УДК 519.872

А.А. Назаров, С.А. Цой

ОБЩИЙ ПОДХОД К ИССЛЕДОВАНИЮ МАРКОВСКИХ МОДЕЛЕЙ СЕТЕЙ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ, УПРАВЛЯЕМЫХ ДИНАМИЧЕСКИМ ПРОТОКОЛОМ СЛУЧАЙНОГО МНОЖЕСТВЕННОГО ДОСТУПА

Рассматривается общий подход к асимптотическому анализу марковских моделей сетей передачи данных с динамическим протоколом случайного множественного доступа. Описаны возможные варианты предельных условий. Детально рассмотрен асимптотический анализ в условиях критической и большой загрузок. Построен однородный диффузионный процесс, аппроксимирующий процесс изменения числа заявок в источнике повторных вызовов. Найдены его коэффициенты переноса и диффузии.

Компьютерные сети передачи данных [1, 2] являются чрезвычайно быстро развивающимся элементом инфраструктуры современного общества, большую часть вычислительных сетей образуют сети с протоколом случайного множественного доступа, такие, как Ethernet и Aloha. Вместе с широким распространением таких сетей растет и актуальность их исследования. Достаточно удобным и распространенным методом таких исследований является метод математического моделирования, который позволяет эффективно исследовать сложные реальные системы [3 – 6]. Но, несмотря на достаточную действенность данного метода, аналитическое исследование большого числа математических моделей превращается в довольно трудоемкий и малопродуктивный процесс вследствие громоздкости записей систем уравнений, определяющих функционирование сети передачи данных.

В [7] был предложен метод, позволяющий унифицировать асимптотический анализ марковских моделей сетей передачи данных случайного множественного доступа с бесконечным числом станций и статическим протоколом доступа. В данной работе предлагается модификация данного подхода, позволяющая исследовать марковские модели сетей передачи данных случайного множественного доступа с динамическим протоколом доступа, с использованием различных асимптотик, что позволяет рассмотреть различные режимы функционирования сети передачи данных. Данный метод позволяет получить основные вероятностно-временные характеристики сети и построить аппроксимирующий диффузионный процесс, который описывает процесс изменения состояний системы. Для иллюстрации данного метода рассматривается одноканальная сеть передачи данных с динамическим протоколом случайного множественного доступа.

ОДНОКАНАЛЬНЫЕ СЕТИ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ С ОПОВЕЩЕНИЕМ О КОНФЛИКТЕ

Рассмотрим сети передачи данных, управляемые динамическим протоколом случайного множественного доступа с оповещением о конфликте.

Сеть передачи данных объединяет конечное N число абонентских станций общим ресурсом, в качестве которого может быть моноканал в сетях шинной топологии или пассивный центральный узел в звездообразных сетях. Так как общий ресурс совместно используют все абонентские станции, то возможно совпадение времени ретрансляции сообщений от двух или более абонентских станций, при этом сообщения искажаются и требуют повторной передачи. Такая ситуация называется конфликтом. Предполагается, что имеется возможность обнаружения возникающих конфликтов и реализация сигнала оповещения о конфликте. Абонентские станции способны идентифицировать сигнал оповещения о конфликте.

Сообщения, поступающие во время распространения сигнала оповещения о конфликте, считаются искаженными. Все искаженные сообщения поступают в источник повторных вызовов. После определения абонентской станцией того, что посланное сообщение попало в конфликт, абонентская станция производит случайную задержку, после которой вновь реализует передачу. В динамическом протоколе предлагается использовать случайную задержку перед повторной попыткой передачи, величина которой зависит от количества сообщений, находящихся в источнике повторных вызовов. Динамические протоколы, как правило, технически не реализуемы, но могут приближенно оценивать функционирование адаптивных протоколов, которые реализуются с использованием адаптера.

В качестве математической модели описанной сети передачи данных можно рассмотреть однолинейную систему массового обслуживания с конечным N числом внешних источников. Сервер может находиться в одном из трех состояний: $k=0$, когда сервер свободен, $k=1$, когда сервер занят обслуживанием заявки, и $k=2$, когда на сервере реализуется этап оповещения о конфликте. Заявка, поступившая на свободный сервер, начинает немедленно обслуживаться. Если за время ее обслуживания другие заявки не поступали, то она после окончания обслуживания покидает систему. Если же во время ее обслуживания поступает другая заявка, то возникает конфликтная ситуация и начинается этап оповещения о конфликте. Заявки, попавшие в конфликт, а также поступившие на этапе оповещения о нем, переходят в источник повторных вызовов. Из него они вновь обращаются к серверу с попыткой повторного обслуживания через случайный интервал времени, длительность ξ которого зависит от количества заявок в источнике повторных вызовов и обладает свойством

$$P\left(\xi < a+\Delta t / \xi > a, j(t)=j\right)=\sigma \Delta t / j+o(\Delta t),$$

которое есть вероятность того, что за интервал времени Δt закончится интервал задержки перед повторной попыткой передачи искаженной заявки из источника повторных вызовов, где $j(t)$ – количество заявок в источнике повторных вызовов в момент времени t. Каждый из N источников генерирует заявку в течение случайного времени, распределенного по экспоненциальному закону с параметром λ / N . Источник, заявка которого находится на обслуживании или в источнике повторных вызовов, другие заявки не генерирует, а начинает формировать новую заявку после успешного обслуживания предыдущей. Таким образом, суммарный поток заявок от всех внешних источников является примитивным с параметром $\lambda(N-i)/N$ при $k=0$ и $\lambda(N-i-1)/N$ при $k=1$ или $k=2$. Здесь $i(t)$ – число заявок в системе. Время обслуживания и продолжительность этапа оповещения о конфликте случайные и имеют функции распределения $B(s)$ и $A(s)$.

Состояние рассматриваемой системы определим вектором $\{k,i\}$, где k – состояние сервера, а i – число заявок в системе. Его изменение во времени образует дискретный двумерный однородный процесс $\{k(t), i(t)\}$ с конечным числом состояний.

Модель будем называть марковской, если функции распределения $B(s)$ и $A(s)$ экспоненциальные с параметром μ для обслуживания и $1/a$ для оповещения о конфликте, в этом случае процесс $\{k(t),i(t)\}$ является марковским.

Для исследования модели обозначим

$$P_k(i,t) = P\{k(t)=k, i(t)=i\},$$

$$k=\overline{0,2}\,,\ i=\overline{0,N}\,, \tag{1}$$

– вероятность того, что в момент времени t сервер находится в состоянии k и в системе находится i заявок.

Используя Δt-метод, можно записать систему конечно-разностных дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей $P_k(i,t)$ состояний системы:

$$\frac{\partial P_0(i,t)}{\partial t} = -(\lambda(1-i/N)+\sigma)P_0(i,t) + $$

$$+\mu P_1(i+1,t) + \frac{1}{a}P_2(i,t)\,,$$

$$\frac{\partial P_1(i,t)}{\partial t} = -(\lambda(1-i/N)+\sigma+\mu)P_1(i,t) +$$

$$+\lambda\left(1-\frac{i-1}{N}\right)P_0(i-1,t)+\sigma P_0(i,t)\,,$$

$$\frac{\partial P_2(i,t)}{\partial t} = -\left(\lambda(1-i/N)+\frac{1}{a}\right)P_2(i,t) +$$

$$+\lambda\left(1-\frac{i-1}{N}\right)P_2(i-1,t) +$$

$$+\lambda\left(1-\frac{i-1}{N}\right)P_1(i-1,t)+\sigma P_1(i,t)\,. \tag{2}$$

Для исследования системы перейдем к матричной форме записи. Для этого введем следующий ряд обозначений:

$$P(i,t) = \{P_0(i,t), P_1(i,t), ..., P_{M-1}(i,t)\}^T \tag{3}$$

– вектор-столбец состояний системы в момент времени t, где M – число возможных состояний сервера или серверов;

$$A_0(x), A_1(x), ..., A_{L-1}(x) \tag{3.1}$$

– квадратные матрицы коэффициентов размерности $M \times M$, где L конечно и меняется в зависимости от рассматриваемой системы.

Для случая одноканальной сети с оповещением о конфликте обозначения (3) и (3.1) приобретут вид

$$P(i,t) = \{P_0(i,t), P_1(i,t), P_2(i,t)\}^T\,,$$

$$M=3\,,\ L=3\,. \tag{3.2}$$

В этом случае систему (2) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial P(i,t)}{\partial t} = A_0\left(\lambda\left(1-\frac{i}{N}\right)\right)P(i,t) +$$

$$+A_1\left(\lambda\left(1-\frac{i-1}{N}\right)\right)P(i-1,t) + A_2 P(i+1,t)\,, \tag{4}$$

где матрицы A_j очевидным образом восстанавливаются из (2).

Достаточно очевидно, что аналогичным образом к виду (4) можно привести системы уравнений, определяющих распределение вероятностей состояний математических моделей и других сетей случайного доступа с динамическим протоколом обслуживания с бесконечным числом станций, например, таких, как:

1) математическая модель сети передачи данных с резервированием канала и оповещением о конфликте. В данном случае векторы и матрицы будут иметь размерность 4 × 4;

2) математическая модель двухканальной сети случайного доступа с оповещением о конфликте. Размерность матриц и векторов 9 × 9;

3) математические модели сетей передачи данных с большим количеством каналов с оповещением о конфликте при наличии или отсутствии резервирования канала.

МЕТОД АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В УСЛОВИЯХ ПРЕДЕЛЬНО БЕСКОНЕЧНОГО ЧИСЛА АБОНЕНТСКИХ СТАНЦИЙ

Аналитических методов решения дифференциальных конечноразностных уравнений (4) с переменными коэффициентами нет. Поэтому исследование матричного уравнения (4) проведем методом асимптотического анализа в условиях предельно бесконечного числа абонентских станций, т.е. при $N \to 0$, модифицируя метод работы [8] для исследования нестационарных режимов функционирования марковизируемых систем. Аналогичный подход применяется в работах [9 – 12].

Определим S пропускную способность сети передачи данных как точную верхнюю грань множества тех значений интенсивности входящего потока, для которых в сети существует стационарный режим в моделях с бесконечным числом состояний.

При использовании метода асимптотического анализа математических моделей сетей передачи данных с динамическим протоколом доступа возможно рассмотрение различных предельных условий: $\lambda \uparrow S$ – условие большой загрузки, $N \to \infty$ – условие предельно бесконечного числа станций в условии перегрузки. Но наиболее интересен случай выполнения сразу двух предельных условий $\lambda \to S$ и $N \to \infty$. В этом случае удается провести исследование не только в условиях большой загрузки или перегрузки, но также и в условиях критической загрузки.

В данной работе будет рассмотрен общий подход к асимптотическому анализу марковских моделей сетей передачи данных с динамическим протоколом доступа в условиях критической и большой загрузок.

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СЕТИ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ В УСЛОВИЯХ БОЛЬШОЙ И КРИТИЧЕСКОЙ ЗАГРУЗОК

Для исследования системы в условиях большой и критической загрузок модифицируем общий подход, описанный нами ранее в работе [7] для исследования сетей передачи данных, управляемых статическими протоколами случайного множественного доступа.

Пусть система дифференциальных уравнений Колмогорова для распределения вероятностей имеет вид (4), то есть

$$\frac{\partial P(i,t)}{\partial t} = A_0\left(\lambda\left(1-\frac{i}{N}\right)\right)P(i,t) + $$
$$+A_1\left(\lambda\left(1-\frac{i-1}{N}\right)\right)P(i-1,t)+A_2P(i+1,t), \tag{5}$$

где $P(i,t)=\{P_0(i,t),P_1(i,t),...,P_{M-1}(i,t)\}^T$,

а $A_0(x),A_1(x),A_2(x)$ – соответствующие матрицы, конкретный вид которых определяется рассматриваемой математической моделью.

В системе (4) выполним замены

$$t\varepsilon^2=\tau\,,\ i\varepsilon=x\,,\ \frac{1}{\varepsilon}P(i,t)=\pi(x,\tau,\varepsilon)\,. \tag{6}$$

Покажем, что процесс $x(\tau)=\varepsilon i(\tau/\varepsilon^2)$ является однородным диффузионным процессом, и найдем его коэффициенты переноса и диффузии.

Сформулированные результаты получим с помощью исследования системы (4), которую с учетом замены (6) перепишем следующим образом:

$$\varepsilon^2\frac{\partial\pi(x,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}=A_0\left(\lambda\left(1-\frac{\varepsilon x}{\varepsilon^2 N}\right)\right)\pi(x,\tau,\varepsilon)+$$
$$+A_1\left(\lambda\left(1-\varepsilon\frac{x-\varepsilon}{\varepsilon^2N}\right)\right)\pi(x-\varepsilon,\tau,\varepsilon)+A_2\pi(x+\varepsilon,\tau,\varepsilon)\,. \tag{7}$$

Наряду с асимптотикой $N\to\infty$ рассмотрим асимптотику $\varepsilon\to 0$, которая характеризует ситуацию большой или критической загрузки сети. Обозначив $1/\left(\varepsilon^2N\right)=\delta$, рассмотрим следующие возможные варианты соотношения параметров ε и N:

$$\delta=1\,; \tag{8}$$

$$\delta\to 0\,. \tag{9}$$

Условие (8) назовем условием критической загрузки, а (9) – условием большой загрузки. Учитывая данную замену, получим

$$\varepsilon^2\frac{\partial\pi(x,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}=A_0\left(\lambda\left(1-\varepsilon\delta x\right)\right)\pi(x,\tau,\varepsilon)+$$
$$+A_1\left(\lambda\left(1-\varepsilon\delta(x-\varepsilon)\right)\right)\pi(x-\varepsilon,\tau,\varepsilon)+A_2\pi(x+\varepsilon,\tau,\varepsilon)\,. \tag{10}$$

Далее рассмотрим каждый из вариантов функционирования сети передачи данных с динамическим протоколом обслуживания.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ КАНАЛА

На первом этапе найдем распределения вероятностей значений процесса $k(\tau)$ – вектор-столбец вероятностей состояний каналов. Для этого в системе (7) перейдем к пределу при $\varepsilon\to 0$ или $\lambda\to S$. Обозначив $\pi(x,\tau,\varepsilon)\to\pi(x,\tau,0)=\pi(x,\tau)$, получим относительно вектора $\pi(x,\tau)$ однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$K(S)\pi(x,\tau)=0\,, \tag{11}$$

где матрица $K(S)$ имеет вид

$$K(S)=\sum_{j=0}^{2}A_j(S) \tag{12}$$

и является инфинитезимальной матрицей интенсивностей переходов случайного процесса $k(\tau)$. Из свойств таких матриц следует, что их строки линейно зависимы, то есть

$$E^TK(S)=0\,, \tag{13}$$

где E – единичный вектор-столбец. Следовательно, система (11) имеет нетривиальное решение, которое представим в виде

$$\pi(x,\tau)=R(S)H(x,\tau)\,, \tag{14}$$

где $H(x,\tau)$ – скалярная функция, а вектор $R(S)$ определяется аналогично (11) однородной системой линейных алгебраических уравнений

$$K(S)R(S)=0\,. \tag{15}$$

Положим, что вектор $R(S)$ удовлетворяет условию нормировки

$$E^TR(S)=1\,. \tag{16}$$

Тогда $R(S)$ имеет смысл распределения вероятностей значений процесса $k(\tau)$, а $H(x,\tau)$ является плотностью распределения вероятностей значений процесса $x(\tau)$, ее вид будет определен ниже.

Теорема 1. *Решение $R(S)$ системы* (15)*, удовлетворяющее условию нормировки* (16)*, существует и единственно.*

Доказательство теоремы 1 достаточно элементарно и в работе не приводится.

На втором этапе найдем условие, определяющее значение величины S.

Теорема 2. *Величина S, имеющая смысл пропускной способности сети передачи данных, является решением следующего однородного уравнения*

$$E^TV(S)R(S)=0\,, \tag{17}$$

где матрица $V(S)$ имеет вид

$$V(S)=A_1(S)-A_2\,, \tag{18}$$

а $R(S)$ определяется системой (15) *и* (16).

Доказательство. В системе (7) функции $\pi(x\pm\varepsilon,\tau,\varepsilon)$ разложим в ряд по приращениям аргумента x с точностью до $o(\varepsilon)$. Тогда (7) примет вид

$$A_0(\lambda(1-\varepsilon\delta x))\pi(x,\tau,\varepsilon)+$$
$$+A_1(\lambda(1-\varepsilon\delta x))\left(\pi(x,\tau,\varepsilon)-\varepsilon\frac{\partial\pi(x,\tau,\varepsilon)}{\partial x}\right)+$$
$$+A_2\left(\pi(x,\tau,\varepsilon)+\varepsilon\frac{\partial\pi(x,\tau,\varepsilon)}{\partial x}\right)=o(\varepsilon)\,. \tag{18.1}$$

После несложных преобразований получим

$$K\left(\lambda(1-\varepsilon\delta x)\right)\pi(x,\tau,\varepsilon)-$$

$$-\varepsilon V(\lambda(1-\varepsilon\delta x))\frac{\partial\pi(x,\tau,\varepsilon)}{\partial x}=o(\varepsilon)\,. \qquad (18.2)$$

Сложив все уравнения полученной системы и учитывая свойство (13) матрицы $K(\lambda(1-\varepsilon\delta x))$, получим

$$\varepsilon E^T V(\lambda(1-\varepsilon\delta x))\frac{\partial\pi(x,\tau,\varepsilon)}{\partial x}=o(\varepsilon)\,, \qquad (18.3)$$

переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, имеем

$$E^T V(S)\frac{\partial\pi(x,\tau)}{\partial x}=0\,. \qquad (18.4)$$

Подставив в полученное выражение разложение (14), запишем

$$E^T V(S)R(S)\frac{\partial H(x,\tau)}{\partial x}=0\,, \qquad (18.5)$$

откуда получаем утверждение теоремы (17):

$$E^T V(S)R(S)=0\,. \qquad (18.6)$$

Теорема доказана.

ДИФФУЗИОННАЯ АППРОКСИМАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СЕТЕЙ СВЯЗИ

На третьем этапе найдем разложение функции $\pi(x,\tau,\varepsilon)$ вида

$$\pi(x,\tau,\varepsilon)=R(S)H(x,\tau)+\varepsilon h(x,\tau)+o(\varepsilon)\,. \qquad (19)$$

Теорема 3. *Вектор* $h(x,\tau)$ *системы* (19) *имеет вид*

$$h(x,\tau)=-\frac{dR(S)}{dS}(\gamma+S\delta x)H(x,\tau)+h^{(1)}(S)\frac{\partial H(x,\tau)}{\partial x}\,, \qquad (20)$$

где вектор $h^{(1)}(S)$ *является решением системы*

$$K(S)h^{(1)}(S)=V(S)R(S)\,. \qquad (21)$$

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 3 работы [7].

На четвертом этапе определим вид функции $H(x,\tau)$.

Теорема 4. *Функция* $H(x,\tau)$ *является плотностью распределения вероятностей значений однородного диффузионного процесса и определяется уравнением Фоккера – Планка вида*

$$\frac{\partial H(x,\tau)}{\partial\tau}=$$

$$=-\frac{d}{dS}\left(-E^T V(S)R(S)\right)'\frac{\partial}{\partial x}\{(\gamma+S\delta x)H(x,\tau)\}+$$

$$+\frac{1}{2}E^T\left(D(S)R(S)-2V(S)h^{(1)}(S)\right)\frac{\partial^2 H(x,\tau)}{\partial x^2}, \qquad (22)$$

где матрица $D(S)$ *имеет вид*

$$D(S)=A_1(S)+A_2\,, \qquad (23)$$

а вектор $h^{(1)}(x)$ *является решением системы* (21).

Доказательство. В системе (7) функции $\pi(x\pm\varepsilon,\tau,\varepsilon)$ разложим в ряд с точностью до $o(\varepsilon^2)$, получим

$$\varepsilon^2\frac{\partial\pi(x,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}=K(\lambda(1-\varepsilon\delta x))\pi(x,\tau,\varepsilon)-$$

$$-\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\{V(\lambda(1-\varepsilon\delta x))\pi(x,\tau,\varepsilon)\}+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\{D(\lambda(1-\varepsilon\delta x))\pi(x,\tau,\varepsilon)\}+o(\varepsilon^2)\,, \qquad (23.1)$$

где $D(\lambda)$, очевидно, определяется выражением (23).

Сложив все уравнения системы (23.1), положив

$$V(S-\varepsilon(\gamma+S\delta x))=$$

$$=V(S)-\varepsilon(\gamma+S\delta x)\frac{dV(S)}{dS}+o(\varepsilon) \qquad (23.2)$$

и подставив $\pi(x,\tau,\varepsilon)$ вида (19), получим

$$\varepsilon^2\frac{\partial H(x,\tau)}{\partial\tau}=$$

$$=-\varepsilon E^T V(S)R(S)\frac{\partial H(x,\tau,\varepsilon)}{\partial x}-\varepsilon^2 E^T V(S)\frac{\partial h(x,\tau)}{\partial x}+$$

$$+\varepsilon^2 E^T V'(S)R(S)\frac{\partial}{\partial x}\{(\gamma+S\delta x)H(x,\tau)\}+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}E^T D(\lambda)R(S)\frac{\partial^2 H(x,\tau)}{\partial x^2}+o(\varepsilon^2)\,. \qquad (23.3)$$

Учитывая (17), имеем

$$\varepsilon^2\frac{\partial H(x,\tau)}{\partial\tau}=-\varepsilon^2 E^T V(S)\frac{\partial h(x,\tau)}{\partial x}+$$

$$+\varepsilon^2 E^T V'(S)R(S)\frac{\partial}{\partial x}\{(\gamma+S\delta x)H(x,\tau)\}+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}E^T D(\lambda)R(S)\frac{\partial^2 H(x,\tau)}{\partial x^2}+o(\varepsilon^2)\,, \qquad (23.4)$$

откуда при предельном переходе при ε→0 получаем

$$\frac{\partial H(x,\tau)}{\partial\tau}=-E^T V(S)\frac{\partial h(x,\tau)}{\partial x}+$$

$$+E^T V'(S)R(S)\frac{\partial}{\partial x}\{(\gamma+S\delta x)H(x,\tau)\}+$$

$$+E^T V'(S)R(S)\frac{\partial}{\partial x}\{(\gamma+S\delta x)H(x,\tau)\}+$$

$$+\frac{1}{2}E^T D(S)R(S)\frac{\partial^2 H(x,\tau)}{\partial x^2}\,. \qquad (23.5)$$

Подставляя выражение (20), после несложных преобразований получим

$$\frac{\partial H(x,\tau)}{\partial\tau}=E^T V(S)R'(S)\frac{\partial}{\partial x}\{(\gamma+S\delta x)H(x,\tau)\}-$$

$$-E^T V(S)h^{(1)}(S)\frac{\partial^2 H(x,\tau)}{\partial x^2}+$$

$$+E^T V'(S)R(S)\frac{\partial}{\partial x}\{(\gamma+S\delta x)H(x,\tau)\}+$$

$$+\frac{1}{2}E^T D(S)R(S)\frac{\partial^2 H(x,\tau)}{\partial x^2}\,, \qquad (23.6)$$

откуда

$$\frac{\partial H(x,\tau)}{\partial\tau}=\left(E^T V(S)R(S)\right)'\frac{\partial}{\partial x}\{(\gamma+S\delta x)H(x,\tau)\}+$$

$$+\frac{1}{2}E^T\left(D(S)R(S)-2V(S)h^{(1)}(S)\right)\frac{\partial^2 H(x,\tau)}{\partial x^2}\,. \qquad (23.7)$$

Теорема доказана.

Таким образом, случайный процесс $x(\tau)=\varepsilon i(\tau/\varepsilon^2)$, аппроксимирующий процесс $i(t)$ числа заявок в системе, является однородным диффузионным процессом с коэффициентом переноса $-(E^T V(S)R(S))'(\gamma+S\delta x)$ и коэффициентом диффузии

$$B^2(S)=E^T\left(D(S)R(S)-2V(S)h^{(1)}(S)\right). \qquad (24)$$

СТАБИЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ НЕУСТОЙЧИВЫХ СЕТЕЙ СЛУЧАЙНОГО ДОСТУПА, ЕЕ ОСНОВНЫЕ ВЕРОЯТНОСТНО-ВРЕМЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Из теоремы 4 следует, что плотность распределения вероятностей $H(x,\tau)$, значений диффузионного процесса $z(\tau)$ удовлетворяет уравнению Фоккера – Планка вида (22)

$$\frac{\partial H(x,\tau)}{\partial\tau}=-\left(-E^T V(S)R(S)\right)'\frac{\partial}{\partial x}\{(\gamma+S\delta x)H(x,\tau)\}+$$

$$+\frac{1}{2}E^T\left(D(S)R(S)+2V(S)h^{(1)}(S)\right)\frac{\partial^2 H(x,\tau)}{\partial x^2}. \qquad (25)$$

Решим это уравнение в условиях нахождения системы в стационарном режиме, то есть предполагается, что $H(x,\tau)=H(x)$. Уравнение (22) примет вид

$$\frac{1}{2}B^2(S)H''(x)+A(S)\{(\gamma+S\delta x)H(x)\}'=0, \qquad (26)$$

где $A(S)=\left(E^T V(S)R(S)\right)'$.

Принимая во внимание условие нормировки для плотности распределения, получим

$$H(x)=C\exp\left\{-\frac{2A(S)}{B^2(S)}\left(\gamma x+S\delta\frac{x^2}{2}\right)\right\}, \qquad (27)$$

где $$C=1\Bigg/\left(\int_0^1\exp\left\{-\frac{2A(S)}{B^2(S)}\left(\gamma x+S\delta\frac{x^2}{2}\right)\right\}dv\right),$$

а $R(u)$, $V(u)$, $B(u)$ определяются равенствами (15), (18) и (24) соответственно.

Таким образом, в (27) получена основная вероятностная характеристика рассматриваемых неустойчивых сетей передачи данных с динамическим протоколом случайного множественного доступа, так как $H(x)$ является плотностью распределения вероятностей процесса $x(\tau)$, аппроксимирующего $\varepsilon i(t/\varepsilon^2)$ – нормированное число заявок в источнике повторных вызовов. Используя полученную характеристику, можно определить все основные вероятностно-временные характеристики, которые нас интересуют.

Заметим также, что при условии большой загрузки $\delta\to 0$ стационарный режим существует только при $\gamma>0$, то есть при $\lambda\uparrow S$:

$$H(x)=C\exp\left\{-\frac{2A(S)}{B^2(S)}\gamma x\right\} \qquad (28)$$

– плотность распределения вероятностей процесса $x(\tau)$ в стационарном режиме при условии большой загрузки.

При условии критической загрузки $\delta=1$ стационарный режим существует всегда, при любом знаке параметра γ:

$$H(x)=C\exp\left\{-\frac{2A(S)}{B^2(S)}\left(\gamma x+S\frac{x^2}{2}\right)\right\} \qquad (29)$$

– плотность распределения вероятностей процесса $x(\tau)$ в стационарном режиме при условии критической загрузки.

ОДНОКАНАЛЬНАЯ СЕТЬ СЛУЧАЙНОГО МНОЖЕСТВЕННОГО ДОСТУПА С ОПОВЕЩЕНИЕМ О КОНФЛИКТЕ

Для иллюстрации общего подхода воспользуемся полученными результатами для исследования математической модели одноканальной сети с динамическим протоколом случайного множественного доступа с оповещением о конфликте, описание которой было приведено в начале статьи.

Используя уравнение (15) и условие нормировки (16), можем найти распределение вероятностей состояний канала. В нашем случае

$$K(S)=\begin{pmatrix}-(S+\sigma) & \mu & 1/a\\ S+\sigma & -(S+\sigma+\mu) & 0\\ 0 & S+\sigma & -1/a\end{pmatrix},$$

$$R(S)=\{R_0,R_1,R_2\}^T. \qquad (30)$$

Уравнение (15) приобретает следующий вид:

$$(S+\sigma)R_0=\mu R_1+\frac{1}{a}R_2,$$

$$(S+\sigma)R_1+\mu R_1=(S+\sigma)R_0,$$

$$\frac{1}{a}R_2=(S+\sigma)R_1, \qquad (31)$$

а условие нормировки (16) – $\sum_{j=0}^{2}R_j=1$. Решая данную систему, получим

$$R_0=\frac{S+\sigma+\mu}{(S+\sigma)^2a+2(S+\sigma)+\mu},$$

$$R_1=\frac{S+\sigma}{(S+\sigma)^2a+2(S+\sigma)+\mu},$$

$$R_2=\frac{(S+\sigma)^2a}{(S+\sigma)^2a+2(S+\sigma)+\mu}. \qquad (32)$$

Аналогично распределению вероятностей состояний канала, из уравнения (17) находим величину S, имеющую смысл пропускной способности сети передачи данных. Для этого достаточно подставить в уравнение (17) соответствующие векторы и матрицы:

$$V(S)=\begin{pmatrix}0 & -\mu & 0\\ -S & 0 & 0\\ 0 & -S & -S\end{pmatrix}, \qquad (33)$$

тогда уравнение (17) приобретает вид $S-\mu R_1(S)=0$. Учитывая результат, полученный для R_j, $j=0,1,2$, на предыдущем этапе, после несложных преобразований находим уравнение

$$S = \mu \frac{S+\sigma}{a(S+\sigma)^2 + 2(S+\sigma)+\mu} = f(S+\sigma), \qquad (34)$$

определяющее значение пропускной способности сети передачи данных.

Для исследования в уравнении (34) сделаем замену переменных $G = S+\sigma$. Тогда $S = G-\sigma = l(G)$, а уравнение (34) приобретет следующий вид:

$$l(G) = f(G). \qquad (35)$$

Поведение функций $f(G)$ и $l(G)$ при параметрах $\mu = 10$, a=1/7, $\sigma_{\text{opt}} = 6{,}089$ показано на рис. 1.

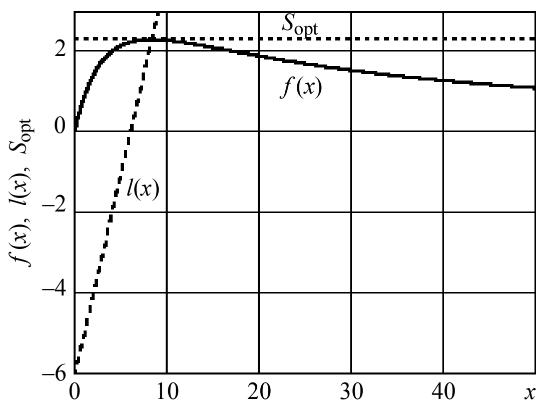

Рис. 1. Оптимизация пропускной способности

Проведем оптимизацию величины S по параметру σ:

$$f'(G) = \mu \frac{\mu - aG^2}{(aG^2 + 2G + \mu)^2} = 0,$$

следовательно, $\mu = aG^2$ и $G = \sqrt{\mu/a}$.

Таким образом, максимальное значение пропускной способности S достигается при $G^* = \sqrt{\mu/a}$, при этом

$$S_{\text{opt}} = f\left(\sqrt{\mu/a}\right) = \mu \frac{\sqrt{\mu}}{2\mu\sqrt{a} + 2\sqrt{\mu}},$$

$$\sigma_{\text{opt}} = G^* - f(G^*) = \sqrt{\mu/a} - f\left(\sqrt{\mu/a}\right). \qquad (36)$$

Отсюда видно, что при $a \to 0$, то есть когда средняя продолжительность сигнала оповещения о конфликте стремится к нулю, значение пропускной способности $S_{\text{opt}} \to \mu/2$. А при $\mu \to \infty$, то есть среднее время обслуживания стремится к нулю, $S_{\text{opt}} \to \infty$.

Вектор $h^{(1)}(S)$ определяем из формулы (21), откуда

$$h_0^{(1)}(S) = \frac{S+\sigma+\mu}{S+\sigma} h_1^{(1)}(S) - \frac{S}{S+\sigma} R_0(S),$$

$$h_2^{(1)}(S) = a(S+\sigma)h_1^{(1)}(S) + aS(R_1(S) + R_2(S)). \qquad (37)$$

Подставляя полученные выражения в (24) и учитывая

$$D(S) = \begin{pmatrix} 0 & \mu & 0 \\ S & 0 & 0 \\ 0 & S & S \end{pmatrix}, \qquad (38)$$

получим

$$B^2(S) = 2\left(S + aS^2(R_1(S) + R_2(S)) - \frac{S^2}{S+\sigma} R_0 \right),$$

$$A(S) = 1 - \mu \frac{\mu - a(S+\sigma)^2}{\left(a(S+\sigma)^2 + 2(S+\sigma) + \mu\right)^2}. \qquad (39)$$

При указанных выше параметрах вид плотности экспоненциального распределения (28) при $\gamma = 1$ показан на рис. 2, вид плотности усеченного нормального распределения (29) при $\gamma = 1$ и $\gamma = -1$ – на рис. 3 и рис. 4 соответственно.

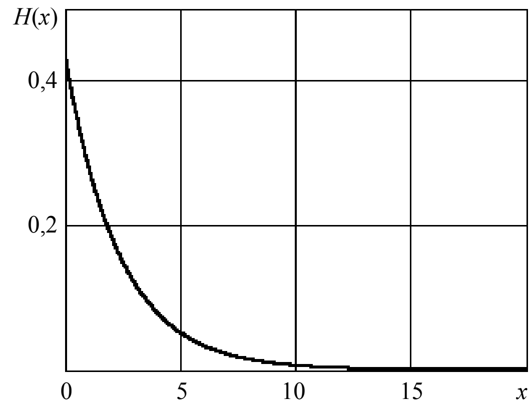

Рис. 2. Плотность распределения вероятностей значений процесса $x(\tau)$ в условии большой загрузки при γ = 1

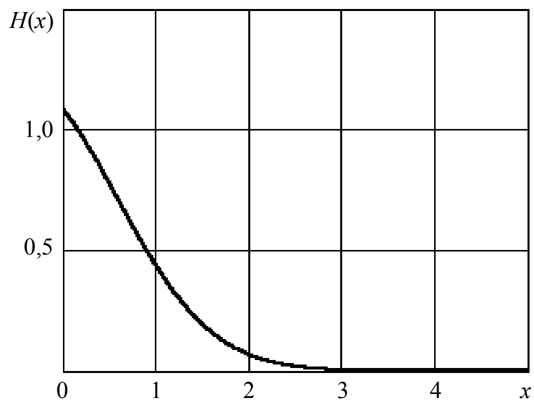

Рис. 3. Плотность распределения вероятностей значений процесса $x(\tau)$ в условии критической загрузки при γ = 1

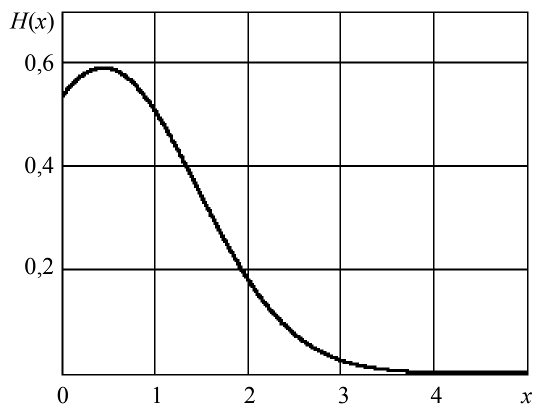

Рис. 4. Плотность распределения вероятностей значений процесса $x(\tau)$ в условии критической загрузки при γ = –1

Таким образом, видно, что, применяя предложенный в статье подход, можно исследовать достаточно эффективно большой класс моделей сетей передачи данных с динамическим протоколом случайного множественного доступа.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен общий подход к асимптотическому исследованию марковских моделей сетей передачи данных случайного множественного доступа, управляемых динамическим протоколом при различных предельных условиях. Описаны возможные варианты предельных условий. Детально рассмотрен асимптотический анализ в условиях критической и большой загрузок. Построен однородный диффузионный процесс, аппроксимирующий процесс изменения числа заявок в источнике повторных вызовов во всей области изменения состояний сети, и найдены его коэффициенты переноса и диффузии. Найдены распределения вероятностей состояний модели, что позволяет определять основные вероятностно-временные характеристики сетей случайного доступа, функционирующих в различных условиях загрузки канала.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бертсекас Д., Галагер Р.* Сети передачи данных. М.: Мир, 1989.
2. *Флинт Д.* Локальные сети ЭВМ. М.: Финансы и статистика, 1986.
3. *Баруча-Рид А.Т.* Элементы теории марковских процессов и их приложения. М.: Наука, 1969.
4. *Гнеденко Б.В.* Введение в теорию массового обслуживания. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1987.
5. *Лившиц Б.С., Пшеничников А.П., Харкевич А.А.* Теория телетрафика. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Связь, 1979.
6. *Саати Т.Л.* Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. 2-е изд. М.: Сов. радио, 1971.
7. *Назаров А.А., Цой С.А.* Общий подход к исследованию марковских моделей сетей передачи данных, управляемых статическими протоколами случайного множественного доступа // Автоматика и вычислительная техника. 2004. № 4. С. 73 – 85.
8. *Назаров А.А.* Асимптотический анализ марковизируемых систем. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991.
9. *Назаров А.А.* Устойчивое функционирование нестабильных сетей связи с протоколом случайного доступа // Проблемы передачи информации. 1997. № 2. С. 101 – 111.
10. *Назаров А.А., Никитина М.А.* Применение условий эргодичности цепей Маркова к исследованию существования стационарных режимов в сетях связи // Автоматика и вычислительная техника. 2003. № 1. С. 59 – 66.
11. *Назаров А.А., Шохор С.Л.* Исследование управляемого несинхронного множественного доступа в спутниковых сетях связи с оповещением о конфликте // Проблемы передачи информации. 2000. № 1. С. 77 – 89.
12. *Назаров А.А., Шохор С.Л.* Эргодичность цепей Маркова с однородными ленточными графами и их применение к задачам анализа условий существования стационарных режимов в сетях с динамическими протоколами случайного множественного доступа // Проблемы передачи информации. 2001. № 2. С. 3 – 16.

Статья представлена кафедрой теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Кибернетика» 20 мая 2005 г.