УДК 004.272.2:519.63

В.В.Белый, И.А.Назарова, Л.П.Фельдман
Донецкий национальный технический университет, г. Донецк
кафедра прикладной математики и информатики

АНАЛИЗ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ПОЛНОСТЬЮ НЕЯВНЫМИ ОДНОШАГОВЫМИ МЕТОДАМИ РУНГЕ-КУТТЫ

Аннотация

Белый В.В., Назарова И.А., Фельдман Л.П. Анализ параллельных алгоритмов решения нелинейной задачи Коши полностью неявными одношаговыми методами Рунге-Кутты. *Рассмотрены механизмы параллельной реализации решения нелинейной задачи Коши с помощью полностью неявных одношаговых методов Рунге-Кутты. Проведен анализ источников параллелизма, выполены оценки эффективности данной группы методов. Выявлены средства для дальнейшего улучшения рассматриваемых механизмов.*

Ключевые слова: *задача Коши, неявные методы, устойчивость, параллельный алгоритм, граф влияния.*

Постановка проблемы. Известно, что максимально возможное быстродействие обычных последовательных машин является принципиально ограниченным. Также существует проблема недостатка возможностей существующих средств вычислительной техники для решения непрерывно возникающих новых вычислительных задач. В связи с этим применение высокопроизводительных параллельных вычислительных систем (ВС) является одним из наиболее перспективных и востребованых направлений развития современной компьютерной индустрии. Моделирование реальных многомерных динамических процессов, описываемых системами обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ) представляет собой одно из множеств задач, для решения которых использование параллельных суперкомпьютеров является необходимым условием для достижения значимых результатов.

Цель статьи – изучить и проанализировать механизмы выполнения параллельных вычислений для решения нелинейной задачи Коши полностью неявными одношаговыми методами Рунге-Кутты для последующего улучшения данных механизмов.

Параллельные алгоритмы решения нелинейной задачи Коши полностью неявными одношаговыми методами Рунге-Кутты. Исследование методов решения динамических задач с сосредоточенными параметрами показывает, что параллельные свойства таких алгоритмов во многом определяются видом лежащей в их основе численной схемы. Наиболее изученными и наименее трудоемкими являются явные методы, однако присущие этим схемам недостатки, одним из которых является условная устойчивость, существенно ограничивают область их применения. В этой связи значительный интерес представляют неявные схемы, которые, несмотря на большую вычислительную сложность, не имеют альтернативы среди одношаговых методов при решении жестких задач Коши.

Рассматривается численное решение задачи Коши, ассоциируемое с решением СОДУ первого порядка с известными начальными условиями:

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{y}(x)}{dx} = \bar{f}\left(x, \bar{y}(x)\right), \\ \bar{y}(x_0) = \overline{y_0}, \end{cases} \tag{1}$$

где правая часть системы есть в общем случае нелинейная функция, задающая отображение $F = f: R \times R^m \to R^m$:

$$F = \begin{pmatrix} f_1(x_1, y_1, y_2, \dots, y_m) \\ f_2(x_1, y_1, y_2, \dots, y_m) \\ \dots \\ f_m(x_1, y_1, y_2, \dots, y_m) \end{pmatrix}; \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix}; \overline{y_0} = \begin{pmatrix} y_{0,1} \\ y_{0,2} \\ \dots \\ y_{0,m} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Численное решение полностью неявным s–стадийным методом Рунге-Кутты можно получить последовательно по шагам:

$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = \quad \bar{y}_n + h \cdot \sum_{i=1}^{s} b_i \bar{k}_i , \\ \bar{k}_i = \bar{f}\left[x_n + c_i h; y_n + h \cdot \sum_{j=1}^{s} a_{ij} \bar{k}_j\right], i = \overline{1, s}, \end{cases} \tag{3}$$

где s-размерные вектора $c = (c_1, c_2, \dots, c_s)^T, b = (b_1, b_2, \dots, b_s)^T$ и матрица A описывают уникальный вариант метода. При решении СОДУ полностью неявными методами ms-стадийных коэффициентов могут быть получены на основе итерационной схемы:

$$\begin{cases} \bar{k}_i^{(0)} = \quad \bar{\mathrm{f}}[\mathrm{x_n} + \mathrm{c_i h}; \bar{\mathrm{g}}_\mathrm{i}^{(0)}], \\ \bar{k}_i^{(l+1)} = \quad \bar{\mathrm{f}}[\mathrm{x_n} + \mathrm{c_i h}; \bar{\mathrm{g}}_\mathrm{i}^{(\mathrm{l})}], \end{cases} \tag{4}$$

где

$$\bar{g}_i^{(0)} = \bar{y}_n, \bar{g}_i^{(l)} = \bar{y}_n + h \cdot \sum_{j=1}^{s} a_{ij} \bar{k}_j^{(l)}, i = \overline{1, s}, l = \overline{1, N}. \tag{5}$$

Параллельное решение ОДУ на базе ПНМРК концентрируется на выполнении одного шага интегрирования. Поскольку в неявных методах для одного уравнения имеется возможность использовать параллелизм метода, следует распределить вычисление каждого из стадийных векторов на отдельный процессор в пределах одного шага итерации. В качестве основной макрооперации вводится вычисление коэффициентов $K^{(l)} = (\bar{k}_1^{(l)}, \bar{k}_2^{(l)}, \ldots, \bar{k}_s^{(l)})$ на l-том шаге итерационного процесса. Параллельный алгоритм введенной макрооперации разработан с использованием графа влияния, представленного на рисунке 1.

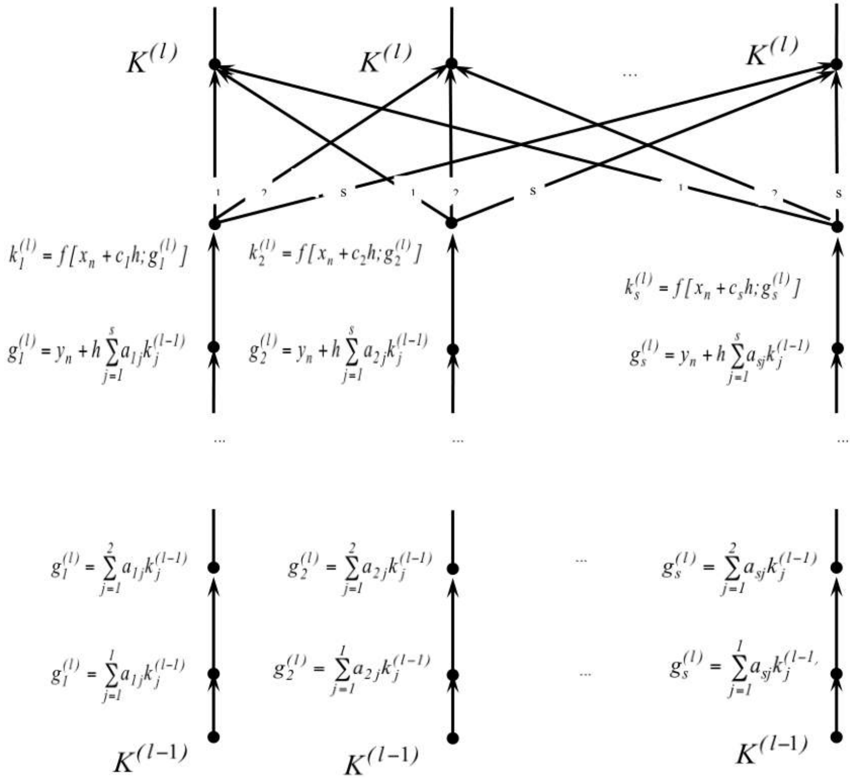

Рисунок 1 – Граф влияния вычисления − l-той итерации стадийных векторов ПНМРК для ОДУ

Каждый из p процессоров отвечает за вычисление l-той итерации i-той компоненты вспомогательного вектора $\bar{g}_i^{(l)}, i = \overline{1, s}$. Затем производится обмен между процессорами по типу “все-всем” для вычисления очередной итерации коэффициентов $k_i, i = \overline{1, s}$ [1].

Время последовательного метода для одного уравнения при реализации ПНМРК составляет:

$$T_l^{2l} = s \cdot \left(T_f + t_{mul} + t_{ad}\right) + N \cdot \left[s^2 \cdot t_{mul} + s^2 \cdot t_{ad} + s \cdot T_f\right] + \\ +(s + l) \cdot (t_{mul} + t_{ad}) \quad (6)$$

Рис. 2 представляет параллельный алгоритм решения одного дифференциального уравнения полностью неявным методом на мультикомпьютере из p процессоров, объединенных однородной коммутационной сетью.

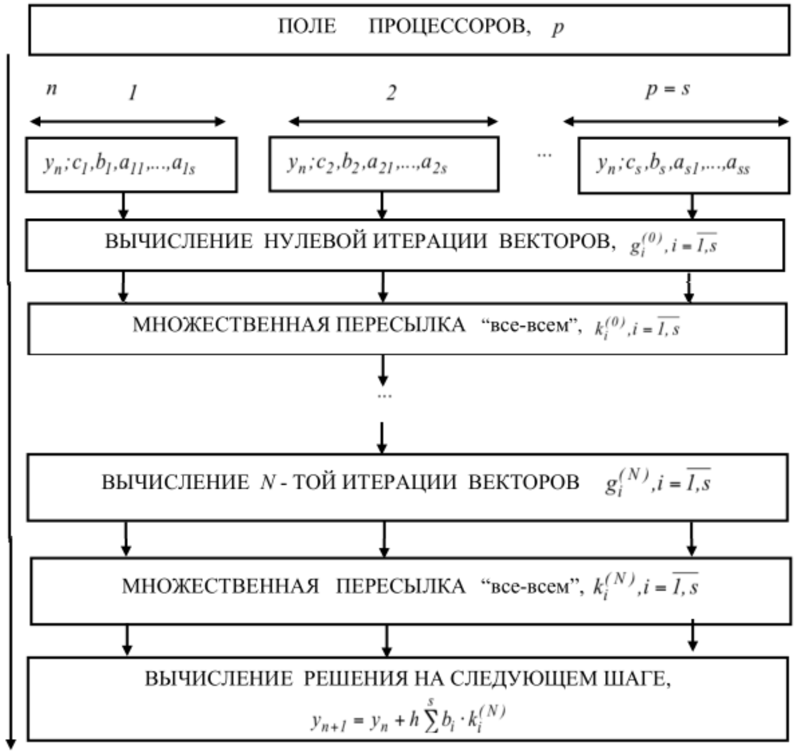

Рисунок 2 – Вычислительная схема ПНМРК для одного ОДУ

Для параллельного алгоритма ПНМРК время выполнения вычислений на p процессорах без учета обменов и других накладных расходов равно [2]:

$$T_l^{2l} = T_f + t_{mul} + t_{ad} + N \cdot \left[s \cdot t_{mul} + s \cdot t_{ad} + T_f\right] + \\ +(s + l) \cdot (t_{mul} + t_{ad}) \quad (7)$$

Коэффициент потенциального ускорения для ОДУ со сложной правой частью определяется следующим образом: $S_{pot}^{2l} = \frac{T_l^{2l}}{T_p^{2l}} \approx \frac{s(N+1)T_f}{(N+1)T_f} = s = p$. Аналогичный результат получается при $t_{mul} = t_{ad} = t_{op}$. Максимальная степень параллелизма алгоритма составляет $Dop = s$. Время, необходимое на реализацию межпроцессорных обменов рассматриваемого алгоритма, определяется $N + 1$ раз повторенной множественной операцией по типу "все-всем" для p процессоров $T_{p,comm}^{2l} = (N + 1) \cdot T_{all-to-all}(p)$.

Реальная эффективность параллельных вычислений во многом определяется трудоемкостью коммуникационных операций. Анализ различных топологий показывает, что, наихудшим вариантом для рассматриваемого алгоритма является соединение типа кольцо, наилучшим – гиперкуб.

Динамические характеристики параллельных ПНМРК для ОДУ имеют большой разброс по значениям. Поэтому их эффективное применение возможно только при тщательном учете параметров параллельной системы, алгоритма и исходной задачи [3].

Выводы. Рассмотрены механизмы параллельных вычислений для решения нелинейной задачи Коши полностью неявными одношаговыми методами Рунге-Кутты. Проанализированы источники параллелизма для данной группы методов. Выполнены оценки эффективности.

Проведен анализ механизмов параллельных вычислений, выявлены средства для последующего повышения показателей работы рассматриваемых методов. Найдены основания для дальнейшего развития данных методов в системах с использованием общей памяти.

Список литературы

1. Фельдман Л.П. Паралельні однокрокові методи чисельного розв'язання задачі Коші: монографія / Л.П. Фельдман, І.А. Назарова. – Донецьк: «ДВНЗ» ДонНТУ, 2011. – 185 с.

2. Одношаговые методы численного решения задачи Коши : учеб.-метод. пособие / Б. В. Фалейчик. – Минск : БГУ, 2010. – 42 с.

3. Никишин Р.Ю., Назарова И.А., Фельдман Л.П. Параллельные неявные методы решения жестких задач Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Сборник трудов международной научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых –18-19 сентября 2012 года Донецк, ДонНТУ. – 2012. в 2 томах , Т. 2. – С. 91-96.