Разложение полных графов в Объединение Звезд

Аннотация

Пусть S_{k+1} – звезда с k гранями. Тарси, Ямамотои и другие охарактеризовали S_{k+1} – разложимость K_n полного графа. В этой статье мы исследуем край разложения K_n и полного двудольного графа $K_{m,n}$ в копии объединения двух краев непересекающихся звезд S_{p+1} и S_{q+1}, где $p \neq q$ и $p, q \geq 2$ и получаем необходимые и достаточные условия для $S_{p+1} \cup S_{q+1}$ – разложения K_n и $K_{m,n}$.

Ключевые слова: разложение, полные графы, звезда

1. Введение

Исследуемые графы конечны и ненаправлены. Принятая терминология соглашается с этим в любой стандартной книге по теории графов [2].

K_n обозначает полный граф на n вершинах. Он имеет C_2 граней. $K_{m,n}$ полный двудольный граф, имеет $m+n$ вершин и mn граней. Звезда S_{k+1}, имеющая $k+1$ вершин и k граней – ничто иное, как полный двудольный граф $K_{1,k}$. Звезда S_{k+1} с центром в 1 и гранями, соприкасающимися с 1 и i, $i = 2,3, \ldots, k$ обозначается как $S\{1: 2,3, \ldots, k\}$. Р – подмножество из V, является подмножеством размера р. Соединение $G\ v\ H$ двух вершин несвязных графов G и H является графом с набором вершины $V(G) \cup V(H)$ и множеством ребер $E(G) \cup E(H) \cup \{uv: u \in V(G) \text{ и } v \in V(H)\}$.

Пусть G любой граф и $F = \{G1, G2, \ldots Gk\}$ есть семейство подграфов G. В F – разложении G – это отсоединенное от граней разложение G в копии G_i для $i = 1,2, \ldots k$, при условии, что никакой G_i не удалил вершины. Очевидно, k_i является положительным целым числом. Если каждый G_i изоморфен графу H тогда G является H – разложимым, или у G есть разложение H, которое обозначается $H \mid G$. Ясно, когда $H \mid G$, тогда $e(H) \mid e(G)$. Если G является F – разложимым, оно обязательно удовлетворяет условию $\sum_{i=1}^{n} k_i e(H_i) = e(G)$. Для семьи F – звезд, Лин и Шу [1], дали характеристики F – разложимости K_n.

Тарси, Ямамото и др. [4,6] установили следующий результат. "Пусть k и n – натуральные числа. Существует S_{k+1} разложение K_n тогда и только тогда, когда $2k \leq n \; n(n-1) \equiv 0 \; (mod \; 2k)$."

Мы концентрируемся на H – разложении $K_{m,n}$, полного двудольного графа и K_n – полного графа, где, $H = S_{p+1} \cup S_{q+1}$, объединение двух вершин несоприкасающихся звезд.

Мы предполагаем, что $p \neq q$, иначе оно сводится к разложению звезд. Даже тогда, когда или p или $q = 1$, проблема уменьшается до разложения полных графов в траектории и звезды [5]. Следовательно, $p > 2$ и $q > 3$. Реджи Т. [3] дает условия для $S2 \cup S3$ разложения K_n и $K_{m,n}$.

В данной работе S_{p+1} и S_{q+1}, $p \geq 2$, $q \geq 2$, характеризуется разложение полных графов. Основные результаты даны в (2.3) и (3.4), теоремах A и B.

2. Разложение $K_{m,n}$, полного двудольного графа $S_{p+1} \cup S_{q+1}$, $p \neq q$

Полный двудольный граф $K_{m,n}$ имеет $m + n$ вершин и mn граней, в то время как $S_{p+1} \cup S_{q+1}$ имеет $p + q + 2$ вершин и $p + q$ граней. Звезды S_{p+1} и S_{q+1} являются несоприкасающимися вершинами $K_{m,n}$. Если $K_{m,n}$ является $S_{p+1} \cup S_{q+1}$ – разложимым, тогда $K_{m,n}$ будет гранью дизъюнктивного объединения, по крайней мере, в двух копиях $S_{p+1} \cup S_{q+1}$. Для любого значения p и q существует минимальное $S_{p+1} \cup S_{q+1}$ разложимое $K_{m,n}$ с величиной 2 для m или n. Следовательно, мы фиксируем $m, n \geq 2$. Тоже самое условие так же выбрано в [3]. Есть $S_{p+1} \cup S_{q+1}$ – не разлагаемые полные двудольные графы для m и $n < 2$.

2.1 Пример: Пусть $m = 1$, $n = 5$, $p = 2$, $q = 3$. $K_{1,5}$ не является $S_3 \cup S_4$ – разложимым, а $K_{2,5}$ – разложим.

Основной результат данной секции представлен ниже.

2.2 Теорема A: Пусть m, n, p, q – положительные целые числа, так чтобы $m, n \geq 2$ и $p \neq q$. Необходимое и достаточное условие, что полный двудольный граф $K_{m,n}$ является $S_{p+1} \cup S_{q+1}$ – разложимым и является (i) $m + n \geq p + q + 2$ и (ii) $mn \equiv 0(mod(p+q))$.

Доказательство: Необходимость. Условия (i) и (ii) являются результатом $S_{p+1} \cup S_{q+1}$ – разложимого $K_{m,n}$.

Достаточность: Когда $mn \equiv 0(mod(p+q))$, или $m \equiv 0(mod(p+q))$ или $n \equiv 0(mod(p+q))$. Достаточно рассмотреть любой з них.

$m \equiv 0(mod(p+q))$ подразумевает $m = k(p+q)$, k – положительное целое и $k \geq 2$.

Пусть V_1 и V_2 подмножества, в которых $V(K_{m,n})$ является разделенным на 2 части. Пусть $|V_1| = m$, $|V_2| = n$ и $V_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_p, u_p + 1, \dots, u_{2(p+q)}, \dots, u_{3(p+q)}, \dots, u_{k(p+q)}\}, V_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

V_1 снова делится на k подмножеств, включающих p вершин и k подмножеств, включающих q вершин.

Случай 1: n – четное, $n = 2r$, для некоторого целого числа $r \geq 1$.

Раздел V_2 в $r = \frac{n}{2}$ подмножества второго размера каждый.

p – подмножество V_1 и q – подмножество V_1 и 2 – подмножество V_2 охватывают две не пересекающихся копии $S_{p+1} \cup S_{q+1}$.

Когда все $p, q, 2$ – подмножества учитываются, они охватывают $K_{m,n}$, которая раскладывается в $2 \times k \times r = nk$ копии $S_{p+1} \cup S_{q+1}$.

Случай 2: n – нечетное, $n = 2r + 3, r \geq 0$.

Раздел V_2 в $r = \frac{n-3}{2}$ 2 – подмножеств и 3 – подмножеств. Как в случае I, эти 2 – подмножеств охватывают $2rk$, копий $S_{p+1} \cup S_{q+1}$. С 3 – подмножеств две вершины выбираются тремя способами, каждая пара охватывающих k копий $S_{p+1} \cup S_{q+1}$. $K_{m,n}$ является неразложимой в $2rk + 3k = nk$ экземпляров $S_{p+1} \cup S_{q+1}$.

Что и требовалось доказать.

2.3 Примечание:

Условия $m, n \geq 2$ и $m + n \geq p + q + 2$ гарантируют существование $S_{p+1} \cup S_{q+1}$ разложимого $K_{m,n}$.

3. Разложение K_n, полного графа в $S_{p+1} \cup S_{q+1}$, $p \neq q$

Методология доказательства, принятая здесь, зависит от принципа математических индукций. Учитывая любые p и q мы должны установить отношения между p, q и n, чтобы проверить, является ли K_n в $S_{p+1} \cup S_{q+1}$ – разложимым. Доказательство для начальных значений p и q (2 и 3) дается отдельно, даже при том, что это – часть главной теоремы. Теорема A используется для доказательства теоремы B, основной результат здесь.

3.1 Лемма: если $H \mid G_1$ и $H \mid G_2$ тогда $H \mid G_1 \cup G_2$.

3.2 Теорема [3]: K_n в $K_{1,2} \cup K_2$ – разложимый тогда и только тогда, когда $n > 4$ и $n \equiv 0{,}1(mod3)$.

3.3 Теорема: полный граф K_n в $S_3 \cup S_4$ – разложимый тогда и только тогда, когда $n \geq 10$ и $n \equiv 0{,}1(mod5)$.

Доказательство: предположим K_n в $S_3 \cup S_4$ – разложимое.

Тогда $5 \mid nC_2$ подразумевает также $5 \mid n$ или $5 \mid n - 1$. Из этого следует, что $n \equiv 0{,}1(mod5)$, что эквивалентно $n \equiv 0{,}1(mod10)$, поскольку 2 и 5 взаимно простые. Также $n > 7$, т.к. $S_3 \cup S_4$ имеют 7 вершин. $n \equiv 0{,}1(mod3)$ подразумевает, что $n \geq 10$. Следует отметить, что как K_5 и K_6 не $S_3 \cup S_4$ – разложимый.

Достаточность: пусть K_n будет полным графом на $n \geq 10$ и $n \equiv 0{,}1(mod5)$. Тогда $n = 5k$ или $n = 5k + 1$ для некоторого положительного целого числа $k \geq 2$.

Случай 1: $n = 5k$, для наименьшего значения n, мы имеем K_{10} которое $S_3 \cup S_4$ – разложимое.

Пусть $V(K_{10}) = \{1,2,\dots,10\}$. Девять копий $S_3 \cup S_4$:

$$S\{8: 9,10\} \cup S\{4: 5,6,7\},$$

$$S\{9: 1,10\} \cup S\{8: 2,4,5\},$$

$$S\{9: 4,5\} \cup S\{10: 2,3,7\},$$

$$S\{2: 7,10\} \cup S\{10: 1,4,5\},$$

$$S\{7: 8,9\} \cup S\{3: 4,5,6\},$$

$$S\{6: 9,10\} \cup S\{1: 5,7,8\},$$

$$S\{6: 1,2\} \cup S\{3: 7,8,9\},$$

$$S\{5: 6,7\} \cup S\{1: 2,3,4\},$$

$$S\{6: 7,8\} \cup S\{2: 3,4,5\}.$$

Когда $k = 3$, K_{15} в $S_3 \cup S_4$ дано 21 копию $S_3 \cup S_4$:

$$S\{1: 13,14,15\} \cup S\{10: 2,11\},$$

$$S\{13: 4,5\} \cup S\{2: 14,15\},$$

$$S\{1: 10,11,12\} \cup S\{2: 5,6\},$$

$$S\{1: 6,7,8\} \cup S\{2: 9,10\},$$

$$S\{2: 7,8,11\} \cup S\{3: 4,5\},$$

$$S\{3: 6,7,8\} \cup S\{2: 12,13\},$$

$$S\{3: 10,11,12\} \cup S\{1: 2,9\},$$

$$S\{4: 13,14,15\} \cup S\{3: 9,13\},$$

$$S\{4: 5,6,7\} \cup S\{3: 5,14\},$$

$$S\{4: 8,9\ 10\} \cup S\{5: 6,7\},$$

$$S\{12: 11,13,14\} \cup S\{5: 8,9\},$$

$$S\{5: 10,11,12\} \cup S\{13: 14,15\},$$

$$S\{5: 13,14,15\} \cup S\{6: 7,8\},$$

$$S\{6: 9,10,11\} \cup S\{7: 14,15\},$$

$$S\{7: 8,9\ 10\} \cup S\{6: 12,13\},$$

$$S\{7: 11,12,13\} \cup S\{6: 14,15\},$$

$$S\{8: 13,14,15\} \cup S\{9: 10,11\},$$

$$S\{11: 13,14,15\} \cup S\{9: 8,12\},$$

$$S\{8;10,11,12\} \cup S\{9:13,14\},$$
$$S\,\{10:13,14,15\} \cup S\{4:11,12\},$$
$$S\{15:9,12,14\} \cup S\{2:3,4\}.$$

Для $k > 3$ мы имеем $E(K_{5k}) = E\left(K_{5(k-2)}\right) \cup E(K_{10}) \cup E(K_{5(k-2),10}) \ldots (*)$. Когда $k = 4$ уравнение (*) приводит к набору граней $К_{20}$, т.к. несвязный граничный набор двух K_{10} и $K_{10,10}$, каждый из которых – разложимый по 2.1 (Теорема А) и $S_3 \cup S_4$ – разложение в $К_{10}$.

По лемме 3.1 K_{5k} в $S_3 \cup S_4$ – разложимый при $k > 3$.

Случай 2: $n = 5k + 1, k \geq 2$.

Мы принимаем ту же индуктивную процедуру как в 1 случае. Когда $k = 2$ и $k = 3$ мы получаем K_{11} и K_{16}, как $S_3 \cup S_4$ – разложимый. Соответствующее отношение k (*) является $E(K_{5k+1}) = E(K_{5(k-2)}) \cup E(K_{11}) \cup E(K_{5(k-2),11})$………(**).

Согласно лемме 3.1 K_{5k+1} в $S_3 \cup S_4$ – разложимое.

Доказательство завершено.

3.4 Теорема В

Необходимое и достаточное условие, что полный граф K_n в $S_{p+1} \cup S_{q+1}$ – разложимое, $p \neq q$ при $n > p + q + 2$ и $n \equiv 0{,}1(mod2(p+q))$.

Доказательство (необходимость): если K_n в $S_{p+1} \cup S_{q+1}$ – разложим и является подграфом K_n. Следовательно, $n > p + q + 2$.

$e(Sp + 1 \cup Sq + 1) | \, e(K_n)$ подразумевает $(p + q) \mid nC_2$ эквивалентно $n \equiv 0{,}1(mod2(p+q))$.

Доказательство проводится индукцией по n. Существование такого K_n доказано для $p = 2$ и $q = 3$ (Теорема 3.3).

Пусть $p > 2$ и $q > 3$ и удовлетворяет (i) и (ii), и граф K_m в $S_{p+1} \cup S_{q+1}$ – разложимый.

Пусть $m \equiv 0, (mod\ 2(p+q))$. Следующим более высоким значением n является $m + 2(p+q) \equiv 0\ (mod\ 2(p+q))$ путем гипотезы индукции.

$$E(K_{m+2(p+q)}) = E(K_{m-4}) \cup E(K_{2(p+q)}) \cup E(K_{m,2(p+q)})$$

Графы на $S_{p+1} \cup S_{q+1}$ – разложимы, в соответствии с гипотезой индукции.

Согласное лемме 3.1 $K_{m+2(p+q)}$ в $S_{p+1} \cup S_{q+1}$ – разложимо, когда $m \equiv 0\ (mod\ 2(p+q)), m+1 \equiv 1\ (mod\ 2(p+q))$.

Из $K_{m+1} = K_m\ v\ K_1$ мы имеем $E(K_{m+1}) = E(K_m) \cup E(K_{1,m})$.

В соответствии с гипотезой индукции, теоремой А и леммой 3.1 K_{m+1} в $S_{p+1} \cup S_{q+1}$– разложимо.

По принципу индукции, для любого n, удовлетворяющего условию (i) $n > p+q+2$ и (ii) $n \equiv 0{,}1\ (mod\ 2(p+q))$ K_n в $S_{p+1} \cup S_{q+1}$ – разложимо.

Заключение: в данной статье мы охарактеризовали $S_{p+1} \cup S_{q+1}$, $p \geq 2$, $q \geq 2$, разложение полных графов. Аналогичные результаты для других графов будут приведены в другой статье.

Список использованных источников:

1. Lin.C and T.W-Shyu: A necessary and sufficient condition for the star decomposition of complete graphs, *J. Graph Theory 23* (1996) 361-364.

2. Parthasaradhy K.R: *Basic Graph Theory* ,Tata MacGraw Hill.

3. Regi T.: *A Study on Decomposition Problems in Graph Theory*, Ph.D thesis University of Kerala, 2005.

4. Tarsi M.: On the decomposition of a graph into stars, *Discrete Mathematics*, 36 (1981) 299-304.

5. T. W-Shyu; Decomposition of complete graphs into paths and stars, *Discrete Mathematics* 310 (2010) 2164-2169.

6. Yamamoto S., Ikeda H., Shige-eda S, Ushio K. and Hamada N.: On claw decomposition of complete graphs and complete bigraphs, *Hiroshima Math. J.* 5 (1975) 33-42.