

В.И.Дворников(д-р техн. наук, проф.),
В.П. Кондрахин (д-р техн. наук, проф.),
С.В. Велебник (студент)

ГВУЗ «Донецкий национальный технический университет»

СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ И ФОРМЫ КОЛЕБАНИЙ ОДНОКОНЦЕВОЙ ПОДЪЕМНОЙ МАШИНЫ

В статье разработана математическая модель процесса подъем груза на некоторую высоту с помощью одноконцевой подъемной машины. Определены собственные частоты, а также компоненты собственных форм колебаний при различных положениях подъемного сосуда. Предложен метод перенормировки, позволяющий исключить ошибки в определении собственных форм в узловых точках.

Ключевые слова: подъемная машина, математическая модель, собственные частоты, формы, колебания, узловая точка.

Проблема и ее связь с научными и практическими задачами. Подъем груза на некоторую высоту осуществляется специальными установками, называемыми подъемными машинами или лебедками. К этому классу машин относятся шахтные подъемные машины, лифты и другое грузоподъемное оборудование, которые широко применяется в промышленности, строительстве и других отраслях экономики. В процессе подъема груза динамические свойства таких машин закономерно изменяются, что необходимо учитывать при их расчетах и при разработке систем управления. Построение математической модели одноконцевой подъемной машины позволяет изучить закономерности изменения частот и форм колебаний, необходимые для анализа рабочих процессов машины с целью повышения ее надежности и безопасности эксплуатации.

Анализ исследований и публикаций. Вопросы динамики подъемных машин уже долгое время находятся в центре внимания специалистов по динамике машин. В работе [1] изложены основы теории и динамики шахтного подъема, приведены технические характеристики и конструктивные особенности элементов подъемных установок, методика их выбора и расчета. В работе [2] рассмотрены эквивалентные схемы и механические характеристики машин и их приводов, а также изучены законы движения машин при различных механических характеристиках. Работа Флоринского Ф.В. [3], является основой фундаментальных

исследований в области прикладной математики, динамики машин и механизмов.

Однако некоторые вопросы математического моделирования подъемных машин, в частности определения собственных частот и форм колебаний в особых узловых точках, требуют дальнейших исследований.

Постановка задачи. Целью данного исследования является разработка математической модели одноконцевой подъемной установки и определение собственных частот и форм колебаний. Указанная цель может быть реализована решением следующих локальных задач: исследовать взаимные перемещения элементов установки при подъеме груза, проанализировать расчетную схему установки с последующим выводом уравнений движения, разработать методику численного определения значений собственных частот и форм колебаний.

Изложение материала и результаты. Расчетная схема одноконцевой подъемной установки и приведена на рис. 1.

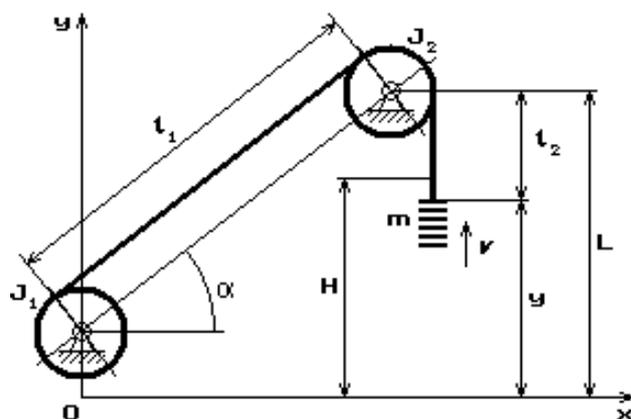


Рисунок 1.- Схема одноконцевой подъемной установки

Здесь обозначено: J_1 – массовый момент инерции барабана машины с приведенными к нему моментами инерции вращающихся частей редуктора и ротора электродвигателя; J_2 – массовый момент инерции направляющего (или копрового) шкива; l_1 – длина наклонной струны каната, считающейся постоянной во времени; l_2 – переменная длина отвесной части каната; α – угол наклона струны; m – масса конечного груза; V – скорость подъема груза; y – перемещение крюка подвески груза (прицепного устройства) по вертикали, отсчитываемое от некоторого исходного положения груза;

L – начальная длина отвеса каната в момент пуска двигателя (начало координат, точка O на рис. 1, может быть произвольной, но в зависимости от схемы подъема эта точка является вполне определенной, совпадающей с начальным положением груза); H – высота подъема.

Пусть ϕ_{σ} и ϕ_{ω} – углы поворота барабана и шкива, отсчитываемые против хода часовой стрелки от некоторого исходного состояния. Предполагается также, что груз перемещается только в вертикальном направлении вдоль оси y и не имеет боковых смещений (это может быть при наличии специальных жестких проводников, вдоль которых перемещается груз). В таком случае алгебраические разности

$$\Delta l_1 = R_{\omega}\phi_{\omega} - R_{\sigma}\phi_{\sigma}, \quad \Delta l_2 = y - R_{\omega}\phi_{\omega} \quad (1)$$

являются величинами упругих удлинений струны и отвеса каната. Здесь R_{σ}, R_{ω} – радиусы соответственно барабана и шкива.

Соотношения (1) дают возможность записать потенциальную энергию системы, «порождаемую» силами упругой деформации каната, в следующем виде

$$U_{\text{упр}} = C_{\text{стр}} (\Delta l_1)^2 / 2 + C_{\text{отв}} (\Delta l_2)^2 / 2, \quad (2)$$

где $C_{\text{стр}}$ и $C_{\text{отв}}$ – коэффициенты жесткости соответственно струны и отвеса, определяемые следующим образом:

$$C_{\text{стр}} = E\bar{a}d_k^2 / l_1, \quad C_{\text{отв}} = E\bar{a}d_k^2 / l_2, \quad (3)$$

где E – модуль упругости стали проволоки ($E = 2,06 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$); \bar{a} – безразмерный параметр, зависящий от конструкции каната (для канатов двойной свивки ГОСТ 7668-80 – $\bar{a} \approx 0,315$); d_k – диаметр каната, м. Заметим, что в (3) в соответствии с рис. 1 $l_2 = l_{02} - y$, но, строго говоря, $C_{\text{отв}}$ по своему физическому смыслу зависит не от координаты y , а от её «среднего значения» $\bar{y}(t)$, определяемого как средняя интегральная величина по времени t при перемещении груза. Поэтому в дальнейшем переменную $C_{\text{отв}}$ в (3) необходимо рассматривать как параметрическую функцию от t , а не как функцию от y , подразумевая при этом, что в (3)

$$l_2 = L - \bar{y}(t). \quad (4)$$

В связи с этим массы струны и отвеса определим по формулам (см. рис. 1):

$$m_{cmp} = \gamma l_1, \quad m_{омв} = \gamma l_2, \quad (5)$$

причем здесь γ – масса единицы длины каната, определяемая как $\gamma = \bar{\gamma} \gamma_{cm} d_k^2$, где $\bar{\gamma}$ – безразмерный параметр, зависящий от конструкции каната (например, для канатов ГОСТ 7668-80 – $\bar{\gamma} = 0,491$); γ_{cm} – плотность стали, из которой изготовлена проволока (обычно считается, что $\gamma_{cm} = 7800 \text{ кг} / \text{м}^3$).

Из всех сосредоточенных масс только концевая масса изменяет свою потенциальную энергию, «порождаемую» гравитационными силами. Изменяется также и потенциальная энергия отрезков струны и отвеса каната. Для ее записи будем считать, что текущие координаты центров инерции струны и отвеса определяются с точностью до несущественных для функции Лагранжа слагаемых как среднеарифметические величины перемещений концов этих отрезков и располагаются в окрестности их середин:

$$s_{cmp} = (R_{uu} \varphi_{uu} + R_{\sigma} \varphi_{\sigma}) / 2, \quad s_{омв} = (y + R_{uu} \varphi_{uu}) / 2. \quad (6)$$

Разумеется, в действительности точки каната перемещаются по более сложному закону, и для описания таких перемещений требуется привлечение специальных методов математической физики. Однако с достаточной для инженерных целей точностью, в качестве первого приближения, вполне можно ограничиться представлением (6).

Итак, гравитационная часть потенциальной энергии с учетом (6) и того факта, что струна, наклоненная к горизонту под углом α (см. рис.1), при подъеме груза опускается, а отвес поднимается, запишется как

$$U_{зрав} = mg y - \frac{\gamma l_1 g}{2} (R_{uu} \varphi_{uu} + R_{\sigma} \varphi_{\sigma}) \sin \alpha + \frac{\gamma l_2 g}{2} (y + R_{uu} \varphi_{uu}), \quad (7)$$

где g – ускорение свободного падения.

Общая потенциальная энергия системы есть $U = U_{унр} + U_{зрав}$, и подстановка сюда соотношений (2) и (7) с определениями (3) и (4) приводит к следующему окончательному выражению:

$$U = C_{cmp} (R_{uu} \varphi_{uu} - R_{\sigma} \varphi_{\sigma})^2 / 2 + C_{омв} (y - R_{uu} \varphi_{uu})^2 / 2 + (m + \gamma l_2 / 2) g y + \gamma g R_{uu} \varphi_{uu} (l_2 - l_1 \sin \alpha) / 2 - \gamma l_1 g R_{\sigma} \varphi_{\sigma} (\sin \alpha) / 2. \quad (8)$$

Далее определим кинетическую энергию рассматриваемой системы, которая представляет собой сумму кинетических энергий двух вращающихся масс (барабана и шкива) и линейно перемещающихся масс концевого груза и каната.

Массу части каната, навиваемой на барабан машины, присоединим к его вращающейся массе, то есть в таком случае фактический момент инерции барабана будет переменным и равным $J'_1 = J_1 + \gamma R_0^3 \varphi_0$. В соответствии с этим выражением момент инерции J'_1 формально является функцией от переменной φ_0 . Однако практически J'_1 зависит, по аналогии с определением $C_{отв}$ в (3), не от координаты φ_0 , а от его «среднего значения» $\bar{\varphi}_0$, определяемого как средняя интегральная величина по времени t при вращении барабана. Поэтому в дальнейшем переменную J'_1 необходимо рассматривать как параметрическую функцию от времени t , а не как функцию от φ_0 , то есть следует записать

$$J'_1(t) = J_1 + \gamma R_0^3 \bar{\varphi}_0(t). \quad (9)$$

Кинетическая энергия трех рассматриваемых сосредоточенных масс представляется в традиционной форме. Более сложным образом записывается кинетическая энергия струны и отвеса каната. Прежде всего, условимся считать данные элементы упругими стержнями, концы которых каким-то образом перемещаются, и в то же время эти массивные элементы представляются сосредоточенными в их центрах тяжести массами. Вполне достоверным предположением является то, что скорости граничных точек струны и отвеса равны, соответственно, $R_0 \dot{\varphi}_0$, $R_{ин} \dot{\varphi}_{ин}$ и $R_{ин} \dot{\varphi}_{ин}$, \dot{y} , и тогда скорости центров инерции будут

$$V_{стр} = (R_0 \dot{\varphi}_0 + R_{ин} \dot{\varphi}_{ин}) / 2, \quad V_{отв} = (R_{ин} \dot{\varphi}_{ин} + \dot{y}) / 2. \quad (10)$$

Данные соотношения отражают принятую гипотезу о среднеарифметической величине продольной скорости центров инерции рассматриваемых отрезков каната. Тогда с учетом представлений (10) определим кинетическую энергию всей системы в целом как

$$T = J'_1 \dot{\varphi}_0^2 / 2 + J_2 \dot{\varphi}_{ин}^2 / 2 + m \dot{y}^2 / 2 + \gamma l_1 (R_0 \dot{\varphi}_0 + R_{ин} \dot{\varphi}_{ин})^2 / 8 + \gamma l_2 (R_{ин} \dot{\varphi}_{ин} + \dot{y})^2 / 8. \quad (11)$$

В силу того обстоятельства, что потенциальная энергия (8) зависит только от перемещений, а кинетическая энергия (11) – только от скоростей, в записи функции Лагранжа нет необходимости, так как в этом случае проще воспользоваться уравнениями Лагранжа, в которых определим в качестве обобщенных координат элементов

рассматриваемой установки переменные $q_1 = \varphi_{\bar{\sigma}}, q_2 = \varphi_{uu}, q_3 = y$ и соответственно обобщенных скоростей – $\dot{q}_1 = \dot{\varphi}_{\bar{\sigma}}, \dot{q}_2 = \dot{\varphi}_{uu}, \dot{q}_3 = \dot{y}$.

Обобщенные непотенциальные силы Q_1, Q_2, Q_3 для рассматриваемой системы примем следующими: $Q_1 = M_{\bar{\sigma}\sigma}(t), Q_2 = 0, Q_3 = 0$, где $M_{\bar{\sigma}\sigma}(t)$ – приведенный к оси барабана момент, развиваемый двигателем, и эту переменную будем считать известной функцией от времени t .

Обобщенные силы Q_2, Q_3 приняты равными нулю, так как силы сопротивления воздушной среды, трения в подшипниковых узлах и в направляющих устройствах и др. здесь не учитываются.

Произведя необходимые вычисления производных от функции (8) и (11) в соответствии с формой записи уравнений Лагранжа, в итоге получим искомые уравнения движения:

$$\left. \begin{aligned} & \left(J_1' + \frac{\gamma l_1}{4} R_{\bar{\sigma}}^2 \right) \ddot{\varphi}_{\bar{\sigma}} + \frac{\gamma l_1}{4} R_{\bar{\sigma}} R_{uu} \ddot{\varphi}_{uu} - C_{\text{смп}} R_{\bar{\sigma}} (R_{uu} \varphi_{uu} - R_{\bar{\sigma}} \varphi_{\bar{\sigma}}) = M_{\bar{\sigma}\sigma} + \frac{\gamma l_1 g}{2} R_{\bar{\sigma}} \sin \alpha, \\ & \left[J_2 + \left(\frac{\gamma l_1}{4} + \frac{\gamma l_2}{4} \right) R_{uu}^2 \right] \ddot{\varphi}_{uu} + \frac{\gamma l_1}{4} R_{uu} R_{\bar{\sigma}} \ddot{\varphi}_{\bar{\sigma}} + \frac{\gamma l_2}{4} R_{uu} \ddot{y} + \\ & + C_{\text{смп}} R_{uu} (R_{uu} \varphi_{uu} - R_{\bar{\sigma}} \varphi_{\bar{\sigma}}) - C_{\text{омв}} R_{uu} (y - R_{uu} \varphi_{uu}) = -\gamma g R_{uu} (l_2 - l_1 \sin \alpha) / 2, \\ & \left(m + \frac{\gamma l_2}{4} \right) \ddot{y} + \frac{\gamma l_2}{4} R_{uu} \ddot{\varphi}_{uu} + C_{\text{омв}} (y - R_{uu} \varphi_{uu}) = -(m + \gamma l_2 / 2) g, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

причем здесь l_2 и J_1' в силу их определений (4) и (9) считаются *медленноизменяющимися* функциями от времени, вследствие чего допустимо пренебречь их первыми производными по t .

Понятие «медленного изменения» в механике часто используется, и оно основано на представлении о том, что в рассматриваемом случае функции l_2 и $J_1'(t)$ *несущественно* изменяются на любом интервале времени, равном периоду основного тона колебаний, то есть колебаний с наименьшей частотой.

Заметим, что в системе (12) параметр $C_{\text{омв}}$ в силу определения (3) также зависит от времени, и эта зависимость тоже имеет характер «медленного» изменения.

Концепция медленно изменяющихся функций позволяет рассматривать систему уравнений (12) как систему с якобы *постоянными*, так сказать «замороженными» коэффициентами, а затем в полученных решениях уже учесть их фактическую «медленную» зависимость от времени.

Представим систему (12) в матричной форме с учетом диссипативных рэлеевских сил:

$$M\ddot{X} + B\dot{X} + CX = Q, \quad (13)$$

где для квадратных симметрических матриц M , B , C и для матриц-столбцов искомым перемещений X и внешних сил Q введены обозначения:

$$\left. \begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} J_1' / R_0^2 + \gamma l_1 / 4 & \gamma l_1 / 4 & 0 \\ \gamma l_1 / 4 & J_2 / R_{uu}^2 + \gamma(l_1 + l_2) / 4 & \gamma l_2 / 4 \\ 0 & \gamma l_2 / 4 & m + \gamma l_2 / 4 \end{pmatrix}, \\ C &= \begin{pmatrix} C_{cnp} & -C_{cnp} & 0 \\ -C_{cnp} & C_{cnp} + C_{омв} & -C_{омв} \\ 0 & -C_{омв} & C_{омв} \end{pmatrix}, \quad B = 2\delta C, \\ X &= \begin{pmatrix} R_0 \varphi_0 \\ R_{uu} \varphi_{uu} \\ y \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} M_{0в} / R_0 + \gamma l_1 g (\sin \alpha) / 2 \\ -\gamma g (l_2 - l_1 \sin \alpha) / 2 \\ -(m + \gamma l_2 / 2) g \end{pmatrix}, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

причем матрица коэффициентов диссипации энергии B в рамках гипотезы внутреннего трения предполагается подобной матрице коэффициентов жесткости C . Параметр δ в данном случае играет роль обобщенного коэффициента затухания.

Решение матричного уравнения (13) начнем с определения собственных чисел ω рассматриваемой системы, определяемые как корни характеристического (или частотного) уравнения:

$$\det(C - \omega^2 M) = 0, \quad (15)$$

которое соответствует записи

$$\begin{vmatrix} C_{cnp} - \omega^2 \left(\frac{\gamma l_1}{4} + \frac{J_1'}{R_0^2} \right) & -C_{cnp} - \omega^2 \frac{\gamma l_1}{4} & 0 \\ -C_{cnp} - \omega^2 \frac{\gamma l_1}{4} & C_{cnp} + C_{омв} - \omega^2 \left[\frac{\gamma(l_1 + l_2)}{4} + \frac{J_2}{R_{uu}^2} \right] & -C_{омв} - \omega^2 \frac{\gamma l_2}{4} \\ 0 & -C_{омв} - \omega^2 \frac{\gamma l_2}{4} & C_{омв} - \omega^2 \left(m + \frac{\gamma l_2}{4} \right) \end{vmatrix} = 0. \quad (16)$$

В раскрытом виде (16) представляет собой алгебраическое уравнение третьей степени относительно чисел ω^2 . В частном случае, когда массой каната можно пренебречь по сравнению с массой концевого груза, то есть принять $\gamma = 0$, из (16) получим

$$\omega^6 - \omega^4 \left(\frac{C_{cmp}}{m_1} + \frac{C_{cmp} + C_{омв}}{m_2} + \frac{C_{омв}}{m_3} \right) + \omega^2 C_{cmp} C_{омв} \left(\frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 m_2 m_3} \right) = 0, \quad (17)$$

где для сокращения записи и для симметрии обозначено: $m_1 = J_1 / R_0^2$, $m_2 = J_2 / R_u^2$, $m_3 = m$.

Здесь уравнение (17) приведено для того, чтобы проиллюстрировать то важное обстоятельство, что уравнение (16), как и (17), не содержит свободного члена, следовательно, характеристическое уравнение (15) имеет один из корней $\omega_0^2 = 0$, а два других находятся как решения квадратного уравнения.

Наличие в спектре собственных частот нулевого корня объясняется специальной структурой матрицы C в (14), для которой $\det C \equiv 0$. А так как свободный член в степенном алгебраическом уравнении типа (16) равен $\det C$, то появление $\omega_0^2 = 0$ и возможность *редуцирования*, то есть уменьшение степени характеристического уравнения, становится очевидной.

Каждому собственному числу ω_j^2 ($j = 0, 1, 2$) приводится в соответствие *собственная форма* в виде матрицы-столбца (матрицы-строки):

$$\Phi_j = \begin{pmatrix} \Phi_{j1} \\ \Phi_{j2} \\ \Phi_{j3} \end{pmatrix}, \quad \Phi_j^* = (\Phi_{j1} \quad \Phi_{j2} \quad \Phi_{j3}) \quad (j = 0, 1, 2), \quad (18)$$

удовлетворяющая системе однородных линейных алгебраических уравнений

$$(C - \omega_j^2 M) \Phi_j = 0 \quad (j = 0, 1, 2), \quad (19)$$

которые в силу (15) имеют заведомо нетривиальные решения (тождественно не равные нулю). Один из способов построения таких решений системы (19) состоит в том, что для каждого конкретного ω_j^2 элементы формы Φ_j , то есть числа $\Phi_{j1}, \Phi_{j2}, \Phi_{j3}$ в (18), определяются с точностью до произвольного множителя как алгебраические дополнения к элементам, например, второй строки в определителе, составленном из элементов матрицы $C - \omega_j^2 M$, то есть в определителе (16). Эти числа представляют собой *формы колебаний* соответственно барабана машины, копрового шкива и концевого груза. Несложные выкладки приводят для рассматриваемого случая к следующему результату:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{j1} &= c[C_{cmp} + \omega^2 \gamma l_1 / 4][C_{омв} - \omega^2 (m + \gamma l_2 / 4)], \\ \Phi_{j2} &= c[C_{cmp} - \omega^2 (\gamma l_1 / 4 + J_1' / R_б^2)][C_{омв} - \omega^2 (m + \gamma l_2 / 4)], \\ \Phi_{j3} &= c[C_{cmp} - \omega^2 (\gamma l_1 / 4 + J_1' / R_б^2)][C_{омв} + \omega^2 \gamma l_2 / 4], \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

где для удобства вычислений (напомним, что собственные формы определяются с точностью до произвольного множителя) введен масштабный коэффициент $c = (C_{cmp} C_{омв})^{-1}$. В частности, для нулевого собственного числа, то есть при $j=0$, из формул (20) находим:

$$\Phi_{01} = \Phi_{02} = \Phi_{03} = 1. \quad (21)$$

Эти соотношения свидетельствуют о том, что при нулевом собственном числе перемещения массы барабана машины, копрового шкива и концевого груза одинаковы, и это обстоятельство играет принципиальную роль для раскрытия особенностей движения рассматриваемой механической системы.

На рис. 2 показано, как изменяются собственные частоты колебаний ω_1 и ω_2 (соответственно кривые 1 и 2 на рис. 2, а), вычисленные из уравнения (16) в зависимости от параметра $\xi = l_2 / H \in [0, 1]$, где H – высота подъема груза, то есть $H = \max(y)$ (см. рис. 1). Здесь же приведены зависимости компонент собственных форм колебаний (20) от параметра ξ (на рис. 2, б, кривые 11, 12, 13 соответствуют частоте ω_1 , а кривые 21, 22, 23 – частоте ω_2). Построения выполнены при следующих исходных данных, типичных для реально существующих систем подобного типа:

- диаметр каната ГОСТ 7668-80 – $d_k = 46,5$ мм,
- радиусы барабана машины и копрового шкива – $R_б = 2$ м,
- $R_u = 2$ м,
- длина струны каната – $l_1 = 30$ м,
- высота подъема – $H = 625$ м,
- наибольшая длина отвеса каната – $l_{02} = 700$ м,
- угол наклона струны – $\alpha = \pi / 6$,
- момент инерции барабана машины – $J_1 = 625000$ кгм²,
- момент инерции копрового шкива – $J_2 = 30000$ кгм²,
- концевая масса груженого сосуда – $m = 10000$ кг,
- погонная (линейная) масса каната – $\gamma = 8,4$ кг / м.

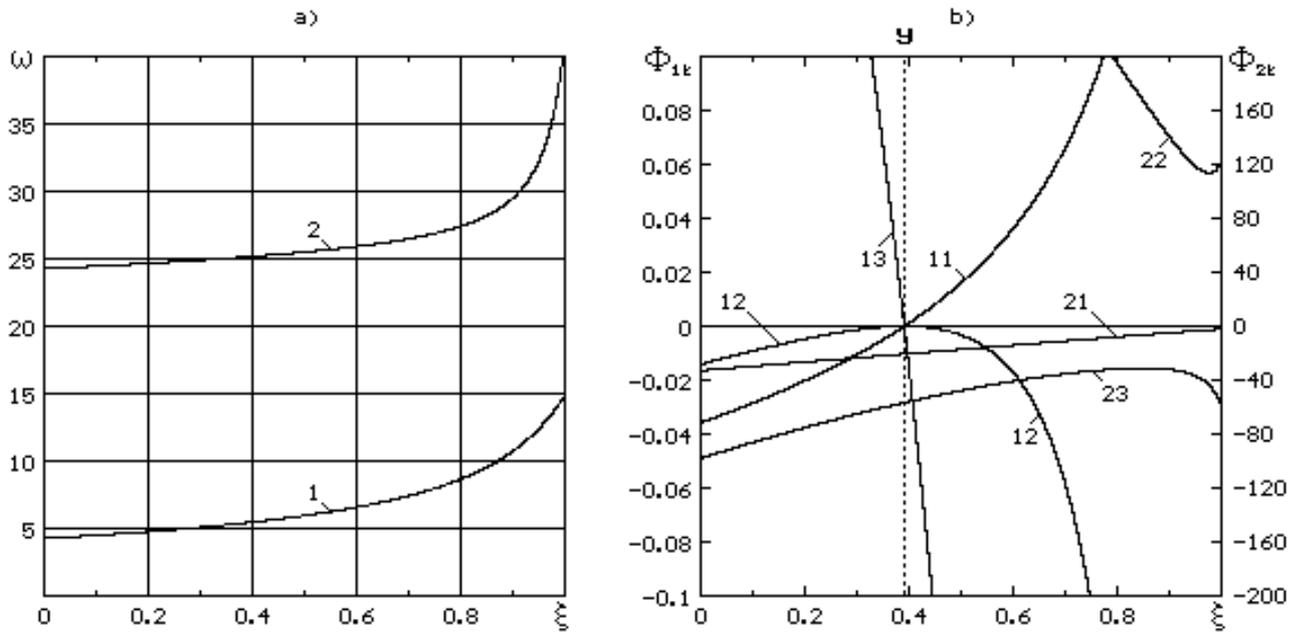


Рисунок 2. - Собственные частоты (а) и компоненты собственных форм колебаний (b)

Из рис. 2, б, видно, что при некотором $\xi = \xi^{y_{3l}}$, в точке У на рисунке, все три компоненты собственной формы Φ_1 , которые соответствуют частоте ω_1 , обращаются в ноль. Эту точку назовем *узловой*. Компоненты форм Φ_0 и Φ_2 узлов не имеют.

Как видно из определений (20), выполнение условия $\Phi_1 = 0$ может быть в том и только в том случае, когда

$$C_{отв} - \omega^2(m + \gamma l_2 / 4) = 0, \quad C_{стр} - \omega^2(\gamma l_1 / 4 + J_1' / R_0^2) = 0.$$

Требование совместности этих уравнений, с учетом соотношений (3), приводит к выражению (см. рис. 1):

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m + \gamma l_2 / 4}{J_1' / R_0^2 + \gamma l_1 / 4}.$$

Если здесь воспользоваться формулами (4) и (9), то длина отвеса каната l_2 , соответствующая узловому состоянию, определится (при $l_1 = const$) как

$$l_2^{y_{3l}} = \left[-m - \gamma l_1 + \sqrt{(m + \gamma l_1)^2 + \gamma l_1(\gamma l_1 / 4 + J_1' / R_0^2 + \gamma L)} \right] 2 / \gamma,$$

с помощью чего находим $\xi^{y_{3l}} = l_2^{y_{3l}} / H$.

Существование узла обуславливает особое состояние рассматриваемой системы в узловой точке, так как при этом ей соответствующий нормировочный коэффициент N_1 становится

равным нулю. Действительно, соотношения ортогональности собственных форм представим как

$$\Phi_i^* M \Phi_j = N_j^2 \delta_{ij}, \quad \Phi_i^* C \Phi_j = \omega_j^2 N_j^2 \delta_{ij}, \quad \Phi_i^* B \Phi_j = 2\delta \omega_j^2 N_j^2 \delta_{ij}, \quad (22)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера. Число N_j^2 можно определяется из первого из соотношений (22), полагая там $i = j$, что приводит к трем скалярным выражениям (соответственно для трех собственных чисел ω_j^2 , в том числе и для нулевого $\omega_j^2 = 0$): $N_j^2 = \Phi_j^* M \Phi_j$ ($j = 0, 1, 2$).

С использованием выражения для матрицы M из (14) и соотношений (20) для форм колебаний, вычисление нормировочных коэффициентов сводится к чисто механической процедуре:

$$N_j^2 = \Phi_{j1}^2 J_1' / R_0^2 + \Phi_{j2}^2 J_2 / R_u^2 + \Phi_{j3}^2 m + (\Phi_{j1} + \Phi_{j2})^2 \gamma l_1 / 4 + (\Phi_{j2} + \Phi_{j3})^2 \gamma l_2 / 4. \quad (23)$$

В частности, при $j = 0$ ($\omega_j = 0$) в силу (21) имеем

$$N_0^2 = m_\Sigma = J_1' / R_0^2 + J_2 / R_u^2 + m + \gamma(l_1 + l_2),$$

где символом $m_\Sigma = const$ обозначена суммарная масса подъемной установки.

Именно из (23) следует, что в узловой точке, в которой при конкретном значении j имеют место равенства $\Phi_{j1} = \Phi_{j2} = \Phi_{j3} = 0$, нормировочный коэффициент $N_j = 0$. Это обстоятельство имеет принципиальное значение для реализации численного процесса при определении динамических переменных и силовых факторов в рамках гипотезы медленного изменения длин отвесов канатов [см. пояснения к системе уравнений (12)].

Действительно, если обращение в ноль N_j^2 при каком-либо текущем положении концевого груза в узловом состоянии неизбежно, то, начиная с узла, интегрирование уравнений движения приведет к неверным результатам, если не предпринять специальных вычислительных мер (не говоря даже о том, что при точном узловом состоянии интегрирование принципиально невозможно).

Вызвано это тем, что если компоненты всех собственных форм нормировать по очевидному правилу

$$\tilde{\Phi}_{jk} = \sqrt{m_\Sigma} \Phi_{jk} / N_j \quad (24)$$

[здесь введен множитель $\sqrt{m_\Sigma}$ из соображений размерности, при этом и для нормированных форм будут выполняться, например, равенства типа (21)], то при $j = 1$ отдельные компоненты в узловой точке, оказывается, терпят разрыв первого рода, о чем свидетельствуют кривые 11 и 13 на рис. 3, а.

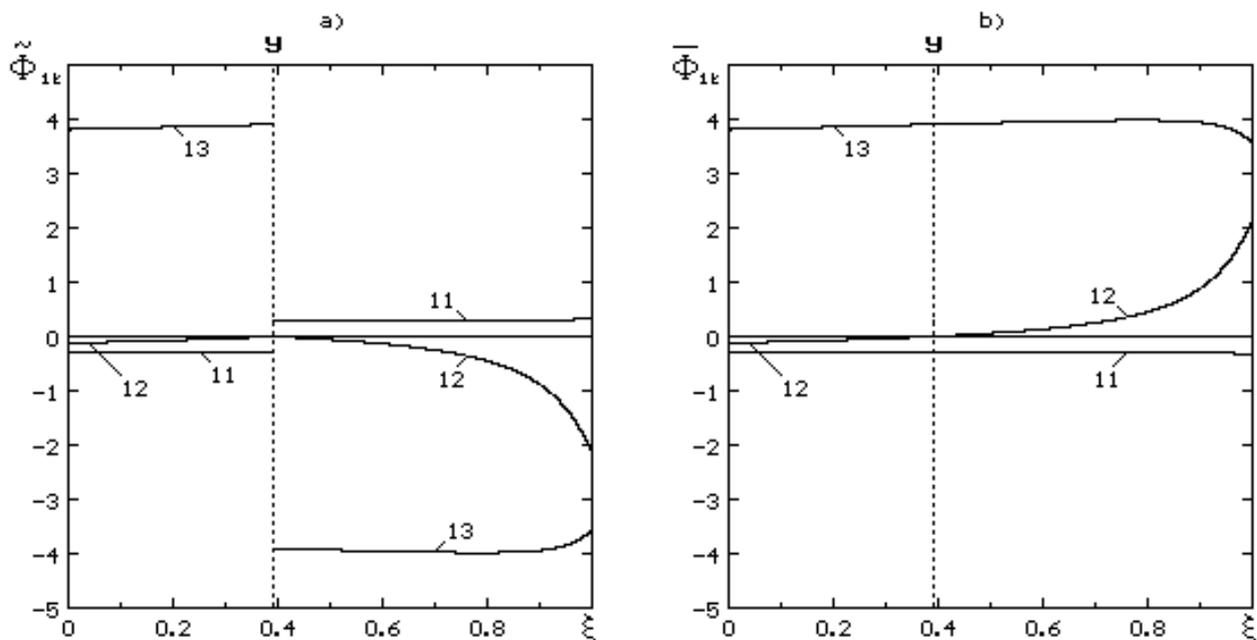


Рис. 3. Нормированные (а) и перенормированные (б) собственные формы

Как раз эта особенность при численном решении и приводит к абсурдным результатам, о чем было сказано выше. Для устранения этих недоразумений предлагается так называемая *перенормировка* собственных форм, суть которой сводится к тому, что *норма* N_j вектора Φ_j при переходе через узел изменяет знак. Следовательно, компоненты перенормированных собственных форм определяются как

$$\bar{\Phi}_{jk} = \sqrt{m_\Sigma} \Phi_{jk} \operatorname{sgn}(\Phi_{jk}) / N_j. \quad (25)$$

где индекс j идентифицирует какую-либо одну из компонент Φ_{jk} , изменяющую знак в узловой точке. Для форм, не имеющих узла, имеют место тождества $\bar{\Phi}_{jk} = \tilde{\Phi}_{jk}$ [см. (24)]. Разумеется, норма вектора (как его длина) геометрически не может быть отрицательной, но в данном случае такая операция диктуется физическими соображениями непрерывности собственных форм.

Перенормированные по правилу (25) формы $\bar{\Phi}_{1k}$ изображены на рис. 3, б, откуда видно, что все компоненты формы $\bar{\Phi}_1$ ($\bar{\Phi}_{11}$, $\bar{\Phi}_{12}$, $\bar{\Phi}_{13}$) непрерывны и нигде одновременно не обращаются в ноль, чем устраняются появления не раскрываемых неопределенностей типа $0/0$.

Выводы и направления дальнейших исследований. При математическом моделировании рабочих процессов и определении

собственных частот и форм колебаний одноконцевой подъемной машины могут возникать вычислительные проблемы, связанные с тем, что при некоторых значениях высоты подъема все три компоненты собственной формы, соответствующей одной из собственных частот, обращаются в ноль. В этой узловой точке отдельные компоненты собственных форм терпят разрыв первого рода. Для устранения вычислительных трудностей предлагается так называемая *перенормировка* собственных форм, суть которой сводится изменению знака *нормы* при переходе через узел.

Предложенная математическая модель и методика численного определения значений собственных частот и форм колебаний может быть использована для моделирования рабочих процессов подъемных машин, лифтов, грузоподъемных лебедок с использованием концепции «медленного изменения» параметров системы.

Список литературы.

1. Шахтный подъем: Научно-техническое издание / Бежок В.Р., Дворников В.И., Манец И.Г., Пристром В.А.; общ.ред. Б.А. Грядущий, В.А. Корсун. – Донецк : ООО «Юго-восток, Лтд», 2007. – 624с., 494ил., 233библиогр. ISBN 978-966-374-221-2.
2. А.Г. Степанов ДИНАМИКА МАШИН. – Екатеринбург: УрО РАН, 1999. ISBN 5-7691-0877-8.
3. Флоринский Ф.В. Динамика шахтного подъемного каната. Под ред. Савина Г.Н. М.: Углетехиздат, 1958 г. 239 с.

Стаття надійшла до редколегії 21.05.2014

В.И. Дворніков (д-р техн. наук, проф.), В.П. Кондрахін (д-р техн. наук, проф.), С.В. Велебнік. ДВНЗ «Донецький національний технічний університет»

Власні частоти і форми коливань однокінцевої підйомної машини

У статті розроблена математична модель процесу підйому вантажу на деяку висоту за допомогою однокінцевої підйомної машини. Визначені власні частоти, а також компоненти власних форм коливань при різних положеннях підйомної посудини. Запропонований метод перенормування, що дозволяє виключити помилки визначенні власних форм у вузлових точках.

Ключові слова: математична модель, частоти, підйомна машина, рівняння руху, маса, коливання, енергія системи, рушійний момент, коефіцієнти жорсткості.

V. I. Dvornikov (Dr. Sci., Prof.), V. P. Kondrakhin (Dr. Sci., Prof.), S. V. Velebnik. SHEE "Donetsk National Technical University"

Natural frequencies and mode shapes of lifting machine with one end

In the article is developed a mathematical model of process of load lifting to a certain height using lifting machine with one end. Natural frequencies and natural modes of the components are identified at different positions of lifting vessel. Renormalization method, which allows to eliminate errors in the determination of the proper forms at the nodal points is also proposed. Obtained results can be used for workflows modeling of lifting machines, elevators, hoisting winches using the concept of "slow change of" system parameters.

In future, it is planned to calculate the rate fixing and renormalization of own forms and represent results on pictures. We will define slowly changing lengths of plumbs left and right branches of ropes, and also we will reflect basic kinematics and dynamic processes at getting up of load in the examined lifting machine.

Keywords: mathematical model, frequencies, lift, equations of motion, weight, wavering, energy of system, driving torque, stiffness coefficients.

© Дворніков В.И., Кондрахін В.П., Велебнік С.В., 2014