УДК 004.3

Е.А. Башков[1], докт. техн. наук., проф.,
С.А. Непочатая[1], студент,
[1]Донецкий национальный технический университет
bashkov@pmi.dgtu.donetsk.ua

Алгоритм вокселизации сферического треугольника

Поставлена задача воксельного разложения сферического треугольника в видеопамяти трехмерного дисплея и предложен метод ее решения. Рассмотрен алгоритм воксельного разложения сферического треугольника и некоторые его модификации. Представлены результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: Воксель, 3D дисплей, воксельное разложение, сферический треугольник.

Введение

Окружающий нас мир - трехмерный, и тенденции создания сверх реалистических дисплеев делает актуальным создание объемных дисплеев. Для многих применений, например, для решения задач распознавания образов, наведения летательных объектов на цель, выполнения хирургических операций, моделирования архитектурных сооружений, задач обучения, в телевидении, кино, развлечениях и др. предпринимаются попытки создания дисплеев для отображения объемных объектов.

Технологии 3D дисплеев в настоящее время развиваются все более и более динамично. Разработано множество подходов к построению 3D устройств отображения, которые делятся на два вида: стереоскопические и объемные. Стереоскопические 3D-дисплеи формируют отдельные изображения для каждого глаза. Такой принцип используется в стереоскопах, известных ещё с начала XIX века. Объёмные дисплеи используют различные физические явления для показа светящихся точек в пределах некоторого объёма.

Создание и использование такого рода устройств требует разработки специальных аппаратных и программных средств. Особенностью устройств отображения на базе объемных технологий является наличие объемного воксельного запоминающего устройства — аналога растровой памяти двумерных устройств отображения. При генерации трехмерного изображения в воксельной памяти программными средствами создается «вокселизированная» модель реальных объектов, состоящая из совокупности трехмерных графических примитивов: отрезков трехмерных прямых, трехмерных плоскостей, дуг, окружностей, сферических треугольников, эллипсоидов и т.п. [1].

Разработка новых алгоритмов генерации графических образов в пространстве трехмерных устройств отображения является актуальной задачей, решение которой может значительно ускорить внедрение объемных трехмерных устройств отображения информации в повседневную жизнь человека.

Постановка задачи

Задача воксельного разложения сферического треугольника может быть поставлена следующим образом.

Пусть некоторая область трехмерного евклидова пространства, которое отображается 3D дисплеем, имеет вид трехмерного параллелепипеда, $\Omega \in R^3$, $0 \le x \le X$, $0 \le y \le Y$, $0 \le z \le Z$. С учетом возможности масштабирования, будем считать, что $X = Y = Z = H$, то есть Ω - трехмерный куб.

Положим, что Ω заполнен вокселями – атомарными элементами, которые отображаются 3D дисплеем. Определим воксель как куб, ориентированный по осям Ω, с единичным ребром. Множество вокселей, заполняющих Ω можно представить как трехмерный массив вокселей $V_{i,j,l}$. Причем, с одной стороны, i, j, l – это индексы вокселя в массиве, принимающие значения $0,1,\dots H$, а с другой, они определяют координаты вокселя в Ω. Таким образом, воксель $V_{i,j,l}$ это подмножество Ω, которое при соответствующем выборе H может быть определено как $i \le x \le i + (1\text{-}\varepsilon)$, $j \le y \le j + (1\text{-}\varepsilon)$, $l \le z \le l + (1\text{-}\varepsilon)$, где ε – бесконечно малая величина.

Соседями некоторого вокселя $V^{(k)}$ с координатами i_k, j_k, l_k будем считать воксели $V^{(g)}$, для которых выполняется условие (1).

$$Max\{|i_g - i_k|, |j_g - j_k|, |l_g - l_k|\} = 1 \quad (1)$$

При проведении дальнейших рассуждений в качестве метрики на множестве вокселей принята функция (2).

$$m_{g,k} = |i_g - i_k| + |j_g - j_k| + |l_g - l_k| \quad (2)$$

Определим координаты V_c центра вокселя $V_{i,j,l}$ в Ω как (3).

$$V_{Cx} = i + 0.5, V_{Cy} = j + 0.5, V_{Cz} = l + 0.5 \quad (3)$$

Допустим, что сферический треугольник лежит на сфере Ф с центром в начале координат и радиусом R. Треугольник образован вершинами $A = [xA, yA, zA]$, $B = [xB, yB, zB]$ и $C = [xC, yC, zC]$, при этом $A \neq B \neq C$ и евклидова норма $\|A\| = \|B\| = \|C\| = R$.

Задачу воксельного разложения сферического треугольника ABC будем понимать как нахождение множества Θ вокселей принадлежащих сфере Ф и лежащих внутри замкнутого отсека(участка) этой сферы, ограниченного отрезками больших кругов AB, BC, CA.

Для любого вокселей $V_{(k)}$ в разложении необходимо обеспечить следующие условия:

– хотя бы одна точка сферы принадлежит вокселю $V_{(k)}$ или, что эквивалентно, длина перпендикуляра, опущенного из центра $V_{(k)}$ на Ф не должна превосходить 0,866 (с учетом единичного ребра вокселя);
– воксели должны лежать внутри области сферы Ф, ограничиваемой отрезками больших кругов AB, BC, CA;
– количество вокселей в разложении должно быть минимально, то есть для любого $V_{(k)}$ из Θ (не представляющего границы AB, BC, CA примитива) имел не более 8 соседей;
– любой $V_{(k)}$ из Θ (не представляющий границы AB, BC, CA примитива) имел не менее 8 соседей - условие обеспечения отсутствия «пробелов» между вокселями разложения.

Базовый алгоритм воксельного разложения сферического треугольника

Пусть имеются вершины A, B, C, которые описывают сферический треугольник. Для нахождения воксельного разложения такого треугольника можно использовать следующий подход.

На начальном этапе формируются три динамических списка:

– список вокселей, входящих в разложение (результирующие воксели);
– список вокселей для проверки (у вокселей могут быть соседи, входящие в результирующее разложение);
– список отбракованных вокселей (воксели не входят в результирующее разложение).

При инициализации в список результирующих вокселей и список вокселей для проверки заносятся воксели, соответствующие вершинам A, B и C.

Пока список вокселей для проверки не пуст, из него выбирается и удаляется первый элемент, вычисляются координаты его 26 соседей и, если сосед еще не был включен в результирующее множество и не был отвергнут, то для него проверяется потенциальная принадлежность сферическому треугольнику и расстояние до поверхности сферы. Если проверка успешно выполнена, то такой воксель заносится в список результирующих вокселей и список вокселей для проверки, иначе - в список отбракованных вокселей.

Процесс завершается когда список вокселей для проверки становится пустым.

Таким образом, в списке результирующих вокселей находятся координаты точек вокселей, которые входят в воксельное разложение заданного сферического треугольника ABC. Для получения оптимального разложения такой список необходимо оптимизировать путем удаления лишних вокселей. Для этого воксели упорядочиваются по увеличению расстояния до поверхности сферы, а затем для каждого из вокселей производится проверка количества соседей, входящих в разложение. Если таких соседей больше 8, то удаляются те из них, расстояние до поверхности которых наибольшее.

Вышеизложенный алгоритм может быть представлен на псевдоязыке следующим образом.

```
Ввод вершин треугольника A, B, C;
Список_результирующих_вокселей = null;
Список_вокселей_для_проверки = null;
Список_отбракованных_вокселей = null;
for(i = 0; i < 3; i++){
  в список результирующих вокселей добавить i-ю вершину;
  в список вокселей для проверки добавить i-ю вершину;
}
while(список вокселей для проверки не пуст){
  Текущий_воксель = выбрать первый элемент из списка вокселей для проверки;
  Соседи = получить соседей текущего вокселя;
```

```
for(i = 0; i < 26; i++){
    if(i-й сосед отбракован || i-й сосед в результате)    continue;
    if(i-й сосед находится в треугольнике && i-й сосед находится на поверхности сферы) {
        в список результирующих вокселей добавить i-го соседа;
        в список вокселей для проверки добавить i-го соседа;
    } else {
        в список отбракованных вокселей добавить i-го соседа;
    }
  }
}
сортировать список результирующих вокселей по возрастанию расстояния до поверхности сферы;
foreach(воксель из списка результирующих вокселей){
  оптимизировать количество соседей вокселя;
}
Вывод Списка_результирующих_вокселей;
```

Следует отметить, что в рассмотренном алгоритме наибольшую вычислительную сложность имеет процесс проверки принадлежности точки сферическому треугольнику, поэтому важно выбрать такой метод, который позволил бы минимизировать аппаратные и временные затраты.

Методы проверки принадлежности точки сферическому треугольнику

Предположим, что найден некоторый q-й воксель разложения, удовлетворяющий условиям. Следующие воксели ищутся среди вокселей-претендентов («соседей») с метрикой не больше 1. Каждый воксель имеет 26 соседей. Приращения координат для таких соседей приведены в таблице 1.

Таблица 1 - Приращение координат для вокселей-претендентов

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
x	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0
y	-1	-1	-1	0	0	0	1	1	1	-1	-1	-1	0
z	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1
	14	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**
x	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	1	1	1	-1	-1	-1	0	0	0	1	1	1
z	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1

После того, как найдены 26 вокселей-претендентов, нужно выбрать из них те, которые потенциально принадлежат результирующему множеству вокселей. Для нахождения таких вокселей можно использовать один из следующих подходов.

1. Проверка принадлежности сферическому треугольнику по площади

Пусть следует проверить принадлежность точки P сферическому треугольнику ABC. Положение точки P в треугольнике показано на рисунке 1.

Для решения задачи формируются три треугольника, лежащих на поверхности сферы: ABP, BCP, ACP. Затем вычисляются их площади этих треугольников: S_1, S_2 и S_3 соответственно. После этого сравнивается сумма площадей S_1, S_2, S_3 с площадью треугольника S_{ABC}. Если точка P лежит в треугольнике ABC, то сумма площадей будет равна площади S_{ABC}. Если же точка не принадлежит треугольнику, сумма площадей S_1, S_2, S_3 превысит площадь треугольника ABC.

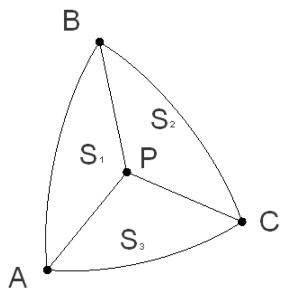

Рисунок 1 – Положение точки P в сферическом треугольнике ABC

Для нахождения площади каждого сферического треугольника используется формула (4).

$$S = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi) \qquad (4)$$

В формуле α, β, γ – углы сферического треугольника. Угол сферического треугольника измеряется величиной двугранного угла между плоскостями, в которых лежат стороны этого угла [2]. Углы сферического треугольника изображены на рисунке 2.

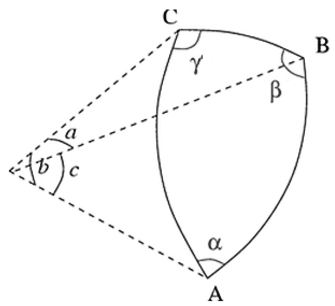

Рисунок 2 – Углы и стороны сферического треугольника

На рисунке 2 a, b, c – стороны сферического треугольника. Сторона сферического треугольника измеряется величиной опирающегося на неё центрального угла [2].

Углы сферического треугольника вычисляются по формулам (5).

$$\begin{aligned} \alpha &= \arccos\left(\frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}\right) \\ \beta &= \arccos\left(\frac{\cos b - \cos c \cos a}{\sin c \sin a}\right) \\ \gamma &= \arccos\left(\frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}\right) \end{aligned} \qquad (5)$$

Стороны сферического треугольника находятся путем вычисления углов, образованных векторами, проведенными из центра сферы в вершины сферического треугольника.

2. Проверка принадлежности сферическому треугольнику по плоскостям

Среди найденных вокселей-претендентов выбираются те, центры которых расположены между тремя плоскостями, каждая из которых образована одной из сторон сферического треугольника и точкой центра сферы, то есть необходимо построить дополнительные плоскости AOB, BOC, COA, как это изображено на рисунке 3.

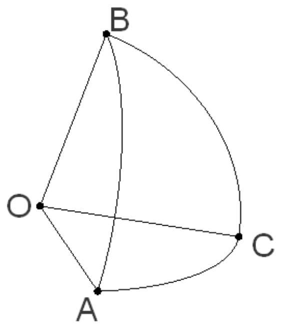

Рисунок 3 – Дополнительные плоскости

Каждая такая плоскость имеет уравнение Ax + By + Cz + D = 0, где A, B, C, D - постоянные, причем A, B и C одновременно не равны нулю. Зная координаты вершин треугольника и точки центра сферы, можно найти коэффициенты плоскостей по формулам (6).

$$\begin{cases} A = y1\,(z2 - z3) + y2\,(z3 - z1) + y3\,(z1 - z2) \\ B = z1\,(x2 - x3) + z2\,(x3 - x1) + z3\,(x1 - x2) \\ C = x1\,(y2 - y3) + x2\,(y3 - y1) + x3\,(y1 - y2) \\ -D = x1\,(y2\,z3 - y3\,z2) + x2\,(y3\,z1 - y1\,z3) + x3\,(y1\,z2 - y2\,z1) \end{cases} (6)$$

Принадлежность вокселя-претендента сферическому треугольнику определяется его положением относительно трех дополнительных плоскостей. Так, если воксель-претендент принадлежит сферическому треугольнику, то подставив координаты его центра в уравнения всех трех плоскостей, мы получим неотрицательное значение. Если же при подстановке координат центра в уравнения хотя бы одно из значений – отрицательное, значит, рассматриваемый воксель не принадлежит сферическому треугольнику.

Экспериментальные исследования алгоритма воксельного разложения сферического треугольника

Экспериментальное исследование предложенного алгоритма (с проверкой принадлежности точки треугольнику двумя методами) заключалось в генерации 1000 произвольных сферических треугольников в Ω с $H = 20$. Вершины треугольников генерировались с помощью генератора псевдослучайных чисел. Эксперименты выполнялись на персональном компьютере CPU Intel(R) Core(TM) i5-3317U CPU @ 1.70GHz, 8ГБ ОЗУ. Для измерения времени работы алгоритма в начале и в конце работы программы записывались метки времени. В качестве времени выполнения программы была использована разность начальной и конечной меток, хотя данный показатель нельзя считать абсолютно точным (на практике данный подход иногда дает неверные результаты). Обобщенные результаты экспериментов приведены в таблице 2.

Таблица 2. Результаты генерации 1000 треугольников

	Метод проверки площадью	Метод проверки плоскостями
Время генерации 1000 треугольников, мс	261620	226566
Количество сгенерированных вокселей	586090	586090
Среднее время генерации треугольника, мс	261,62	226,56
Среднее время генерации вокселя, мс	0,446	0,387

Исходя из данных, приведенных в таблице 2, можно сделать вывод о том, что метод проверки плоскостями в среднем на 15% быстрее метода проверки площадью.

Кроме того, результат эксперимента показывает, что работа метода проверки принадлежности точки сферическому треугольнику с помощью вспомогательных плоскостей оказалась быстрее метода проверки площадью в 96% вариантов треугольников. Это объясняется тем, что для данного метода требуется меньший объем вычислений, т.к. в начале алгоритма производится расчет коэффициентов трех плоскостей, а затем в цикле в найденные уравнения подставляются координаты конкретных точек. Для метода проверки с помощью площадей на начальной этапе возможно лишь вычисление общей площади сферического треугольника, а затем в цикле происходит вычисление площадей трех треугольников, образованных конкретной заданной точкой и вершинами исходного сферического треугольника. Очевидно, что вычисление значения уравнения в точки менее трудоемкий процесс, чем расчет площади сферического треугольника.

На рисунке 5 представлен пример генерации воксельного разложения сферического треугольника, визуализированный с помощью пакета Mathematica 9.

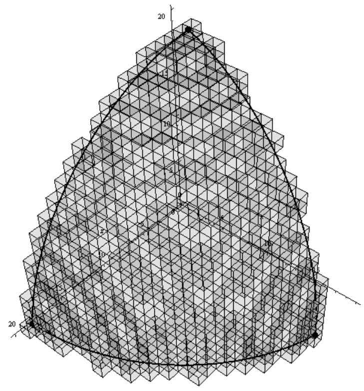

Рисунок 5 - Пример генерации воксельного разложения сферического треугольника

Выводы

В работе предложен подход для решения задачи вокселизации сферического треугольника.

В предложенном алгоритме рассмотрены два метода проверки точки на принадлежность сферическому треугольнику и проведен их сравнительный анализ.

Предложенный в работе подход может рассматриваться только как начальный, требующий дополнительных исследований в направлении минимизации количества вокселей в генерируемом разложении и его оптимизации с целью сокращения как временных затрат, так и требуемой памяти.

Список использованной литературы

1. Башков Е.А., Авксентьева О.А., Аль-Орайкат Анас М. К построению генератора графических примитивов для трехмерных дисплеев [Текст]. В сб. Наукові праці Донецького національного технічного університету, серія "Проблеми моделювання та автоматизації проектування динамічних систем". Вип. 7 (150). - Донецьк, ДонНТУ. - 2008 .- ст. 203-214.
2. Сферический треугольник [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://ru.wikipedia.org/wiki/Сферический_треугольник
3. Сферическая геометрия [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://ru.wikipedia.org/wiki/Сферическая_геометрия
4. Башков, Е.А., Авксентьева, О.А., Половинкин, О.А. Базовый алгоритм воксельного разложения пространственного треугольника. В сб. Наукові праці Донецького національного технічного університету. Серія «Проблеми моделювання та автоматизації проектування» (МАП-2011). Випуск: 10 (197) - Донецьк: ДонНТУ. - 2011. – 290 с.
5. Favalora G.E. Volumetric 3D Displays and Application Infrastructure [Текст] // "Computer", 2005, August, pp 37- 44.

Надійшла до редколегії 24.04.2014

БАШКОВ Є.О.[1], НЕПОЧАТА С.О.[1]
[1] Донецький національний технічний університет

АЛГОРИТМ ВОКСЕЛІЗАЦІЇ СФЕРИЧНОГО ТРИКУТНИКА

Поставлена задача воксельної декомпозиції сферичного трикутника у відеопам'яті тривимірного дісплею та наданий методов її вирішення. Розглянуто базовий алгоритм розложення сферичного трикутника та деякі його модифікації. Наведені результати чисельних експерементів.

Ключові слова: Воксель, 3D дісплей, воксельна декомпозиція, сферичний трикутник.

BASHKOV E.A.[1], NEPOCHATAYA S.A.[1]
[1] Donetsk National Technical University

THE ALGORITHM TO GENERATE VOXEL DECOMPOSITION FOR SHPERICAL TRIANGLE

algorythm of voxel decomposition of a spherical triangle and some modifications. The results of numerical experiments

Keywords: Voxel, 3D display, voxel decomposition, spherical triangle.