_0^2\frac{h_0}{h}, \quad z = z_0 h/h_0, \quad R = \frac{\rho}{\rho_0}\begin{bmatrix}\dfrac{\rho_0}{\rho}\dfrac{h_0}{h} & 0\\ 0 & \dfrac{h}{h_0}\end{bmatrix} = 1.$$

Аналогичная ситуация имеет место и при суперпозиции сдвига (2.1) и раздачи (3.1)

$$\rho^2 = \rho_0^2 + f(T), \quad z = z_0 + \theta\rho_0, \quad R = \frac{\rho}{\rho_0}\begin{bmatrix}\dfrac{\rho_0}{\rho} & 0\\ \theta & 1\end{bmatrix} = 1.$$

Количество наложений не ограничивается и может изменяться во времени с учётом особенностей рассматриваемого реального процесса деформации.

Мощность деформации для любого из рассмотренных процессов или их суперпозиции целесообразно определять с учётом накопленной (суммарной, интегральной по времени), деформации и соответствующих значений пределов текучести (линейного или степенного упрочнения).

$$W = \int TH\delta V + \sum kv_{ij}\delta f_{ij} + \sum 2\mu kv_{ik}\delta f_{ik}.$$

Первое слагаемое учитывает мощность деформации внутри каждой зона, второе – на границах смежных зон, третье – на контактной поверхности с инструментом.

**Выводы**

Предлагаемые варианты уравнений движения в форме Лагранжа для простейших процессов осесимметричной деформации (осадка, сдвиг, обжим и раздача, центральная зона деформации при обратном выдавливании, кольцевые зоны с разной осевой деформацией) соответствуют кинематически возможным полям скоростей, удовлетворяют граничным условиям, а также условиям постоянства объёма в дифференциальной и интегральной (по равенству потоков вектора скорости на границах очага деформации) формах. На частных примерах показана возможность их суперпозиции для исследования реальных процессов с возможностью корректировки решений на основе визуального сравнения экспериментально наблюдаемых и рассчитанных траекторий частиц деформируемого материала с учётом особенностей очага деформации. Дифференцирование уравнений движения по времени и переменным Лагранжа позволяет определять любые локальные и среднеинтегральные характеристики деформированного состояния, мощность и усилия деформации с учётом упрочнения материала.

***Анотація.*** *Запропоновані рівняння руху у формі Лагранжа для процесів опади, зрушення, роздачі, зворотнього витискування в умовах осесиметричної деформації, отримані інтеграцією кінематично можливих полів швидкостей у формі Ейлера. Принцип суперпозиції рухів дозволяє використати їх для аналізу складніших процесів деформації. Візуальне порівняння спостережуваних траєкторій переміщення вузлів координатної сітки, що розраховуються, допускає коригування рішень для підвищення точності визначення енерго-силових параметрів процесу з урахуванням локальних і середньоінтегрованих характеристик деформівного стану.*
*<u>Ключові слова:</u> Рівняння руху у формі Лагранжа, принцип суперпозиції, інваріанти, потужність і зусилля деформації*

***Abstract.*** *The equations of motion in the Lagrange form for the processes of precipitation, the sheardistribution, backward extrusion in axisymmetric strain, obtained by integrating the kinematically possible velocity fields in the form of Euler. The principle of superposition of motions you can use them to analyze more complex deformation processes. A visual comparison of observed and calculated trajectories of moving nodes of the grid allows for adjustments in solutions to improve the accuracy of energy-power parameters of the process, taking into account the local and mean integral characteristics of the strain state.*
*<u>Keywords:</u> The equations of motion in Lagrangian form, the superposition principle, invariants, power and force of deformation.*

1. *Теория* ковки и штамповки: Учеб. пособие // Е.П. Унксов, У. Джонсон, В.Л. Колмогоров и др. – М.: Машиностроение, 1992. – 720 с., ил.
2. *Колмогоров В.Л.* Механика обработки металлов давлением. - М.: Металлургия, 1986, 688 с.
3. *Алюшин Ю.А.* Механика твердого тела в переменных Лагранжа. М.: Машиностроение, 2012. – 192 с., ил.
4. *Алюшин Ю.А.* Механика процессов деформации в пространстве переменных Лагранжа: учеб. пособие для вузов / Алюшин *Ю.А.* : – М.: Машиностроение, 1997. 136 с.
5. *Алюшин Ю.А.* Принцип суперпозиции движений в пространстве переменных Лагранжа. // Проблемы машиностроения и надёжности машин. 2001. №3. С. 13-19.
6. *Алюшин Ю.А.*, Жигулёв Г.П., Широких А.М. Методы определения траекторий частиц в процессах деформации. Обработка материалов давлением. Краматорск – 2012. - №1 (26).стр. 9-16
7. *Алюшин Ю.А.*, Гончарук А.В., Жигулев Г.П., Фартушный Р.Н. Кинематически возможные поля скоростей при поперечно – винтовой прокатке // Обработка материалов давлением. – 2008. – №1 (18). г. Краматорск, с. 4-10.
8. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. - М.: Наука, 1969, 424с.

**REFERENCES**

1. *Teorija* kovki i shtampovki: Ucheb. Posobie. E.P. Unksov, U. Dzhonson, V.L. Kolmogorov i dr. Moscow: Mashinostroenie, 1992. 720 p., il.
2. *Kolmogorov V.L.* Mehanika obrabotki metallov davleniem. Moscow: Metallurgija, 1986, 688 p.
3. *Aljushin Ju.A.* Mehanika tverdogo tela v peremennyh Lagranzha. Moscow: Mashinostroenie, 2012. 192 p., il.
4. *Aljushin Ju.A.* Mehanika processov deformacii v prostranstve peremennyh Lagranzha: ucheb. posobie dlja vuzov. Aljushin Ju.A. Moscow: Mashinostroenie, 1997. 136 p.
5. *Aljushin Ju.A.* Princip superpozicii dvizhenij v prostranstve peremennyh Lagranzha. Problemy mashinostroenija i nadjozhnosti mashin. 2001. No 3. P. 13-19.
6. *Aljushin Ju.A.*, Zhiguljov G.P., Shirokih A.M. Metody opredelenija traektorij chastic v processah deformacii. Obrabotka materialov davleniem. Kramatorsk. 2012. No 1 (26).p. 9-16
7. *Aljushin Ju.A.*, Goncharuk A.V., Zhigulev G.P., Fartushnyj R.N. Kinematicheski vozmozhnye polja skorostej pri poperechno – vintovoj prokatke. Obrabotka materialov davleniem. 2008. No 1 (18). Kramatorsk, p. 4-10.
8. *Jelsgolc L.Je*. Differencial'nye uravnenija i variacionnoe ischislenie. Moscow: Nauka, 1969, 424p.