9С

УДК 531.38

С.В. Сапунов
Институт прикладной математики и механики, г. Донецк, Украина
sapunov_sv@iamm.ac.donetsk.ua

Проверка соответствия карты при навигации мобильных роботов

Рассматривается задача проверки соответствия карты (неориентированного графа с помеченными вершинами) и операционной среды мобильного робота. Заданы граф-эталон и бесконечный класс графов над некоторым алфавитом меток вершин. Требуется для произвольного графа из этого класса определить, изоморфен он эталону или нет. Решение заключается в построении контрольного эксперимента – специального вида множества слов в алфавите меток вершин и способа его реализации на графе.

Введение

Задачи организации двигательного поведения или навигации автономных мобильных роботов являются одними из основных задач искусственного интеллекта [1]. Одно из необходимых условий автономности робота – наличие модели (карты) его операционной среды. К моделированию таких сред определилось два подхода: метрический, использующий геометрические свойства среды, и топологический, использующий описания связей между различными областями среды [2]. Топологические модели представляют собой неориентированные графы с размеченными различными способами вершинами или ребрами. Общая задача картографирования (robotic mapping problem) подразделяется на три взаимосвязанные задачи: построение роботом карты (map exploration), определение положения робота по карте (robot self location) и проверка соответствия среды и карты или контроль карты (map validation) [3]. Последняя задача формулируется следующим образом: для заданной карты некоторой среды робот должен проверить, является эта карта описанием той среды, которую он исследует, или нет. В случае, когда в качестве модели среды выступает граф, задача состоит в том, чтобы по описанию графа-эталона определить, изоморфен ему исследуемый граф или нет. Исследования свойств графовых моделей операционных сред автономных роботов начались сравнительно недавно и далеки от завершения.

В теории дискретных систем проблема контроля рассматривалась в рамках исследования моделей взаимодействия управляющей и управляемой систем. Это взаимодействие зачастую представляется как процесс перемещения управляющего автомата по графу («лабиринту») управляемой системы [4], что привело к возникновению обширной и интенсивно развивающейся области исследования поведения автоматов в лабиринтах [5], [6]. Процесс прохождения путей по графу, восприятия локальной информации о вершинах путей и вывода заключений о свойствах графа называется контрольным экспериментом над графом. Исследуемые графы, как правило, представлялись конечными автоматами без выходов, т.е. конечными ориентированными графами с постоянными метками на дугах. В рамках этого подхода найдены точные верхние оценки наименьшего времени, за которое различаются два графа, предложен метод построения контрольных экспериментов относительно класса всех таких графов, число вершин которых не превосходит числа вершин эталона. Тем не менее, полученные здесь результаты не образуют цельной картины и, в отличие от «классической» теории экспериментов с автоматами, заложенной Э. Муром и С.В. Яблонским и созданной трудами многих исследователей, исследования в этой области находятся в зачаточном состоянии. Поэтому разработка этой тематики чрезвычайно актуальна.

Постановка задачи. Рассматривается задача контроля конечного связного неориентированного графа с помощью блуждающего по нему робота. Блуждание состоит в перемещениях робота по ребрам графа от вершины к вершине. При этом, находясь в вершине графа, робот считывает ее метку и метки смежных с ней вершин. Таким образом, он может определить наличие или отсутствие некоторой метки в упомянутых вершинах. Задан бесконечный класс всех таких графов над некоторым множеством меток. Задача заключается в том, чтобы, имея полное описание графа-эталона, найти множество путей по исследуемому графу, которое позволило бы определить, изоморфен последний эталону или нет.

В [7] предложено решение задачи контроля для класса графов, не превосходящих по числу вершин граф-эталон и имеющих одно и то же множество меток.

Детерминированные графы

Конечным, простым, связным, неориентированным графом с помеченными вершинами назовем пятерку $G = (G, E(G), M, \mu, g_0)$, где G – конечное множество вершин, $|G| = n$, $E(G) \subseteq G \times G$ – конечное множество ребер, M – конечное множество меток, $|M| = m$, $\mu : G \to M$ – сюръективная функция разметки. Окрестностью O_g вершины $g \in G$ назовем множество, состоящее из самой вершины g и всех вершин, смежных с ней. Граф G назовем детерминированным или D-графом, если для любой вершины $g \in G$ и любых вершин $s, t \in O_g$, из $s \neq t$ следует $\mu(s) \neq \mu(t)$. В дальнейшем, если не оговорено противное, рассматриваются только детерминированные графы. Последовательность меток вершин $w = \mu(g_1) \ldots \mu(g_k)$, соответствующую некоторому пути $g_1 \ldots g_k$ в графе G, назовем словом. Через $\mathrm{d}(w)$ обозначим длину слова w. Через w^{rev} обозначим слово $\mu(g_k) \ldots \mu(g_1)$. Определим язык L_g как множество всех слов, порождаемых вершиной g. Языком L_G, порождаемым графом G, назовем объединение $\bigcup_{g \in G} L_g$ языков всех его вершин. Если в графе G выделена начальная вершина g_0, то $L_G = L_{g_0}$. Через $\mathrm{pref}_k(w)$ обозначим начальный отрезок слова w длины k. Будем писать $u \prec w$, если слово u является собственным начальным отрезком слова w. Через M^+ обозначим множество всех непустых слов в алфавите M. Введем операцию $* : G \times M^+ \to G$ соотношением: для любой вершины $g \in G$ и любого слова $w \in M^+$ $x \in M$, через $g * w$ обозначим вершину $h \in G$ такую, что существует путь, соединяющий вершины g и h, и метка этого пути равна w. Для слов $u, w \in M^+$ введем их композицию $u \circ w$, равную $u \cdot w'$, если $u = u' \cdot x$, $w = x \cdot w'$, и не определенную в противном случае (здесь точка означает конкатенацию слов). Граф G назовем приведенным, если $L_g \neq L_h$ для всех различных вершин $g, h \in G$.

Следующее утверждение обобщает результаты, полученные в [8].

Теорема 1. Связные приведенные D-графы G и H изоморфны тогда и только тогда, когда $L_G = L_H$.

Доказательство. Необходимость утверждения очевидна.

Покажем, что G является единственным, с точностью до изоморфизма, графом, порождающим язык L_G.

Будем говорить, что вершина $h \in G$ покрывает вершину $g \in G$, и писать $(g,h) \in \kappa$, если $L_g \subseteq L_h$. Отношение κ рефлексивно, транзитивно, но в общем случае не антисимметрично и, таким образом, является предпорядком. Ясно, что $\kappa \cap \kappa^{-1} = \varepsilon$. Вершину g назовем максимальной по κ в графе G, если для всех $h \in G$ из $(g,h) \in \kappa$ следует, что $(g,h) \in \varepsilon$. Множество всех максимальных вершин обозначим через $G^{\max}$.

Покажем, что $G = G^{\max}$. Пусть для двух различных вершин $g, h \in G$ выполняется $L_g \subseteq L_h$. Предположим, что существует слово $w \in L_h - L_g$. Слово $\mu(p)$, соответствующее кратчайшему пути p от вершины g к вершине h, обозначим через u. Слово $u \in L_g$ и, следовательно, $u \in L_h$.

Пусть $h * u = g$. Слово $u \circ w \in L_g$, следовательно, $u \circ w \in L_h$. Тогда по определению D-графа слово $w \in L_g$, что невозможно. Пусть $h * u \neq g$. Тогда слово $u \circ u \circ w \in L_g$ и, следовательно, $u \circ u \circ w \in L_h$. По индукции, $(u)^k \circ w \in L_g$ и, следовательно, $(u)^k \circ w \in L_h$ для любого натурального $k \geq 1$. В силу конечности числа вершин графа путь, соответствующий слову $(u)^k \in L_h$, образует цикл при некотором k. Пусть $h * (u)^k = g$. Тогда слово $w \in L_g$, что невозможно. Пусть $h * (u)^k = t_l$, $t_l \in G$, $l < k$, $h * (u)^l = t_l$. Из вершины t_l исходят два различных пути, соответствующие слову u^{-1}, что по определению D-графа невозможно. Следовательно, эти пути совпадают, и вершина t_{l-1} совпадают с вершиной t_{k-1}. По индукции получаем, что вершина t_{l-i} совпадает с вершиной t_{k-i} для любого $i \leq l$. При $i = l$ получаем, что вершина t_0 совпадает с вершиной t_{k-l}. Так как $t_0 = h$, то из вершины h исходят два различных пути, соответствующих слову u^{-1}, что по определению D-графа невозможно. Следовательно, эти пути совпадают и вершина g совпадают с вершиной t_{k-l-1}. Тогда слово $w \in L_g$, что невозможно.

Таким образом, для любых различных вершин $g, h \in G$ из $L_g \subseteq L_h$ следует, что $L_g = L_h$. Так как граф G приведен, то любая пара его вершин отличима, а, следовательно, все вершины являются максимальными, т.е. $G = G^{\max}$.

Покажем, что граф G имеет наименьшее число вершин среди всех D-графов с одним и тем же языком L_G. Предположим, что существует D-граф H такой, что $L_H = L_G$ и $|H| < |G|$. Так как граф G приведен и максимален, то для любой вершины $g \in G$ справедливо утверждение $L_g - L_{G-\{g\}} \neq \varnothing$. Следовательно, граф H не изоморфен никакому собственному подграфу графа G. Тогда существует вершина $h \in H$, покрывающая две или более вершин графа G. Обозначим через g' и g'' вершины графа G, такие, что $L_{g'} \cup L_{g''} \subseteq L_h$. Из максимальности и приведенности графа G следует, что g' и g'', не сравнимы по κ, и существуют слова $u \in L_{g'} - L_{g''}$ и $v \in L_{g''} - L_{g'}$. Из того, что h покрывает g' и g'' следует, что $u, v \in L_h$. Тогда существует слово $w = u \circ u^{rev} \circ v$ такое, что $w \in L_H - L_G$, что невозможно.

Предположим, что существует приведенный, максимальный D-граф H такой, что $L_H = L_G$ и $H \not\cong G$. Пусть существует вершина $g \in G$ такая, что для любой вершины $h \in H$ выполняется $L_g \neq L_h$. Тогда прямая сумма графов $G + H$ является приведенным, максимальным D-графом. Так как $L_H = L_G$, то существуют две или более вершин графа H таких, что объединение их языков включает в себя язык L_g. Последнее, как показано выше, невозможно. Следовательно, предположение неверно, и для любой вершины $g \in G$ существует вершина $h \in H$ такая, что $L_g = L_h$ и наоборот. Таким образом, существует биекция $\varphi : G \to H$, для которой $\varphi(g) = h$ тогда и только тогда, когда $L_g = L_h$. Предположим, что существует ребро $(g', g'') \in E(G)$ такое, что $(\varphi(g'), \varphi(g'')) \notin E(H)$. Так как граф G приведен и максимален, то для вершины $g' \in G$ существует слово $w \in L_{g'} - L_{G-\{g'\}}$. По определению D-графа, вершина g'' – единственная вершина с меткой $\mu(g'')$ в окрестности $O_{g''}$. Тогда слово $\mu(g'')\mu(g') \circ w \in L_G - L_H$, что невозможно. Полученное противоречие доказывает от противного, что для любого ребра $(g', g'') \in E(G)$ выполняется $(\varphi(g'), \varphi(g'')) \in E(H)$. Аналогично доказывается, что для любого ребра $(h', h'') \in E(H)$ выполняется $(\varphi^{-1}(h'), \varphi^{-1}(h'')) \in E(G)$, т.е. биекция φ устанавливает изоморфизм $G \cong H$.

Таким образом, G является единственным, с точностью до изоморфизма, графом, порождающим язык L_G.

Теорема доказана.

Контроль детерминированных графов при неизвестной верхней оценке числа вершин

Пусть $G = (G, E(G), M, \mu, g_0)$ – конечный, связный, приведенный D-граф, где g_0 – начальная вершина. Обозначим $\mathrm{K}(X)$ – класс всех конечных, связных, приведенных D-графов с множеством меток X таким, что $M \subseteq X$. Для различения графа G и произвольного графа $H \in \mathrm{K}(X)$ надо проверить наличие изоморфизма между этими графами. Так как робот обозревает только локальные окрестности вершин, а число вершин в графе H заранее не известно, то без привлечения дополнительных средств решение этой задачи в общем случае невозможно. Согласно теореме 1, изоморфизм графов $G \cong H$ следует из равенства языков $L_G = L_H$. Ясно, что непосредственная проверка этого равенства в общем случае невозможна в силу бесконечности обоих языков. Даже если бы нам удалось установить, что всякому слову $w \in L_G$ соответствует путь с меткой w из начальной вершины графа H, то это только означало бы, что $L_G \subseteq L_H$, и граф G гомоморфно вкладывается в граф H. Предлагаемое решение задачи контроля для графа G и класса $\mathrm{K}(X)$ основывается на комбинировании структурных и языковых свойств D-графов.

Обозначим через Z_G множество всех слов $w \in X^+$ таких, что $w \notin L_G$, а $\mathrm{pref}_{\mathrm{d}(v)-1}(w) \in L_G$. Легко видеть, что для любых графов $G, H \in \mathrm{K}(G)$ выполняется $G \cong H$ тогда и только тогда, когда $Z_G = Z_H$. Действительно, из равенства $Z_G = Z_H$ следует равенство $L_G = L_H$ и, по теореме 1, изоморфизм $G \cong H$. Обозначим через Z_G^k подмножество всех слов $w \in Z_G$ таких, что $\mathrm{d}(w) \le k$. Очевидно, что при любом фиксированном k для любого циклического графа $G \in \mathrm{K}(X)$ существует ациклический граф $H \in \mathrm{K}(X)$ такой, что $Z_G^k = Z_H^k$ и $G \ncong H$ (рис. 1).

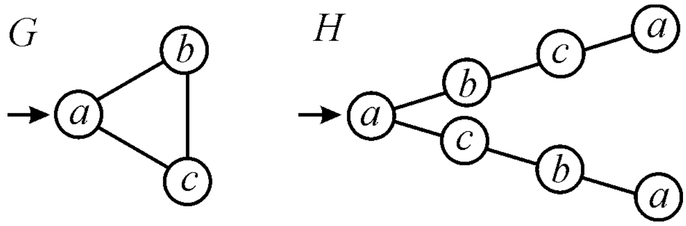

Рисунок 1

Ясно, что при $k \le 5$ выполняется $Z_G^k = Z_H^k$ и $G \ncong H$. Заметим, что путь, соответствующий слову $abca$, является циклом в графе G и не является таковым в графе H.

Обозначим через R_G множество всех слов $w \in L_G$ таких, что $g_0 * w = g_0$. Легко видеть, что для любых графов $G, H \in \mathrm{K}(G)$ выполняется $G \cong H$ тогда и только тогда, когда $R_G = R_H$. Действительно, каждому слову $w \in L_G$ поставим в соответствие слово $w \mathrm{o} w^{rev} \in R_G$, тогда из равенства $R_G = R_H$ следует равенство $L_G = L_H$, откуда по теореме 1 $G \cong H$. Ясно, что для любого графа $G \in \mathrm{K}(X)$ (исключение составляет полный граф G такой, что $|G| = |X|$) существует граф $H \in \mathrm{K}(X)$ такой, что $R_G \subseteq R_H$ и $G \ncong H$ (рис. 2). Здесь $X = \{a, b, c, d\}$.

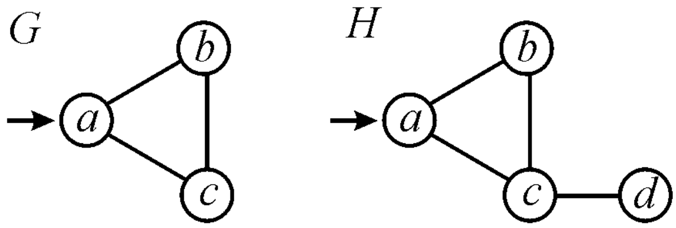

Рисунок 2

Легко видеть, что $R_G \subseteq R_H$, но цикл, соответствующий слову $abcdca$, есть в графе H и отсутствует в графе G. Заметим, что слово $acd \in Z_G - Z_H$.

Из вышесказанного следует, что использование множеств Z_G и R_G порознь не дает возможности восстановить граф G. В теории графов известно, что всякий остов графа G порождает базис циклов, то есть минимальный набор простых циклов, от которых зависят все циклы. Зафиксируем на множестве слов X^* произвольный линейный порядок $<$. Множество слов $V_G = \{v_0, K, v_{n-1}\}$ назовем базисом достижимости графа G, если для любого $v_i \in V_G$, $0 \le 1 < n$, выполняется $g_0 * v_i = g_i$, причем v_i – кратчайшее по $<$ такое слово. Обозначим через $\widetilde{R}_G$ множество всех слов w таких, что $w = v_i \cdot v_j^{rev}$, где $v_i . v_j \in V_G$, $i \ne j$, причем $v_i < v_j$ и $v_i \not\pi v_j$. Обозначим далее через $\widetilde{Z}_G$ множество всех слов $w \in Z_G$ таких, что $\mathrm{pref}_{\mathrm{d}(w)-1}(w) \in V_G$. С каждым графом $G \in \mathrm{K}(X)$ свяжем систему множеств слов $\{\widetilde{R}_G, \widetilde{Z}_G\}$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Для любых графов $G, H \in \mathrm{K}(X)$ изоморфизм $G \cong H$ существует тогда и только тогда, когда $\widetilde{R}_G \subseteq R_H$ и $\widetilde{Z}_G \subseteq Z_H$.

Доказательство. Необходимость очевидна.

Покажем, что из $\widetilde{R}_G \subseteq R_H$ и $\widetilde{Z}_G \subseteq Z_H$ следует, что граф G гомоморфно вкладывается в граф H. Построим отображение $\varphi : G \to H$. Положим $\varphi(g_0) = h_0$. Из $\widetilde{Z}_G \subseteq Z_H$ следует, что $V_G \subseteq L_H$. Положим далее, $\varphi(g_0 * v_i) = h_i$, где $v_i \in V_G$. Пусть ребро $(g_i, g_j) \in E(G)$. Тогда либо $v_i \pi v_j$, либо $v_i \cdot v_j^{rev} \in \widetilde{R}_G$. Если $v_i \pi v_j$, то, в силу $V_G \subseteq L_H$, ребро $(\varphi(g_i), \varphi(g_j)) \in E(H)$. Если $v_i \cdot v_j^{rev} \in \widetilde{R}_G$, то в силу $\widetilde{R}_G \subseteq R_H$ ребро $(g_i, g_j) \in E(G)$. Таким образом, φ сохраняет отношение смежности и является гомоморфизмом.

Покажем далее, что из $\widetilde{R}_G \subseteq R_H$ и $\widetilde{Z}_G \subseteq Z_H$ следует, что граф H гомоморфно вкладывается в граф G. Если $|H| > |G|$ и $|\varphi(G)| = |G|$, то существует такая вершина $h \in H$, что $(v_i \cdot X \cap L_G) \subseteq (v_i \cdot X \cap L_H)$, где $h_i = h_0 * v_i$, $v_i \in V_G$, $0 \le i < n$. То есть существует слово $v_i x \in \widetilde{Z}_G - Z_H$, что невозможно. Следовательно, либо $|H| = |G|$, либо $|\varphi(G)| < |G|$. Пусть $|\varphi(G)| < |G|$, тогда для некоторых $v_i, v_j \in V_G$ выполняется $h_0 * v_i = h_0 * v_j$. Так как граф G приведен, то существует кратчайшее слово $u \in L_{g_i} - L_{g_j}$, где $g_i = g_0 * v_i$, $g_j = g_0 * v_j$. Обозначим через w наибольший начальный отрезок слова u такой, что $w \in L_{g_i} \cap L_{g_j}$. Пусть $u = w \cdot x$, $x \in X$. Из определения D-графа следует, что $h_0 * (v_i \circ w) = h_0 * (v_j \circ w)$. Введем обозначения: $g_s = g_0 * (v_i \circ w)$, $g_t = g_0 * (v_j \circ w)$. Очевидно, что $g_s \ne g_t$ и существуют слова $v_s, v_t \in V_G$, где $g_0 * v_s = g_s$, $g_0 * v_t = g_t$. Покажем, что $h_0 * v_s = h_0 * (v_i \circ w)$ и $h_0 * v_t = h_0 * (v_j \circ w)$. Для удобства записи будем обозначать через v_{g_i} такое слово из V_G, что $g_0 * v_{g_i} = g_i$. Представим слово w в виде $w_1 \circ w_2 \circ K \circ w_r$, где $\mathrm{d}(w_i) = 2$, $1 \le i \le r$. Построим цепочку рассуждений.

Слово $v_i \circ w_1 \circ v^{rev}_{g_0 * (v_i \circ w_1)} \in \widetilde{R}_G$. В силу $\widetilde{R}_G \subseteq R_H$ из этого следует, что слово

$$v_i \circ w_1 \circ v^{rev}_{g_0 * (v_i \circ w_1)} \in R_H \qquad (1)$$

и $h_0 * (v_i \circ w_1) = h_0 * v_{g_0 * (v_i \circ w_1)}$. Далее, из $v_{g_0 * v_i \circ w_1} \circ w_2 \circ v^{rev}_{g_0 * (v_i \circ w_1 \circ w_2)} \in \widetilde{R}_G$ следует, что слово

$$v_{g_0 * v_i \circ w_1} \circ w_2 \circ v^{rev}_{g_0 * (v_i \circ w_1 \circ w_2)} \in R_H . \qquad (2)$$

Из (1) и (2) получаем, что слово

$$v_i \circ w_1 \circ v^{rev}_{g_0*(v_i \circ w_1)} \circ v_{g_0*(v_i \circ w_1)} \circ w_2 \circ v^{rev}_{g_0*(v_i \circ w_1 \circ w_2)} \in R_H .$$

В силу детерминированности графа H, слово

$$v_i \circ w_1 \circ w_2 \circ v^{rev}_{g_0*(v_i \circ w_1 \circ w_2)} \in R_H ,$$

откуда следует, что $h_0 * (v_i \circ w_1 \circ w_2) = h_0 * v_{g_0*(v_i \circ w_1 \circ w_2)}$.

Рассуждая далее подобным образом, в конце концов получим, что слово $v_i \circ w_1 \circ K \circ w_r \circ v^{rev}_s \in R_H$, то есть $h_0 * (v_i \circ w) = h_0 * v_s$. Аналогично доказывается, что $h_0 * (v_j \circ w) = h_0 * v_t$.

Таким образом $h_0 * v_s = h_0 * v_t$. Тогда слово $v_t \cdot x \in \widetilde{Z}_G - Z_H$, что невозможно. Полученное противоречие доказывает от противного, что $|G| = |H|$ и существует взаимнооднозначное отображение $\psi : H \to G$. Предположим, что $(h_i, h_j) \in E(H)$ и $(\psi(h_i), \psi(h_j)) \notin E(G)$. Тогда слово $v_i \cdot \mu(h_i) \in \widetilde{Z}_G - Z_H$, что невозможно. Следовательно, ψ сохраняет отношение смежности вершин и устанавливает гомоморфизм $\psi : H \to G$.

Теорема доказана.

Следствие 2.1. Система $\{\widetilde{R}_G, \widetilde{Z}_G\}$ является контрольным экспериментом для G и $K(X)$.

Контроль графа осуществляется в соответствии со следующей стратегией. Для каждого слова $w \in \widetilde{R}_G$ поступаем следующим образом. В начальной вершине g_0 оставляем метку (камень), проходим путь, соответствующий слову w, и проверяем наличие метки. Если метка обнаружена, то проверяем следующее слово, если не обнаружена, то эксперимент прекращается и контролируемый граф не изоморфен графу G. Во второй части эксперимента проверяем для каждого слова $w \in \widetilde{Z}_G$ наличие в контролируемом графе пути, соответствующего слову $\mathrm{pref}_{d(w)-1}(w)$, и отсутствие пути, соответствующего слову w. Легко видеть, что выполнение алгоритма контроля потребует не более $O(n^2)$ шагов.

Характеризация конечных систем

Под характеризацией конечной системы множеств слов $\{R, Z\}$, где $R \subseteq \{w \in X^+ \mid u = x \circ u \circ x\}$, $Z \subseteq \{w \in X^+ \mid w = x \circ w\}$, x – фиксированный один и тот же элемент из X, подразумевается решение следующих задач:

1) определить, существует ли конечный, связный D-граф с множеством меток $M \subseteq X$, для которого система $\{R, Z\}$ является контрольным экспериментом относительно класса $K(X)$;

2) определить, является ли система $\{R, Z\}$ контрольным экспериментом для фиксированного графа G и класса $K(X)$.

Система $\{R, Z\}$ назовем правильной, если существует граф G, для которого $\{R, Z\}$ является контрольным экспериментом относительно класса $K(X)$.

Охарактеризуем правильные системы. С системой $\{R, Z\}$ свяжем помеченный граф $G^{+,-}_{\{R,Z\}}$ следующим образом. Для каждого слова $x_{i_0} \mathrm{K}\ x_{i_k} \in R \cup Z$ построим помеченную цепь $g_{i_0} \mathrm{K}\ g_{i_k}$ так, чтобы $x_{i_j} = \mu\left(g_{i_j}\right)$. Последние вершины всех цепей, соответствующих словам из Z, дополнительно пометим меткой «–». Эти вершины назовем негативными, а все остальные – позитивными. Отождествим все вершины g_{i_0} и обозначим полученную вершину g_0. Отождествим вершину g_0 и последние вершины всех цепей, соответствующих словам из R. Если в окрестность некоторой вершины попадают одинаково отмеченные позитивные вершины, то такие вершины отождествим, заменив возникающие кратные ребра одним ребром. Систему $\{R, Z\}$ назовем совместимой, если для любой вершины g графа $G^{+,-}_{\{R,Z\}}$ в окрестности O_g нет одинаково помеченных позитивной и негативной вершин. Систему $\{R, Z\}$ назовем полной, если для любой вершины g графа $G^{+,-}_{\{R,Z\}}$ множество меток окрестности O_g равно X.

Следующее утверждение дает критерий правильности систем.

Теорема 3. Система $\{R, Z\}$ является правильной тогда и только тогда, когда она полна и совместима.

Доказательство. Пусть система $\{R, Z\}$ правильная, то есть является контрольным экспериментом для некоторого D-графа G и класса $\mathrm{K}(X)$. Из теоремы 2 следует, что $\{R, Z\} = \left\{\widetilde{R}_G, \widetilde{Z}_G\right\}$ при некотором базисе достижимости V_G. Полнота и совместимость системы $\{R, Z\}$ следуют из определения $\widetilde{R}_G$ и $\widetilde{Z}_G$.

Пусть система $\{R, Z\}$ полна и совместима. Удалим из графа $G^{+,-}_{\{R,Z\}}$ негативные вершины и обозначим новый граф через $G^{+}_{\{R,Z\}}$. Покажем, что множество Z содержит в качестве собственных начальных отрезков слов некоторый базис достижимости V графа $G^{+}_{\{R,Z\}}$. Предположим, что существует вершина $g \in G^{+}$ такая, что для любого слова $w \in Z$ выполняется $g_0 * \mathrm{pref}_{\mathrm{d}(w)-1}(w) \neq g$. Тогда в множестве слов $\left(\mathrm{pref}_{\mathrm{d}(w)-1}(w)\right) \cdot X$ найдется слово w такое, что $w \notin L_{G^{+,-}_{\{R,Z\}}}$ и $w \notin Z$, что невозможно. Покажем, что множество R содержит в качестве подмножества множество всех циклов, порожденных конкатенацией слов из V. Предположим, что для некоторых слов $v_i, v_j \in V$ выполняется $\left(g_0 * v_i, g_0 * v_j\right) \in E\left(G^{+}\right)$, $v_i \mathrm{o} v_j^{rev} \notin R$ и $v_j \mathrm{o} v_i^{rev} \notin R$. Если v_i (или v_j) не является начальным отрезком некоторого цикла $c \in R$, то в $O_{g_0 * v_i}$ нет вершины с меткой $\mu\left(g_0 * v_j\right)$ (или в $O_{g_0 * v_j}$ нет вершины с меткой $\mu\left(g_0 * v_i\right)$), что невозможно. Пусть существует цикл $c_1 \in R$ такой, что $v_i\ \pi\ c_1$. Из полноты системы $\{R, Z\}$ следует, что существует цикл $c_2 \in R$ такой, что $v_i \cdot \mu\left(g_0 * v_j\right) \pi\ c_2$. Далее, по тем же соображениям, существует цикл $c_3 \in R$ такой, что $v_i \cdot \mu\left(g_0 * \left(\mathrm{pref}_{d(v_j)-1}\left(v_j\right)\right)\right) \pi\ c_3$. Продолжая рассуждения, получаем, что существует цикл $c_k \in R$ и $c_k = v_i \cdot \mu\left(g_0 * v_j\right) \cdot \mu\left(g_0 * \left(pref_{d(v_j)-1}\left(v_j\right)\right)\right) \cdot \mathrm{K} \cdot \mu\left(g_0\right)$. Очевидно, что $\mu\left(g_0 * v_j\right) \cdot \mu\left(g_0 * \left(pref_{d(v_j)-1}\left(v_j\right)\right)\right) \cdot \mathrm{K} \cdot \mu\left(g_0\right) = v_j^{rev}$.

Далее, по теореме 2, система $\{R, Z\}$ является контрольным экспериментом для графа $G^{+}_{\{R,Z\}}$ и класса $\mathrm{K}(X)$.

Теорема доказана.

Заключение

Таким образом, в работе решена задача отличения топологической модели операционной среды мобильного робота (помеченного графа-карты) от бесконечного класса неизоморфных моделей. Решение заключается в построении контрольного эксперимента – специального вида множества слов в алфавите меток вершин и способа его реализации на модели. Далее найден критерий, при котором конечная система слов в алфавите меток позволяет восстановить конечный инициально-связный помеченный граф из бесконечного класса таких графов.

Литература

1. Borenstein J. Everett B., Feng L. Navigation Mobile Robots: System and Techniques. – A.K. Peters, Ltd., Wellesley, MA., 1996. – 223 p.
2. Thrun S. Robotic mapping: A survey // Exploring Artificial Intelligence in the New Millennium. – Morgan Kaufmann, 2002.
3. Dudek J., Jenkin M., Milios E., Wilkes D. Map validation and Robot Self-Location in a Graph-Like World // Robotics and Autonomous Systems. – 1997. – Vol. 22 (2). – P. 159-178.
4. Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. – М.: Наука, 1985. – 320 с.
5. Килибарда Г., Кудрявцев В.Б., Ушчумлич Щ. Независимые системы автоматов в лабиринтах // Дискретная математика. – 2003. – Т. 15, вып. 2. – С. 3-39.
6. Килибарда Г., Кудрявцев В.Б., Ушчумлич Щ. Коллективы автоматов в лабиринтах // Дискретная математика. – 2003. – Т. 15, вып. 3. – С. 3-40.
7. Сапунов С.В. Контроль детерминированных графов // Труды ИПММ НАНУ. – 2003. – Т. 8. – С. 106-110.
8. Сапунов С.В. Структура класса неотличимости неориентированных помеченых графов // Труды ИПММ НАНУ. – 2005. – Т. 10. – С. 166-172.

С.В. Сапунов

Перевірка відповідності карти при навігації мобільних роботів

Розглядається задача перевірки відповідності навігаційної карти (неорієнтованого графа з відміченими вершинами) і операційного середовища мобільного робота. Задано граф-еталон та нескінчений клас графів над деяким алфавітом відміток. Потрібно для довільного графа з цього класу визначити, чи ізоморфний він еталону. Розв'язок лежить у побудові контрольного експерименту – спеціального виду множини слів у алфавіті відміток та способу його реалізації на графі.

S.V. Sapunov

Map validation problem for mobile robot

The map validation problem for mobile robot is considered. The map is an undirected graph with labeled vertices. A sample graph and an infinite class of graphs over some alphabet of labels is given. The goal is to determine if a graph belonging to this class is isomorphic to the sample graph. The solution lies in constructing a checking experiment, i.e. a special set of words over the alphabet of labels, and its implementation on the graph.

Статья поступила в редакцию 05.07.2006.