УДК 551.551

С.Н. Степаненко, *д.ф.-м.н.,* **В.Г.Волошин,** *к.г.н.* **С.В.Типцов,** *н.с.*
Одесский государственный экологический университет

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОЙ ДИФФУЗИИ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОГО ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА

Представлено новое решение полного уравнения турбулентной диффузии, которое, в отличие от предыдущих, учитывает взаимодействие составляющих коэффициента диффузии и скорости ветра в направлении осей ($i = x, y, z$) декартовой системы координат при условии, что составляющие принимают любые значения $k = \nu + k_i$ и $u_i \geq 0$ (где ν, k_i – молекулярный и турбулентный коэффициент диффузии соответственно, u_i – скорость ветра). Расчетные формулы позволяет получать поля концентраций при любых термодинамических состояниях атмосферы и скоростях ветра, в том числе и при штиле без аппроксимаций масштабов диффузии от расстояния.

Ключевые слова: *уравнение турбулентной диффузии, рассеяние примеси в атмосфере, точечный источник, коэффициенты диффузии, распределение концентрации, отражение и поглощение примеси поверхностью.*

Введение. Для оценки загрязнения атмосферы вредными выбросами промышленных предприятий применяются модели атмосферной диффузии различной степени сложности и типа. До расстояний 50 км от источника выброса во многих странах применяется гауссова модель факела, составной частью которой являются экспериментальные функции расстояния для дисперсий гауссовых распределений. Модели гауссового типа доминируют в большинстве нормативных документов, регламентируя порядок и правила расчета приземных концентраций и допустимые нормы выброса [10,11,12].

В гауссовых моделях предполагается, что при сохранении характера термодинамической устойчивости атмосферы, постоянстве направления и скорости ветра рассеяние нейтрально плавучей примеси в горизонтальном и вертикальном направлении происходит независимо друг от друга, а учет физических факторов, влияющих на перенос, рассеяние и осаждение примеси, выполнется введением ряда поправок. Однако, для расчета приземных концентрации при слабых ветрах или штиле применение гауссовых моделей невозможно, что резко снижает их применение в прикладных целях [10].

При моделировании процессов распространения примесей в трехмерной области предпочтение, отдается аналитическому или численному решению полуэмпирического уравнения турбулентной диффузии в декартовых координатах [1,2,4,7]. В этом случае линеаризованая модель распространения примеси учитывает характерные основные особенности процесса, а именно: перенос примеси в направлении потока, молекулярную и турбулентную диффузию, конвекцию, пространственно-временную неоднородность параметров рассеяния, взаимодействие примеси с подстилающей поверхностью и верхней границей слоя перемешивания, сухое и влажное осаждение на подстилающую поверхность, тансформацию примеси и другие факторы.

В данной работе представлено новое решение полуэмпирического уравнения турбулентной диффузии, которое, в отличие от предыдущих решений, учитывает взаимодействие составляющих коэффициента диффузии и скорости ветра в направлении осей ($i = x, y, z$) декартовой системы координат при условии, что составляющие принимают значения $k = \nu + k_i$ и $u_i \geq 0$ (где ν, k_i – молекулярный и турбулентный коэффициент диффузии соответственно, а u_i – скорость ветра), что позволяет получить простанственное поле концентраций при любых термодинамических состояниях атмосферы и скоростях ветра.

Объект исследования - полуэмпирическое уравнение турбулентной диффузии (УТД).

Цель работы - построение расчетных формул приемлемой точности для оценки разовых концентраций вредных примесей в любой точке пространства при любых метеорологических условиях, различных взаимодействиях примеси с поверхностью и пространственных изменениях параметров диффузии в пределах локальной области распространения примеси.

В статье мы сочли возможным не приводить подробные математическое решения УТД, а сосредоточиться на анализе новых расчетных формул и их сопоставлении с широко применяемыми в мировой практике моделями.

Метод исследования. Рассмотрим задачу нахождения функции концентрации $q(t,x,y,z)$, которая образуется при мгновенном выбросе в момент времени t_k из точечного источника, размещенного в точке пространства с координатами (x_s, y_s, z_s). Интенсивность источника считается заданной величиной $Q(t_k)$.

Линеаризованая модель распространения примеси имеет математическое решение при однородности проекций вектора скорости по пространственным координатам и задается уравнением параболического типа

$$\frac{\partial q}{\partial t}+u(t)\frac{\partial q}{\partial x}+v(t)\frac{\partial q}{\partial y}+w(t)\frac{\partial q}{\partial z}=K_x(t)\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}+K_y(t)\frac{\partial^2 q}{\partial y^2}+K_z(t)\frac{\partial^2 q}{\partial z^2}- \\ -\lambda(t)\cdot q(t)+Q(t)\cdot\delta(t-t_k)\cdot\delta(x-x_s)\cdot\delta(y-y_s)\cdot\delta(z-z_s) \quad , \tag{1}$$

где Q – масса примеси, выделившейся при $t=0$ в начале координат (г); $Q(t)\cdot\delta(x)\cdot\delta(y)\cdot\delta(z-z_s)$ – δ- функция точечного источника; K_x, K_y, K_z – составляющие коэффициента диффузии K (м^2/с) для соответствующих координатных осей; u, v, w – проекции скорости U (м/с) переноса примеси для соответствующих координатных осей; q – средняя концентрация примеси (г/м^3); $\lambda(t)$ – скорость потери (стока) примеси (м/с).

Начальные условия выбираются по содержанию фундаментального решения $q(t_k,x,y,z)=0$, во всех точках кроме начала координат и $q(t,x,y,z)=0$, если $x,y,z\to(-\infty;\infty)$.

В общем виде решение уравнения (1) выражает закономерности распространения примеси в неограниченном пространстве, когда коэффициенты диффузии (турбулентности) $K_x(t), K_y(t), K_z(t)$ и скорость стока примеси $\lambda(t)$ считаются известными функциями времени, а скорость перемещения центра тяжести облака примеси в направлении соотетствующих осей определяется составляющими вектора ветра $u(t), v(t), w(t)$.

Для уменьшения количества вычислений можно расщепить трехмерную задачу на последовательность одномерных задач таким образом, чтобы сохранялась и структура решения и основные его свойства [3]. В этом случае, за счет однородных граничных условий, фундаментальное решение пространственного уравнения можно представить произведением фундаментальных решений соответствующих задач

$$\frac{\partial f\left(t,x_i\right)}{\partial t}=K_{x_i}\left(t\right)\frac{\partial^2 f\left(t,x_i\right)}{\partial x_i^2}-u_i\left(t\right)\frac{\partial f\left(t,x_i\right)}{\partial x_i}+\delta(t-t_k)\delta(x_i-x_k),\quad f\left(t_k,x_i\right)=0 \qquad (2)$$

по каждой пространственной координате $i=1,2,3$.

Слагаемое $\lambda\left(t\right)\cdot q\left(t\right)$ уравнения (1), характеризующее потерю примеси в процессе ее диффузии, можно исключить из решения заменой функции

$$q(t,x,y,z)=e^{-\int\limits_{t_k}^{t}\lambda(t)dt}f(t,x).$$

Для решения уравнения (2) изменим систему координат:

$$\left|\begin{aligned}&\xi=\int\limits_{t_k}^{t}K_x\left(t\right)dt=\eta\left(t\right)\\ &\vartheta=x-\int\limits_{t_k}^{t}u\left(t\right)dt\end{aligned}\right. ; \qquad (3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial \xi}\cdot K_x(t)-\frac{\partial f}{\partial \vartheta}u\left(t\right);\ \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial \vartheta};\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2}$$

и, выполнив подстановку с учетом замены функции, получим

$$\frac{\partial f'}{\partial \xi}=\frac{\partial^2 f'}{\partial \vartheta^2}+\frac{e^{\int\limits_{t_k}^{\eta^{-1}(\xi)}\lambda(t)dt}}{K_x(\eta^{-1}\left(\xi\right))}\delta\left(\eta^{-1}\left(\xi\right)\right)\delta\left(\vartheta-x_s+\int\limits_{t_k}^{\eta^{-1}(\xi)}u\left(t\right)dt\right). \qquad (4)$$

Выполнив преобразование Фурье по переменной ϑ, получим

$$\frac{d\hat{f}}{d\xi}=-p^2\hat{f}+\frac{e^{\int\limits_{t_k}^{\eta^{-1}(\xi)}\lambda(t)dt}}{K_x(\eta^{-1}\left(\xi\right))}\delta\left(\eta^{-1}\left(\xi\right)\right)e^{ip\left(x_s-\int\limits_{t_k}^{\eta^{-1}(\xi)}u(t)dt\right)} \qquad (5)$$

и заметим, что по определению $\eta\left(\xi\right)$ есть производная $\left(\eta^{-1}\left(\xi\right)\right)^{/}=\frac{1}{K_x\left(\eta^{-1}\left(\xi\right)\right)}$,

следовательно

$$e^{p^2\xi}\hat{f}=\int\limits_{0}^{\xi}e^{p^2\xi}e^{\int\limits_{t_k}^{\eta^{-1}(\xi)}\lambda(t)dt}\delta\left(\eta^{-1}\left(\xi\right)\right)e^{ip\left(x_s-\int\limits_{t_k}^{\eta^{-1}(\xi)}u(t)dt\right)}d\eta^{-1}\left(\xi\right)=e^{p^2\eta\left(t_k\right)+ipx_s}. \qquad (6)$$

Учитывая $\eta\left(t_k\right)=0$, находим

$$\hat{f}\left(\xi, p\right)=e^{-p^2\xi+ipx_s}.$$

Решение совпадает со стандартным фундаментальным решением уравнения теплопроводимости с точностью до смещения

$$f'\left(\xi,\vartheta\right)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\xi}}e^{-\frac{\left(\vartheta-x_s\right)^2}{4\xi}}. \tag{7}$$

Выполнив обратную замену для функции и координат, получим

$$f\left(t,x_i\right)=\frac{e^{-\int\limits_{t_k}^{t}\lambda(t)dt}}{2\sqrt{\pi\int\limits_{t_k}^{t}K_{x_i}\left(t\right)dt}}\,e^{-\frac{\left(\vartheta-x_{is}-r(t)\right)^2}{4\int\limits_{t_k}^{t}K_{x_i}\left(t\right)dt}}, \tag{8}$$

где $r(t)$ выражает перемещение центра тяжести облака примеси за период диффузии

$$r\left(t\right)=\int\limits_{t_k}^{t}u_i\left(t\right)dt.$$

Уравнение (8) выражает решение линейного оператора, заданного уравнением (2), при очевидных свойствах диффузионного процесса

$$\lim_{x_i\to\pm\infty}f\left(t,x\right)=\mathbf{0},$$

которые отражают единственность фундаментального решения задачи Коши при заданных граничных условиях.

Отметим, что, приняв $\sigma_i^2\left(t\right)=\int\limits_{t_k}^{t}K_{ix}(t)dt$, и пользуясь тем, что по содержанию задачи положение центра тяжести облака примеси определяется $x_c(t)=x_{is}+\int\limits_{t_k}^{t}u_i\left(t\right)dt$, окончательно запишем

$$f\left(t,x\right)=\frac{e^{-\int\limits_{t_k}^{t}\lambda(t)dt}}{2\sqrt{\pi}\sigma_{ix}\left(t\right)}\,e^{-\frac{\left(x_i-x_{ic}\left(t\right)\right)^2}{4\sigma_{ix}^2\left(t\right)}}. \tag{9}$$

Аналогичные решения будут соответствовать задачи Коши и для других координат, при отсутствии множителя содержащего $\lambda(t)$, поскольку соответствующий ему член уравнения учитывается один раз и, как видно, не влияет на вид основного уравнения и на граничные условия.

Результаты исследования и их анализ. Решение уравнения (1) по вертикальной координате обладает особенностями, поскольку распространение примеси в этом направлении зависят от термодинамической структуру пограничного слоя атмосферы и взаимодействия примеси с его границами [1,2,4,7].

Поэтому, сохраняя структуру решения и его основные свойства, упростим задачу до решения однородного нестационарного трехмерного уравнения с заданными значениями составляющих скорости u, v, w и коэффициента диффузии K_x, K_y, K_z, которые могут быть получены, например, из решений системы уравнений атмосферного пограничного слоя. Такое решение будет отличаться от структуры фундаментального решения тем, что оно представляется не произведением функций, выраженных формулой (2), а суммой произведений функций выраженных решением однородного уравнения

$$\frac{\partial q}{\partial t}+u\frac{\partial q}{\partial x}+v\frac{\partial q}{\partial y}+w\frac{\partial q}{\partial z}=K_x\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}+K_y\frac{\partial^2 q}{\partial y^2}+K_z\frac{\partial^2 q}{\partial z^2}-Q\cdot\delta(x)\delta(y)\delta(z-h), \qquad (10)$$

при $x, y \in (-\infty;\infty)$, $z \in (z_0;\infty)$.

Поскольку диффузия примеси рассматривается в пограничном слое атмосферы, то взаимодействие примеси с нижней границей слоя зададим следующим образом:

$$K_z\frac{\partial q}{\partial z}+w\cdot q+\beta\cdot q=0, \quad \text{при } z=z_0,$$

$$\lim_{x,y\to\pm\infty} q(t,x,y,z)=0\ . \qquad (11)$$

Положение нижней границы z_0 совпадает с высотой слоя шероховатлости поверхности. По достижению нижней границы оседающая или невесомая примесь взаимодействует с ней и поток примеси либо отражается, β=0 (м/с), либо поглощается, $\beta\to\infty$. Эти взаимодействия учитываются при определении вертикального профиля концентрации примеси.

Положение верхней границы слоя рассеяния примеси соответствует, как правило, высоте слоя перемешивания. Взаимодействие оседающей или невесомой примеси с этой границей оказывает слабое влияние на распределение концентрации примеси у подстилающей поверхности [1,2,5], так как, в первом случае лишь малая часть оседающей примеси может достигнуть верхней границы, а во втором - велика вероятность рассеяния примеси в верхней части пограничного слоя.

Поэтому однородное смешанное граничное условие для верхней границы

$$K_z\frac{\partial q}{\partial z}+w\cdot q+\alpha\cdot q=0, \quad \text{при } z=h, \qquad (12)$$

логично заменить более естественным условием

$$\lim_{z\to\infty} q(t,x,y,z)=0\ , \qquad (13)$$

что так же упрощает решение задачи.

Вклад неучтенной части примеси, при отражении от верхней границы, можно компенсировать фоновой концентрацией постоянно присутствующей в атмосфере, а граничное условие (12) можно вводить при наличии “запирающего” слоя температурной инверсии.

Для точечного источника непродолжительного действия (мгновенного) начальные условия для которого записываются в виде $uq = Q\delta(x)\delta(y)\delta(z-h)$, уравнение (10) имеет фундаментальное решение в полупространстве $z_0 \le z < \infty$ в виде

$$q(t,x,y,z) = \frac{e^{-\frac{(x-ut)^2}{4K_x t}-\frac{(y-vt)^2}{4K_y t}}}{8\pi\sqrt{\pi K_z K_y K_z t^3}}\left(e^{-\frac{(z-h-wt)^2}{4K_z t}} + e^{-\frac{w(h-z_0)}{K_z}-\frac{(z+h-2z_0-wt)^2}{4K_z t}}\right)+$$
$$+\frac{e^{-\frac{(x-ut)^2}{4K_x t}-\frac{(y-vt)^2}{4K_y t}}}{8\pi\sqrt{\pi K_z K_y K_z t^3}}\frac{w+2\beta}{K_z}\int_0^\infty\left(e^{-\frac{w(h-z_0)}{K_z}-\frac{(z+h-2z_0-wt+\xi)^2}{4K_z t}+\frac{\alpha\xi}{K_z}}\right)d\xi \quad , \qquad (14)$$

где h высота источника находящегося в точке (0, 0, h) с интенсивностью равной единице.

Формула (14), по своей структуре близка к формуле М.Е. Берлянда [1] для мгновенного источника при нестационарной диффузии.

Решение уравнения (10) ранее многими авторами автоматически переносилось на решение стационарного уравнения ($\frac{\partial q}{\partial t} \equiv 0$), которое имеет вид

$$u\frac{\partial q}{\partial x} + w\frac{\partial q}{\partial z} = K_y\frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + K_z\frac{\partial^2 q}{\partial z^2} \quad . \qquad (15)$$

При решении уравнения (15) предполагалось, что диффузия примеси существует только в поперечном и вертикальном направлении к вектору переноса, а рассеяние примеси по направлению движения отсутствует. Кроме этого “априори” предполагалось, что процессы горизонтальной (по оси y) и вертикальной (по оси z) диффузии независимы. Эти предположения упрощали задачу, но искажали саму суть процесса.

Поэтому полный анализ закономерностей распространения примеси для стационарного режима можно получить лишь из фундаментального решения нестационорного уравнения (10). Для непрерывно действующего точечного источника, необходимо выполнить свертку функции с фундаментальным решением по переменной времени, т.е.

$$q_1(t,x,y,z)=\int_0^t \frac{e^{-\frac{(x-u(t-\tau))^2}{4K_x(t-\tau)}-\frac{(y-v(t-\tau))^2}{4K_y(t-\tau)}}}{8\pi\sqrt{\pi K_z K_y K_z (t-\tau)^3}}\left(e^{-\frac{(z-h-w(t-\tau))^2}{4K_z(t-\tau)}}+e^{-\frac{w(h-z_0)}{K_z}-\frac{(z+h-2z_0-w(t-\tau))^2}{4K_z(t-\tau)}}\right)Q(\tau)\,d\tau+$$

$$+\frac{w+2\beta}{K_z}\int_0^t \frac{e^{-\frac{(x-u(t-\tau))^2}{4K_x(t-\tau)}-\frac{(y-v(t-\tau))^2}{4K_y(t-\tau)}}}{8\pi\sqrt{\pi K_z K_y K_z (t-\tau)^3}}\int_0^\infty\left(e^{-\frac{w(h-z_0)}{K_z}-\frac{(z+h-2z_0-w(t-\tau)+\xi)^2}{4K_z(t-\tau)}+\frac{\alpha\xi}{K_z}}\right)d\xi\, Q(\tau)\,d\tau\ . \tag{16}$$

Если существует предел функции $Q(t)$ при $t\to\infty$, то уравнение (16) будет описывать стационарное распределение примеси. Тогда для постоянно действующего источника $Q(t)\equiv Q(\text{const})$ нетрудно получить соответствующую стационарную функцию в виде

$$q_2(x,y,z)=\lim_{t\to\infty} q_1(t,x,y,z)=\frac{Qe^{\frac{ux}{2K_x}+\frac{vy}{2K_y}+\frac{w(z-h)}{2K_z}}}{4\pi\sqrt{K_xK_yK_z}}\times$$

$$\times\left(\frac{e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2}{K_x}+\frac{y^2}{K_y}+\frac{(z-h)^2}{K_z}}\cdot\sqrt{\frac{u^2}{K_x}+\frac{v^2}{K_y}+\frac{w^2}{K_z}}}}{\sqrt{\frac{x^2}{K_x}+\frac{y^2}{K_y}+\frac{(z-h)^2}{K_z}}}+\frac{e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2}{K_x}+\frac{y^2}{K_y}+\frac{(z+h-2z_0)^2}{K_z}}\cdot\sqrt{\frac{u^2}{K_x}+\frac{v^2}{K_y}+\frac{w^2}{K_z}}}}{\sqrt{\frac{x^2}{K_x}+\frac{y^2}{K_y}+\frac{(z+h-2z_0)^2}{K_z}}}\right)+ \tag{17}$$

$$+\frac{w+2\beta}{K_z}\cdot\frac{Qe^{\frac{ux}{2K_x}+\frac{vy}{2K_y}+\frac{w(z-h)}{2K_z}}}{4\pi\sqrt{K_xK_yK_z}}\int_0^\infty\frac{e^{\frac{w+2\beta}{2K_z}\xi-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2}{K_x}+\frac{y^2}{K_y}+\frac{(z+h-2z_0-\xi)^2}{K_z}}\cdot\sqrt{\frac{u^2}{K_x}+\frac{v^2}{K_y}+\frac{w^2}{K_z}}}}{\sqrt{\frac{x^2}{K_x}+\frac{y^2}{K_y}+\frac{(z+h-2z_0-\xi)^2}{K_z}}}d\xi\ .$$

Полученная формула выражает фундаментальное решение стационарного уравнения турбулентной диффузии

$$u\frac{\partial q}{\partial x}+v\frac{\partial q}{\partial y}+w\frac{\partial q}{\partial z}=K_x\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}+K_y\frac{\partial^2 q}{\partial y^2}+K_z\frac{\partial^2 q}{\partial z^2}-Q\cdot\delta(x)\delta(y)\delta(z-h), \tag{18}$$

при граничных условиях (11).

Если теперь направить декартову систему координат, так чтобы ось абсцисс совпадала с направлением переноса примеси и пренебречь диффузией примеси в направлении переноса, получим уравнение (15), решение которого ведет к простой, но приближенной функции, которая соответствует нормальному гауссовскому распределению концентрации. Можно заметить, что при малых скоростях переноса член уравнения (18), содержащий K_x, играет существенную роль.

Найденное фундаментальное решение УТД в виде формулы (17) является общим по сравнению с иными решениями, которые являются ее частными случаями, так (17) можно легко упростить до известной формулы гауссовой модели диффузии.

Например, для невесомой примеси и отсутствия вертикальных движений в пограничном слое атмосферы ($w = 0$) первые два слагаемых уравнения (17) имеют одинаковый порядок, а третье исключается в связи с полным отражением примеси от поверхности ($\beta = 0$).

На расстояниях $x >> |y| + |z - h|$ параметры гауссовой модели имеют стабильный характер и формула (17) допускает соответствующие приближения. При очевидном равенстве горизонтальных составляющих коэффициента турбулентности $K_x = K_y = K_V$ воспользуемся разложением в ряд Тейлора биномиальной функции основного члена уравнения (первое слагаемое правой части)

$$q(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi K\sqrt{K_z}} \frac{e^{\frac{ux}{2K} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2}{K} + \frac{y^2}{K} + \frac{(z-h)^2}{K_z}} \cdot \sqrt{\frac{u^2}{K}}}}{\sqrt{\frac{x^2}{K} + \frac{y^2}{K} + \frac{(z-h)^2}{K_z}}} \quad , \text{ при } \quad v = w = 0 \; . \qquad (19)$$

Выполнив преобразования, получим

$$q(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi x\sqrt{K_z K}} \frac{e^{\frac{ux}{2K} - \frac{ux}{2K}\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2} + \frac{(z-h)^2 K}{x^2 K_z}}}}{\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2} + \frac{(z-h)^2 K}{x^2 K_z}}} \cong$$

$$\cong \frac{Q}{4\pi x\sqrt{K_z K}} \frac{e^{\frac{ux}{2K}\left(-\frac{y^2}{2x^2} - \frac{(z-h)^2 K}{2x^2 K_z}\right)}}{\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2} + \frac{(z-h)^2 K}{x^2 K_z}}} \cong \frac{Q\, e^{\frac{u}{2K}\left(-\frac{y^2}{2x} - \frac{(z-h)^2 K}{2xK_z}\right)}}{4\pi x\sqrt{K_z K}} \; . \qquad (20)$$

Определив масштабные коэффициенты σ_y, σ_z по формулам [2,4,8]:

$$\sigma_y{}^2 = \frac{2K \cdot x}{u} \;\Leftrightarrow\; K = \frac{u\,\sigma_y{}^2}{2x};$$
$$\sigma_z{}^2 = \frac{2K_z \cdot x}{u} \;\Leftrightarrow\; K_z = \frac{u\,\sigma_z{}^2}{2x} \qquad (21)$$

и, подставив их в приближение (20) , получим функцию

$$q\left(x,y,z\right)\cong\frac{Q\,e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y}-\frac{\left(z-h\right)^2}{2\sigma_z}}}{2\pi U\,\sigma_y\sigma_z},$$

которая и выражает гауссовую модель переноса и рассеяния примеси.

Таким же образом можно преобразовать и второе слагаемое

$$q\left(x,y,z\right)\cong\frac{Q\cdot e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y}-\frac{\left(z+h-2z_0\right)^2}{2\sigma_z}}}{2\pi U\sigma_y\sigma_z}.$$

Объединив их, окончательно получим

$$q\left(x,y,z\right)\cong\frac{Q}{2\pi U\,\sigma_y\sigma_z}\left(e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y}-\frac{\left(z-h\right)^2}{2\sigma_z}}+e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y}-\frac{\left(z+h-2z_0\right)^2}{2\sigma_z}}\right).\qquad(22)$$

Формула в виде (22) и является основной расчетной формулой, в так называемых моделях гауссового типа [10,11].

Видно, что при небольших расстояниях от источника и небольших скоростях ветра или штиле, формула (17) дает возможность найти точное решение без всяких ограничений на скорость и с учетом взаимодействия диффузии во всех направлениях, тогда как формула гауссовой модели (22) позволяет найти только приближенные их значения.

Третий член формулы (17) учитывает изменение приземной концентрации для оседающей тяжелой примеси и частичное ее поглощение поверхностью. Для исследования влияния поглощения необходимо найти асимптотические оценки для интегрального члена формулы (17).

Нетрудно получить:

$$\int_0^\infty\frac{e^{\frac{w+2\beta}{2K_z}\xi-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2}{K}+\frac{\left(z+h-2z_0+\xi\right)^2}{K_z}}\cdot\sqrt{\frac{u^2}{K}+\frac{w^2}{K_z}}}}{\sqrt{\frac{x^2}{K}+\frac{\left(z+h-2z_0+\xi\right)^2}{K_z}}}d\xi>\frac{2K_z e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2}{K}+\frac{\left(z+h-2z_0\right)^2}{K_z}}\sqrt{\frac{u^2}{K}+\frac{w^2}{K_z}}}}{\left(z+h-2z_0\right)\sqrt{\frac{u^2}{K}+\frac{w^2}{K_z}}-2\beta\sqrt{\frac{x^2}{K}+\frac{\left(z+h-2z_0\right)^2}{K_z}}};$$

(23)

$$\int_0^\infty\frac{e^{\frac{w+2\beta}{2K_z}\xi-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2}{K}+\frac{\left(z+h-2z_0+\xi\right)^2}{K_z}}\cdot\sqrt{\frac{u^2}{K}+\frac{w^2}{K_z}}}}{\sqrt{\frac{x^2}{K}+\frac{\left(z+h-2z_0+\xi\right)^2}{K_z}}}d\xi<\frac{2K_z e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2}{K}+\frac{\left(z+h-2z_0\right)^2}{K_z}}\sqrt{\frac{u^2}{K}+\frac{w^2}{K_z}}}}{\left(\sqrt{K_z}\sqrt{\frac{u^2}{K}+\frac{w^2}{K_z}}-2\beta-w\right)\sqrt{\frac{x^2}{K}+\frac{\left(z+h-2z_0\right)^2}{K_z}}}.$$

При большом значении коэффициента поглощения β обе оценки близки, но когда $\beta \to 0$ они существенно различаются между собой. Более точной оценкой является первая, что позволяет в формуле (17) заменить соответствующий интегральный член и переписать формулу в виде

$$q_3(x,y,z) = \frac{Q\, e^{\frac{ux}{2K_x}+\frac{w(z-h)}{2K_z}}}{4\pi K\sqrt{K_z}} \times$$

$$\times\left(\frac{e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2}{K}+\frac{(z-h)^2}{K_z}}\cdot\sqrt{\frac{u^2}{K}+\frac{w^2}{K_z}}}}{\sqrt{\frac{x^2}{K}+\frac{(z-h)^2}{K_z}}} + \frac{e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2}{K}+\frac{(z+h-2z_0)^2}{K_z}}\cdot\sqrt{\frac{u^2}{K}+\frac{w^2}{K_z}}}}{\sqrt{\frac{x^2}{K}+\frac{(z+h-2z_0)^2}{K_z}}} \right)+$$

$$+\frac{Q\cdot w\cdot e^{\frac{ux}{2K}+\frac{w(z-h)}{2K_z}}}{2\pi K\sqrt{K_z}} \times \left(\frac{e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2}{K}+\frac{(z+h-2z_0)^2}{K_z}}\cdot\sqrt{\frac{u^2}{K}+\frac{w^2}{K_z}}}}{(z+h-2z_0)\sqrt{\frac{u^2}{K}+\frac{w^2}{K_z}}} \right), \qquad (24)$$

при условии полного отражения $\beta=0$ и $y=0$.

В уравнении (24), так же как и в других уравнениях, вертикальная составляющая w представляется в виде суммы скоростей гравитационного оседания примеси w_g и движения среды в вертикальном направлении w_a, т.е. $W = w_g + w_a$. По сути, если $w_a = 0$, то все составляющие уравнения (24), содержащие вертикальную скорость w, учитывают влияние гравитационного оседания w_g на распределение концентрации $q_3(x,y,z)$.

Для тяжелой примеси, когда присутствует и поглощение поверхностью $\beta \neq 0$, бесконечные границы интеграла в (23) можно заменить конечными без загрубления точности, поскольку подынтегральная экспонента быстро спадает к нулю. Пренебрегать поглощением не имеет смысла, поскольку при изменении коэффициента в допустимых пределах, концентрация может отличаться на порядок от основного члена на поверхности взаимодействия.

Отметим еще одну особенность формулы (17). Если все составляющие скорости ветра равны нулю (штиль) $u = v = w = 0$, то уравнение (17) принимает вид

$$q(x,y,z) \cong \frac{Q}{4\pi x\, K} \quad ,$$

где K можно интерпретировать как сумму коэффициентов турбулентной и молекулярной диффузии $K = \nu + K_i$, а если $x = 0$, то приходим к одному из начальных условий для точечного источника, а именно $q \to \infty$ при $x \to 0$.

При исследовании максимума концентрации можно выделить зависимость точки максимума $x_{\max}$ не только от скорости переноса u и коэффициента вертикальной турбулентности K_z, но и от коэффициента горизонтальной турбулентности *К*, даже для легкого примеси. Кроме этого за счет однородности коэффициентов диффузии в горизонтальных направлениях, вычисление концентрации можно проводить в произвольной системе координат, определяя лишь проекции скорости переноса на избранные оси.

Заключение. Формулы (17) и (24) учитывают взаимодействие составляющих диффузии во всех направлениях, и дают возможность получать точное решение УТД без ограничений на скорость переноса и расстояние от источника.

Применение предложенных расчетных формул возможно, если известны средние коэффициенты турбулентности и их зависимости от высоты z и термодинамического состояния атмосферы. Компоненты скорости также зависят от высоты, но поскольку в уравнении (1) они относятся к членам, которые содержат производные лишь первого порядка, можно с помощью обратного оператора внести необходимую поправку для произвольной их функциональной зависимости от высоты.

Распределение концентрации примеси по оси 0х, рассчитаное по формуле (17) или (24) полностью совпадают с расчетами по гауссовым моделям, если коэффициенты $K_{y,}\ K_z$ определены по формулам (21), а $\sigma_y(x)$, $\sigma_z(x)$ аппроксимированы известными зависимостями [10,11,12]. Аналогичное, но более точное распределение, можно получить если коэффициенты $K_{y,}\ K_z$ зависят от времени диффузии *t*. Для небольших расстояний, когда $t << \tau_L$ (ближняя зона) коэффициенты почти линейно зависят от расстояния, но когда $t >> \tau_L$ (дальняя зона) коэффициенты диффузии практически принимают постоянные значения (здесь τ_L - лагранжевый масштаб турбулентности).

Возможные погрешности при сравнении с другими моделями могут возникнуть в связи с большим разбросом значений средних коэффициентов турбулентности при различных термодинамических состояниях атмосферы. Поэтому для более точных расчетов, лучше использовать оценки средних коэффициентов турбулентности, рассчитываемые при численном прогнозе погоды, поскольку они получены при решении все системы прогностических уравнений.

Список литературы

1. *Берлянд М.Е.* Современные проблемы атмосферной диффузии и загрязнения атмосферы.- Л.:Гидрометеоиздат, 1975,-439 с.
2. *Бызова Н.Л., ГаргерЕ.Г., Иванов В.Н.* Экспериментальные исследования атмосферной диффузии и расчеты рассеяния примесей.- Л.: Гидрометеоиздат, 1991, -273 с.
3. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике (определения, формулы, теоремы).– Наука, М., 1973. - 450с
4. *С.Н Степаненко*. Динамика турбулентно-циркуляционных и диффузионных процессов в нижнем слое атмосферы. Одесса. 1998. -280 с.
5. *С.Н.Степаненко, В.Г.Волошин*. Анализ функции плотности распределения концентрации в гауссовых моделях рассеяния примесей в атмосфере //Українскій гідрометеорологічний журнал, 2008, № 3, -

6. *С.Н.Степаненко, В.Г.Волошин* Роль моделирования загрязнения атмосферы при организации мониторинга качества атмосферного воздуха в районах с высокой антропогенной нагрузкой // Сб. статей к 75-летию ОДЭКУ, 2008, с.14-23
7. *Сеттон О.Г.* Микрометеорология, Гидрометеоиздат, Л.,1958, стр. 320
8. *Briggs G.A*., 1993, "Plume dispersion in the convective boundary layer. PartII: Analyses of CONDORS field experiment data," J. Applied Meterol., 32:1388-1425.
9. *Venkatram, A.,* 1992, "Vertical dispersion of ground-level releases in the surface boundary layer," Atmos. Environ., 26A:947-949.
10. AERMIC, 1995, Formulation of the AERMIC MODEL (AERMOD) (Draft), Regulatory Docket AQM-95-01, AMS/EPA Regulatory Model Improvement Committee (AERMIC).
11. *Berkowicz, R., J. R. Olesen, and U. Torp,* 1986, "The Danish Gaussian air pollution model (OLM): Description, test and sensitivity analysis, in view of regulatory applications," Air Pollution Modeling and Its Application, V. C. De Wispelaire, F. A. Schiermeier, and N. V. Gillani, Eds. Plemum, New York, 453-481pp.
12. U.S. EPA, 1995b: User's guide for the industrial source complex (ISC3) dispersion models,Volume II – description of model algorithms. U.S. EPA, Research Triangle Park, N.C.

Рішення рівняння турбулентної дифузії для стаціонарного точкового джерела.

Степаненко С.Н., Волошин В.Г., Тіпцов С.В.

Представлено нове фундаментальне рішення повного рівняння турбулентної дифузії яке, на відміну від попередніх, враховує взаємодію складових коефіцієнта дифузії і швидкості вітру у напрямі осей ($i = x, y, z$) *декартової системи координат за умови, що складові приймають будь-які значення* $k = \nu + k_i$ *і* $u_i \geq 0$ (*де* ν, k_i *– молекулярний і турбулентний коефіцієнт дифузії відповідно,* u_i *– швидкість вітру*). *Розрахункові формули дозволяють побудувати просторові поля концентрацій забруднень повітря при будь-яких термодинамічних станах атмосфери і швидкостях вітру, у тому числі і при штилі, без складних апроксимацій масштабів дифузії в атмосфері.*

Ключові слова: *рівняння турбулентної дифузії, розсіяння домішки в атмосфері, точкове джерело, коефіцієнти дифузії, функція розподілу концентрації,отражение і поглинання домішки.*

The decision of the equation of turbulent diffusion for the stationary point source.

S.Stepanenko, V.Voloshin, S.Tiptsov

The new decision of complete equalization of turbulent diffusion, which, is presented, unlike previous, cooperation of components of factor of diffusion and speed of wind takes into account in the direction of axes ($i = x, y, z$) *Cartesian system of coordinates on condition that components take on any values* $k = \nu + k_i$ *and* $u_i \geq 0$ (*where* ν, k_i *- molecular and turbulent coefficient of diffusion,* u_i *- speed of wind*). *Allows to get calculations formulas the fields of concentrations at any thermodynamic conditions of the atmosphere and speeds of wind, including at calm without approximations of scales of diffusion from distance.*

Keywords: *the equation of turbulent diffusion, dispersion of pollution an atmosphere, point source, factors of diffusion, distribution of concentration pollutant, reflection and absorption of pollution by a surface.*