УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ХААРА

Иванов В.Г.

Национальная юридическая академия Украины им. Ярослава Мудрого

Современные высокоэффективные алгоритмы сжатия данных базируются в основном на методах вейвлет-преобразований, основу которых составляет классический ортогональный базис Хаара [1,2,3]. Поэтому развитие теории и практики анализа и синтеза сигналов в обобщенной системе кусочно-постоянных функций базиса Хаара является весьма актуальным.

Автором предложены эффективные методы анализа и синтеза сигналов в дискретном базисе Хаара, позволяющие существенно снизить число вычислительных операций для прямых и обратных преобразований [4]. Однако число входных отсчетов сигнала при этом должно быть кратно целой степени числа два, что снижает функциональные возможности таких преобразований. В [5] получены формулы, позволяющие осуществлять быстрое прямое дискретное преобразование Хаара, не накладывая ограничений на число входных отсчетов сигнала, которое может быть как составным, так и простым числом.

Покажем, что эти ограничения также могут быть сняты для формул быстрого обратного преобразования.

Синтез сигналов в системе дискретных базисных функций Хаара заключается в вычислении *i*-го отсчета функции в дискретной точке по выражению:

$$P_i(x) = C_0 + \sum_{m=1}^{\log N} \sum_{j=1}^{2^{m-1}} c_{mj}\chi_{mj}(x), \qquad (1)$$

где C_{mj} - коэффициенты; X_{mj} – функции, а N – размерность базиса Хаара.
Используя равенство $k=2^{m-1}$, перейдем в выражении (1) от двойной нумерации коэффициентов и функций Хаара к простой и запишем систему уравнений для нахождения коэффициентов Хаара или дискретных значений сигнала при N равным четырем:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3\sqrt{2} = d_1 \\ C_1 - C_2 - C_4\sqrt{2} = d_3 \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 + C_2 - C_3\sqrt{2} = d_2 \\ C_1 - C_2 - C_4\sqrt{2} = d_4, \end{cases} \qquad (2)$$

где $d_1, \ldots, d_4$ – значения сигнала в дискретных точках;
$C_1, \ldots, C_4$ – коэффициенты Хаара.
При добавлении пятого отсчета сигнала d_5 первое уравнение системы (2) разбивается на два:
$C_1 + C_2 + C_3\sqrt{2} + 2C_5 = d_1$ и $C_1 + C_2 + C_3\sqrt{2} - 2C_5 = d_5$ (3)
Добавление шестого отсчета сигнала d_6 разбивает соответственно второе уравнение системы (2) на два:
$C_1 + C_2 - C_3\sqrt{2} + 2C_6 = d_2$ и $C_1 + C_2 - C_3\sqrt{2} - 2C_6 = d_6$
(4)

Таким образом, системы уравнений при N = 5 и при N = 6 будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} <C_1 + C_2 + C_3\sqrt{2} + 2C_5 = d_1 > M \\ \left(\begin{array}{ll} C_1 + C_2 - C_3\sqrt{2} & = d_2 \\ C_1 - C_2 - C_4\sqrt{2} & = d_3 \\ C_1 - C_2 - C_4\sqrt{2} & = d_4 \end{array}\right) Y \\ <C_1 + C_2 + C_3\sqrt{2} - 2C_5 = d_5 > M \end{cases} \qquad \begin{cases} \left\langle \begin{array}{l} C_1 + C_2 + C_3\sqrt{2} + 2C_5 = d_1 \\ C_1 + C_2 - C_3\sqrt{2} + 2C_6 = d_2 \end{array} \right\rangle M \\ \left(\begin{array}{ll} C_1 - C_2 - C_4\sqrt{2} & = d_3 \\ C_1 - C_2 - C_4\sqrt{2} & = d_4 \end{array}\right) Y \\ \left\langle \begin{array}{l} C_1 + C_2 + C_3\sqrt{2} - 2C_5 = d_5 \\ C_1 + C_2 - C_3\sqrt{2} - 2C_6 = d_6 \end{array} \right\rangle M \end{cases} \qquad (5)$$

Введем понятие первого базового вектора данных N_1^*, который определим по отношению к числу исходных входных отсчетов сигнала N как

$$N_1^* = 2^n \qquad (6)$$

где n = 1, 2, . . . ($2^n < N$), причем n должно давать min Ц ($\frac{N}{2^n}$);

Ц (•) – означает целую часть выражения, стоящего в скобках.

Второй базовый вектор N_2^* равен удвоенному значению получен-ного N_1^*, т.е. $N_2^* = 2N_1^*$.

Анализ систем (5) показывает, что число уравнений, определяющих исходные отсчеты сигнала представляют собой две группы: M – считаются по формулам обратного преобразования для базового вектора N_2^* и Y, которые считаются по соответствующим формулам для базового вектора N_1^*.

Значения M и Y определим следующим выражением:

$$Y = N_2^* - N \quad \text{и} \quad M = N - Y \tag{7}$$

Изобразим в виде строк матрицы значения совпадающих восстановлен-ных отсчетов при добавлении пятого, шестого, седьмого и восьмого отсчета соответственно:

$$\begin{array}{ll} d_1\, d_2\, d_3\, d_4\, d_5\, d_6\, d_7\, d_8 & (N = 8) \\ d_1\, d_5\, d_2\, d_6\, d_5\, d_3\, d_7 & (N = 7) \\ d_1\, d_5\, d_2\, d_6 & (N = 6) \\ d_1\, d_5 & (N = 5)\,. \end{array} \tag{8}$$

То есть между элементами верхней строки этой матрицы и соответст-вующими элементами нижних строк стоит знак равенства. Перегруппируем элементы строк матрицы следующим образом:

для $N = 7$ $\quad d_1\, d_3\, d_5\, d_2\, d_4\, d_6\, d_7\, d_8$

$\qquad d_1\, d_2\, d_3\, d_5\, d_6\, d_7$

для $N = 6$ $\quad d_1\, d_3\, d_2\, d_4$ $\quad$ и для $N = 5$ $\quad d_1\, d_2$

$\qquad d_1\, d_2\, d_5\, d_6$ $\qquad d_1\, d_5$

Тогда можно записать формулу, по которой по N_2^* считаются отсчеты

$$P_j, \text{ где } j=1,2,.., k^*, k^*+Y+1, .., N, \text{ а } k^*=\frac{M}{2}. \tag{9}$$

Формула, по которой по N^*_1 считаются отсчеты P_j имеет вид:

$$P_j, \text{ где } j=(k^*+1),\ldots,(k^*+Y). \tag{10}$$

Для формул обратного преобразования Хаара, когда N кратно степени два, значение соответствующих индексов i вычисляется как:

$$\begin{array}{l} i=2j-1, \text{ где } j=1, 2,\ldots,k^* \\ \text{и } \; i=2j-N_2^*, \\ \text{когда } \; j=(k^*+Y+1), .., N. \end{array} \tag{11}$$

Таким образом формулы синтеза исходных отсчетв сигнала запишутся в виде:

$$P_i^j=A_{l+Q}+C_{k+Q}(-1)^{i+1}, \quad k=2^{(\log N-1)}+1\,, \tag{12}$$

а индексы i и j определяют соответствие значений отсчетов обычных преобразований (индекс i) и когда число входных отсчетов принимает любое значение (индекс j).

Выполним все необходимые предварительные вычисления для реализации быстрого алгоритма [4]. Для этого запишем промежуточные обобщенные суммы A_i в виде:

$$A_i=C_0+C_2(-1)^i\,, \text{ где } i=0,1$$

$$A_i=A_{k-3}+C_k(-1)^i\,, \text{ где } \; i=2,3\ldots,(N-4), \; k=Ц(\frac{i}{2})+2. \tag{13}$$

Соответственно для выражения (12) должно быть:

$$l=(\frac{N}{2}-2); \qquad Q= Ц(\frac{i+1}{2})-1. \tag{14}$$

В свою очередь коэффициенты C_k должны быть нормированы, т.е.

$$C_k=C_k\, 2^{\frac{m-1}{2}} \tag{15}$$

где $m=2,3, \ldots,(\log N)$, а $k=(2^{m-1}+1), \ldots, 2^m$.

Таким образом, полученные в работе выражения позволяют осущест-влять быстрое обратное дискретное преобразование Хаара, не накладывая ограничений на число входных отсчетов сигнала, которое может быть как составным, так и простым числом. Эти преобразования являются универсаль-ными и реализованы в обобщенной системе Хаара, когда соответствующие двоичные отрезки существования функций Хаара не равны друг другу.

Литература

1. Воробьев В.И., Грибунин В.Г. Теория и практика вейвлет-преобразования. СПб.: Изд-во ВУС, 1999. – 208 с.

2. Кокоркин О.Ю., Угольников С.А. Использование иерархического алго-ритма в методе излучательности // Труды конференции по компьютерной графике и визуализации «ГрафиКон` 97», Москва, 1997., с.31 – 37.

3. http:// www.mathsoft.com/ - сервер литературы по теории и приложениям вейвлетов.

4. Иванов В.Г. и др. Эффективность анализа и синтеза в дискретном базисе Хаара//Радиоэлектроника. 1983., № 9., с.54–56 (Изв. высш. учеб. заведений).

5. Иванов В.Г. Преобразование Хаара для произвольного числа точек Радиоэлектроника. – 1989. - № 7. – с.41–45 (Изв. высш. учеб. заведений).