Опубликовано в «Дифференциальные уравнения, теория функций, нелинейный анализ и оптимизация. Труды Всероссийской научно-практической конференции (Москва, РУДН, 23–26 апреля 2013 г.)». – М., РУДН, 2013, с. 29–32.

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПРАВИЛЬНОГО ГРАФА НА ДВУМЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Лисица А.Ю., Соломенцева Ю.Д.

ON EXISTENCE OF COMPLETELY REGULAR GRAPH ON 2-DIMENTIONAL SURFACE

Lisica A.Yu., Solomenceva Yu.D.
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
e-mails: a-lisica@yandex.ru; solomenceva_julia@rambler.ru

Давно известна (см., например, [1, гл. VIII, п. 4]) связанная с классификацией правильных многогранников (платоновых тел) задача исследования всех правильных графов на плоскости (или, что то же, на двумерной сфере). Представляет определенный интерес аналогичная задача для произвольной двумерной компактной замкнутой связной гладкой поверхности (далее, говоря о поверхностях, мы будем иметь в виду только такие поверхности). Как хорошо известно (см., например, [2] или [3]), каждая такая поверхность представляет собой (с точностью до гомеоморфизма) в ориентированном случае сферу с g ручками, либо (в неориентируемом случае) сферу с вклееными в неё n листами Мёбиуса. В первом случае эйлерова характеристика поверхности есть $2 - 2g$, во втором — $2 - n$.

Приведём (напомним) основные необходимые нам понятия и результаты:

Определение 1. Граф (кратные рёбра и петли в нём допускаются) называется **однородным**, если все его вершины имеют одинаковую степень (**степенью вершины** называется число входящих в неё рёбер графа; петля считается дважды входящей в свою вершину). Например, граф состоящий из одной вершины и одного ребра-петли, однороден. Степень его единственной вершины равна 2.

Определение 2. Граф называется **вложенным в поверхность**, если его можно на ней расположить (нарисовать без самопересечений) так, что поверхность при этом разбивается на части, гомеоморфные открытому кругу. При этом указанные части называются **гранями** графа. Заметим, что понятие грани графа неинвариантно и зависит от вложения графа в поверхность. Здесь же отметим, что В – число вершин графа, Р – число его рёбер и Г – число его граней связаны известным соотношением: $\chi = В - Р + Г$, где χ – эйлерова характеристика поверхности, в которую вложен граф. Здесь же отметим, что при таком определении вложенный в поверхность граф автоматически оказывается связным.

Определение 3. Вложенный в поверхность граф G^* называется **двойственным** графу G, вложенному в ту же поверхность, если он построен следующим образом: внутри каждой грани графа G выбирается по одной точке (все они составляют множество вершин графа G^*). Две вершины графа G^* соединяются ребром в том и только том случае, если соответствующие им грани графа G имеют общее ребро (или, как мы далее будем говорить, граничат по ребру). Причём соединяются они столькими рёбрами, сколько имеется рёбер, по которым граничат указанные грани графа G. Если грань графа G граничит сама с собой, то в двойственном графе G^* у соответствующей вершины появляется петля (причём у этой вершины появляется столько же петель, сколько было рёбер, по которым грань графа G граничила сама с собой).

Определение 4. Однородный граф, вложенный в поверхность, называется **правильным** на этой поверхности, если двойственный к нему граф также является однородным. Все правильные графы на сфере (за исключением вырожденного случая графа, состоящего из одной точки и не имеющего рёбер) описаны в [1].

Если обозначить через ρ степень вершины правильного графа, а через ρ^* – степень вершины двойственного ему графа (которая, очевидно, равна числу рёбер, ограничивающих каждую из граней правильного графа), то для правильного графа, вложенного в поверхность эйлеровой характеристики χ, имеют место следующие соотношения:

Опубликовано в «Дифференциальные уравнения, теория функций, нелинейный анализ и оптимизация. Труды Всероссийской научно-практической конференции (Москва, РУДН, 23–26 апреля 2013 г.)». – М., РУДН, 2013, с. 29–32.

(1) $\rho В = 2Р = \rho^* Г$ и $В(1 + \rho/\rho^* - \rho/2) = \chi$.

В случае эйлеровых характеристик 2, 1 и 0 (т. е. если мы имеем дело со сферой, проективной плоскостью, тором или бутылкой Клейна) эти соотношения легко разрешаются, причём любопытно, что в случае характеристики 2 (т. е. сферы) каждое из решений указанной системы уравнений в натуральных числах порождает правильный граф на сфере. В случае же, например, проективной плоскости (поверхности эйлеровой характеристики 1) уже имеется решение системы, а именно: В = 2, Р = 3, Г = 2, $\rho = \rho^* = 3$, для которого не существует правильного графа. Одним из двух гипотетически возможных графов с такими параметрами является граф с двумя вершинами, соединёнными ребром и имеющими по одной петле. Как бы ни вкладывать такой граф в проективную плоскость, одна из петель будет охватывать одну из двух граней графа, а это означает, что двойственный граф будет иметь «висячую» вершину (вершину степени 1), что противоречит тому, что степени обеих вершин двойственного графа одинаковы и равны 3. Другая возможность – граф с двумя вершинами и одним трёхкратным ребром. Однако здесь очевидно не удастся ограничить ни одну из двух граней ровно тремя рёбрами.

Каждое же из остальных решений системы для проективной плоскости порождает правильный граф на ней. На подробном их описании мы в настоящей краткой работе не останавливаемся, равно как и на описании всех правильных графов на торе или бутылке Клейна, задача нахождения которых родственна задаче поиска всех правильных плоских мозаик, см. [1, гл. VIII, п. 5]. Самые известные из них представляют собой треугольные, квадратные или шестиугольные «сетки» на этих поверхностях. Можно легко понять, как они выглядят, вспомнив, что бутылка Клейна и тор могут быть получены склеиванием противоположных сторон квадрата. При этом предварительно склеиваемый квадрат (для получения, например, квадратной «сетки») следует равномерно «разлиновать» параллельными его сторонам прямыми линиями. Впрочем, ещё один пример правильного графа на бутылке Клейна приведён в конце настоящей работы.

В случае поверхностей отрицательной эйлеровой характеристики $-m$ ($m > 0$) можно заметить, переписав последнее уравнение системы (1) в виде:

(2) $В + m = В\rho\,((\rho^* - 2) / (2\rho^*))$,

что число решений системы конечно: ρ^* не может равняться ни 1, ни 2 (т. к. в этом случае правая часть последнего уравнения отрицательна или равна нулю, в то время как левая – положительна). С ростом ρ^* дробь $(\rho^* - 2) / (2\rho^*)$ всё меньше отличается от 1/2 (при $\rho^* > 2$ эта дробь не меньше 1/6), а потому, при $\rho > 6\,(m + 1)$ правая часть больше mВ + В, и уравнение заведомо не имеет решений. Мы ограничили ρ сверху числом $6\,(m + 1)$, но, по соображениям двойственности, для ρ^* имеется такая же оценка (граф, двойственный к правильному, сам правилен, причём его ρ^* совпадает с ρ исходного графа). Далее очевидно, что при заданных ρ и ρ^* уравнение (2) при положительных m, а с ним и система (1), однозначно разрешаются. Тем самым, доказана

Теорема 1. Какова бы ни была поверхность отрицательной эйлеровой характеристики, множество правильных графов на ней конечно.

Эта теорема особенно любопытна ввиду того, что на каждой из поверхностей неотрицательной эйлеровой характеристики имеется по бесконечному семейству правильных графов: на сфере это графы с двумя вершинами и одним n-кратным ребром, а также двойственные к ним графы-n-угольники; на проективной плоскости – графы с одной вершиной и n рёбрами-петлями, а также двойственные к ним; на торе или бутылке Клейна – семейство самодвойственных квадратных «сеток», а также двойственные друг другу семейства треугольных и шестиугольных «сеток».

Теорему 1 можно усилить, доказав, что указанное в ней множество непусто:

Теорема 2. На каждой поверхности существует хотя бы один правильный граф.

Доказательство. Рассмотрим сначала неориентируемый случай. Как нетрудно убедиться, одним из решений системы (1) в случае неориентируемой поверхности эйлеровой характеристики $2 - n$ является пятёрка (В, Р, Г, ρ, ρ^*) = (1, n, 1, $2n$, $2n$).

Опубликовано в «Дифференциальные уравнения, теория функций, нелинейный анализ и оптимизация. Труды Всероссийской научно-практической конференции (Москва, РУДН, 23–26 апреля 2013 г.)». – М., РУДН, 2013, с. 29–32.

Соответствующий граф представляет собой букет n окружностей (граф с одной вершиной и n рёбрами-петлями). Если нарисовать его на обычной сфере так, чтобы ни одна из петель не попадала внутрь другой, затем вырезать внутренность каждой из петель и, наконец, склеить противоположные точки каждой из них (считая их окружностями), мы одновременно получим и нашу поверхность, и нарисованный на ней правильный граф. Этот же граф получается известной (см., например, [3, стр. 163]) конструкцией склейки неориентируемой поверхности из $2n$-угольника. В ориентируемом случае аналогичная конструкция склейки поверхности из $4g$-угольника (см. там же) даст правильный граф с параметрами (В, Р, Г, ρ, ρ*) = $(1, 2g, 1, 4g, 4g)$. Теорема доказана.

Как в ориентируемом, так и в неориентируемом случаях можно указать и другие правильные графы. Например, в случае поверхности эйлеровой характеристики –1 граф с параметрами (В, Р, Г, ρ, ρ*) = (4, 6, 1, 3, 3), который можно назвать условно «связкой воздушных шариков» (из одной из 4-х его вершин исходят 3 ребра и на втором из концов каждого из них имеется по петле). Если этот граф нарисовать на обычной сфере подобно тому, как это только что сделано для букета окружностей в доказательстве теоремы 2, а затем вырезать внутренность каждой из петель и заклеить каждую из них, склеивая противоположные точки, получится правильный граф, вложенный в поверхность эйлеровой характеристики –1.

Отметим ещё раз, что имеются ситуации, когда не каждое решение системы (1) порождает правильный граф. Одна из них уже была описана выше (это решение системы (В, Р, Г, ρ, ρ*) = (2, 3, 2, 3, 3) для проективной плоскости). Она допускает обобщение на случай поверхностей нечётной эйлеровой характеристики. Пусть $\chi = 2 - (2k - 1)$. Пятёрка (В, Р, Г, ρ, ρ*) = $(2, 2k + 1, 2, 2k + 1, 2k + 1)$ является очевидным решением системы (1), причём ему может соответствовать либо граф, имеющий не менее чем трёхкратное ребро (степень каждой вершины нечётна, а каждая петля даёт в степень чётный вклад, следовательно двукратным ребро быть не может), и тогда сразу нарушится условие Г = 2; либо граф, который можно условно назвать «двойной связкой воздушных шариков»: две вершины соединены ребром и у каждой из них имеется по k петель. Как бы ни пытаться вложить такой граф в нашу поверхность так, чтобы получилось ровно две грани, эти грани будут граничить друг с другом только по одной из петель, что ведёт к нарушению симметрии правильного графа и противоречию: по единственному ребру, не являющемуся петлёй, будет граничить сама с собой только одна из его граней, для второй грани такого ребра не будет.

Для неориентируемой поверхности эйлеровой характеристики $\chi = 2 - 2k$ такое же решение системы (1): (В, Р, Г, ρ, ρ*) = $(2, 2k + 2, 2, 2k + 2, 2k + 2)$, как ни удивительно, порождает правильный граф. Опишем его для $k = 1$, т. е. в случае бутылки Клейна. Граф имеет две вершины, соединённые двукратным ребром. Кроме того, у каждой из вершин имеется по петле. Расположим этот граф на сфере, причём одну из петель разместим в одной из двух граней, на которые делит сферу двукратное ребро, а другую – в другой. Наконец, вырежем внутренности каждой из двух петель и склеим противоположные точки каждой из них. В случае $k = 2$ конструкция такая же, только в каждую из двух граней сферы, на которые её делит двукратое ребро графа, помещаются уже по две петли и т. д.

Литература

[1] *Оре О.* Графы и их применение. – М.: «Мир», 1965.

[2] *Милнор Дж.,Уоллес А.* Дифференциальная топология. Начальный курс. – М.: «Мир», 1972.

[3] *Прасолов В.В.* Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии. – М.: Издательство МЦНМО, 2004.