§44. Сети с разнотипными заявками многих классов*

Источник статьи : http://ebooks.grsu.by/sistemi_i_seti/44-seti-s-raznotipnymi-zayavkami-mnogikh-klassov.htm

Рассмотрим открытую сеть МО, которая состоит из систем обслуживания, в i -й СМО для обслуживания формируются m_i очередей, $i=\overline{1,n}$. Состояние очереди α i -й СМО характеризуется вектором

$$\bar{k}_{i\alpha} = (k_{i\alpha 11}, k_{i\alpha 21}, \ldots, k_{i\alpha r_1 1}, k_{i\alpha 12}, k_{i\alpha 22}, \ldots, k_{i\alpha r_2 2}, \ldots,$$

$$k_{i\alpha 1g}, k_{i\alpha 2g}, \ldots, k_{i\alpha r_g g}, \ldots, k_{i\alpha 1h}, k_{i\alpha 2h}, \ldots, k_{i\alpha r_h h}),$$

где $k_{i\alpha cg}$ – число заявок типа класса g в очереди α i -й СМО, $i=\overline{1,n}$, $\alpha=\overline{1,m_i}$, $c=\overline{1,r_g}$, $g=\overline{1,h}$, состояние i -й СМО – вектором

$$\bar{k}_i = (\bar{k}_{i1}, \bar{k}_{i2}, \ldots, \bar{k}_{im_i}),\ i=\overline{1,n},$$

а состояние сети – вектором

$$k = (\bar{k}_1, \bar{k}_2, \ldots, \bar{k}_n).$$

Пространство состояний очереди α i -й СМО $X_{i\alpha}$ – некоторое подмножество точек с целочисленными неотрицательными координатами $(r_1 + r_2 + \ldots + r_n)$ -мерного евклидова пространства, пространство состояний i-й СМО ,$X_i = X_{i1} \times X_{i2} \times \ldots \times X_{im_i}$ пространство состояний сети $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$.

Опишем кратко различные объекты и процессы, для которых сети с различными классами заявок многих типов могут применяться в качестве стохастических моделей.

1) Процессы обработки исков и премий в страховых компаниях (СК).

Пусть h – количество видов (классов) страхования; к ним относятся, например, страхование жизни, имущества, профессий и т.д. Через r обозначим количество типов заявок в каждом виде страхования. Обычно $r = 2$, при этом под обслуживанием заявок понимается обработка в каждом виде страхования премий ($c = 1$) или исков ($c = 2$) клиентов, заключивших с компанией договора страхования. Премии и иски различных видов могут обрабатываться одними и теми же страховщиками компании (СМО), но в ряде случаев – разными.

2) Обслуживание клиентов в банках.

Заявками в данном случае являются различные договора клиентов банков. Это могут быть договора-депозиты в валюте (первый класс заявок) и договора – депозиты в рублях (второй класс заявок), поэтому обычно $h = 2$. Договора первого класса делятся на $r_1 = 10$ типов в зависимости от промежутков времени, на которые они заключены: короткие (1 месяц), доходные (3 мес.), сберегательные-плюс (6 мес.), ветеранские (12 мес.), профессиональные (18 мес.), срочные, рождественские новогодние, юбилейные (24 мес.), долгосрочные (60 мес.). Примерно на такое же количество типов делятся и договора второго класса: короткие (10 дней), краткосрочные (30 дн.), рождественские (60 дн.), праздничные (90 дн.), юбилейные (180 дн.), годовые (360 дн.). Данные взяты в АКБ «Инфобанк».

Договора различных классов и типов могут обслуживаться одними и теми же сотрудниками банков (СМО).

3) Медицинское обслуживание.

В медицинских учреждениях могут лечиться (обслуживаться) пациенты (заявки) различных видов (классов), например, больные сахарным диабетом (класс 1), кардио-больные (класс 2), онко-больные (класс 3) и т.д. Больные первого класса делятся на больных сахарным диабетом первого и второго типов, т.е. $r_1 = 2$. Больных второго класса можно разделить на следующие типы: больные, перенесшие инфаркты; больные, страдающие пороками сердца; больные с кардитами (воспалительными заболеваниями сердца), т.е. $r_2 = 3$. Больных третьего класса условно можно разделить на больных с опухолями желудка, кишечника, печени, почек, т.е. $r_3 = 4$. Количество типов больных в каждом классе может быть увеличено, но это не влияет в данном случае на математические исследования, т.к. они проведены для произвольных h и r_g, $g=\overline{1,h}$.

Пациенты различных классов и типов могут посещать как одних и тех же врачей (СМО), так и разных.

4) Производство изделий.

В данном случае заявками служат заготовки по производству изделий, h – количество видов (классов) производимых изделий; каждая заготовка для изделия может быть нескольких типов и проходить различные этапы (СМО) обработки (обслуживания).
Будем предполагать, что состояние сети $k(t)$ является эргодическим неприводимым марковским процессом. Введем для удобства следующие обозначения:

$$\Sigma_1 = \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{m_i} \sum_{\beta=1}^{m_j} \sum_{c=1}^{r_g} \sum_{s=1}^{r_q} \sum_{g,q=1}^{h},$$

$$\Sigma_2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{m_i} \sum_{c=1}^{r_g} \sum_{g=1}^{h}, \qquad \Sigma_3 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{m_j} \sum_{s=1}^{r_q} \sum_{q=1}^{h},$$

очевидно, что $\Sigma_1 = \Sigma_2 \Sigma_3$. Тогда из уравнений глобального равновесия следует:

$$\begin{aligned} &\Sigma_1 P(k + I_{i\alpha cg} - I_{j\beta sq})\lambda(k + I_{i\alpha cg} - I_{j\beta sq}, k)u(k_{j\beta sq}) + \\ &+ \Sigma_3 \left[P(k + I_{j\beta sq})\lambda(k + I_{j\beta sq}, k) + P(k - I_{j\beta sq})\lambda(k - I_{j\beta sq}, k)u(k_{j\beta sq}) \right] = \\ &= P(k)\left[\Sigma_1 \lambda(k, k + I_{i\alpha cg} - I_{j\beta sq})u(k_{j\beta sq}) + \right. \\ &\left. + \Sigma_3 \left[\lambda(k, k + I_{j\beta sq}) + \lambda(k, k - I_{j\beta sq})u(k_{j\beta sq}) \right] \right], \end{aligned} \tag{7.34}$$

где $P(k)$ – вероятность состояния сети в стационарном режиме, $I_{i\alpha cg}$ – вектор размерности $n\sum_{i=1}^{n} m_i \sum_{g=1}^{h} r_g$ с нулевыми компонентами, за исключением компоненты с номером $n\sum_{g=1}^{h} r_g \left(\sum_{j=1}^{i-1} m_j + \alpha - 1 \right) + c$, которая равна 1, $\lambda(k,z)$ – интенсивность переходов сети из состояния в состояние z, $u(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$ – функция Хевисайда.
Наша цель – установить условия эргодичности процесса $k(t)$ и определить его финальное стационарное распределение.
Рассмотрим случай, когда в сеть поступает простейший поток заявок с параметром λ; в очередь α i-й СМО каждая заявка типа c класса g входящего потока независимо от других поступает с вероятностью $p_{0i\alpha cg}(k)$, зависящей от состояния сети k, $\Sigma_2\, p_{0i\alpha cg}(k) = 1$, $k \in X$. После завершения обслуживания в очереди α i-й СМО, когда состояние сети равно k, заявка типа c класса g переходит с вероятностью $P_{i\alpha cgj\beta sq}(k)$ в очередь β j-й СМО как заявка типа s класса q и с вероятностью $P_{i\alpha cg0}(k)$ уходит из сети,

$$\Sigma_3\, p_{i\alpha cgj\beta sq}(k) + p_{i\alpha cg0}(k) = 1,\ i = \overline{1,n},\ \alpha = \overline{1,m_i},\ c = \overline{1,r_g},\ g = \overline{1,h},\ k \in X. \tag{7.35}$$

Времена обслуживания заявок в очередях имеют показательное распределение и пусть $\mu_{i\alpha cg}(k_{i\alpha cg})$ – интенсивность обслуживания заявок типа c класса g в α-й очереди i-й СМО, когда в этой очереди находятся $k_{i\alpha cg}$ заявок типа класса g, $i = \overline{1,n}$, $\alpha = \overline{1,m_i}$, $c = \overline{1,r_g}$, $g = \overline{1,h}$. В этом случае система уравнений для вероятностей состояний сети имеет вид

$$\begin{aligned} &\frac{dP(k,t)}{dt} = -\left[\lambda + \Sigma_3\, \mu_{j\beta sq}(k_{j\beta sq}) \right] P(k,t) + \\ &+ \Sigma_3 \left\{ \mu_{j\beta sq}(k_{j\beta sq} + 1)\, p_{j\beta sq0}(k + I_{j\beta sq}) P(k + I_{j\beta sq}, t) + \right. \\ &+ u(k_{j\beta sq}) \left[\lambda p_{0j\beta sq}(k - I_{j\beta sq}) P(k - I_{j\beta sq}, t) + \right. \\ &\left.\left. + \Sigma_2\, \mu_{i\alpha cg}(k_{i\alpha cg} + 1)\, p_{i\alpha cgj\beta sq}(k + I_{i\alpha cg} - I_{j\beta sq}) P(k + I_{i\alpha cg} - I_{j\beta sq}, t) \right] \right\}, \end{aligned} \tag{7.36}$$

поэтому для интенсивностей переходов между состояниями сети справедливы следующие соотношения:

$$\lambda\left(k+I_{i\alpha cg}-I_{j\beta sq},k\right)=\mu_{i\alpha cg}(k_{i\alpha cg}+1)p_{i\alpha cgj\beta sq}(k+I_{i\alpha cg}-I_{j\beta sq}),$$

$$\lambda\left(k,k+I_{i\alpha cg}-I_{j\beta sq}\right)=\mu_{j\beta sq}(k_{j\beta sq})p_{j\beta sqi\alpha cg}(k).$$

Теорема 7.3. *Стационарные вероятности состояний сети имеют форму произведения:*

$$P(k)=P(I_0)\prod_{i=1}^{n}\prod_{\alpha=1}^{m_i}\prod_{c=1}^{r_g}\prod_{g=1}^{h}\frac{e_{i\alpha cg}(1)e_{i\alpha cg}(2)\cdot\ldots\cdot e_{i\alpha cg}(k_{i\alpha cg})}{\mu_{i\alpha cg}(1)\mu_{i\alpha cg}(2)\cdot\ldots\cdot\mu_{i\alpha cg}(k_{i\alpha cg})}, \tag{7.37}$$

где произведение в правой части равно 1 при $k_{i\alpha cg}=0$, $e_{i\alpha cg}(k_{i\alpha cg})$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{gathered}\left[\Sigma_2\, e_{i\alpha cg}(k_{i\alpha cg}+1)p_{i\alpha cgj\beta sq}(k+I_{i\alpha cg}-I_{j\beta sq})+\lambda p_{0j\beta sq}(k-I_{j\beta sq})\right]u(k_{j\beta sq})=\\ =\left[\Sigma_2\, p_{j\beta sqi\alpha cg}(k)+p_{j\beta sq0}(k)\right]e_{j\beta sq}(k_{j\beta sq}),\ j=\overline{1,n},\ \beta=\overline{1,m_j},\ s=\overline{1,r_q},\ q=\overline{1,h},\end{gathered} \tag{7.38}$$

которая, предполагается, имеет единственное решение, $I_0 - n\sum_{i=1}^{n}m_i\sum_{g=1}^{h}r_g$ *– вектор с нулевыми компонентами.*

Стационарное распределение P(k) существует и единственно при условии эргодичности марковского процесса k(t), которое выполняется, если существует сумма бесконечного ряда

$$\Theta=\prod_{i=1}^{n}\prod_{\alpha=1}^{m_i}\prod_{c=1}^{r_g}\prod_{g=1}^{h}\frac{e_{i\alpha cg}(1)e_{i\alpha cg}(2)\cdot\ldots\cdot e_{i\alpha cg}(k_{i\alpha cg})}{\mu_{i\alpha cg}(1)\mu_{i\alpha cg}(2)\cdot\ldots\cdot\mu_{i\alpha cg}(k_{i\alpha cg})}<\infty. \tag{7.39}$$

Доказательство. Из (7.37) следует

$$\begin{gathered}P\left(k+I_{i\alpha cg}-I_{j\beta sq}\right)=P(k)\frac{e_{i\alpha cg}(k_{i\alpha cg}+1)\mu_{j\beta sq}(k_{j\beta sq})}{e_{j\beta sq}(k_{j\beta sq})\mu_{i\alpha cg}(k_{i\alpha cg}+1)},\\ P\left(k+I_{j\beta sq}\right)=P(k)\frac{e_{j\beta sq}(k_{j\beta sq}+1)}{\mu_{j\beta sq}(k_{j\beta sq}+1)},\ P\left(k-I_{j\beta s}\right)=P(k)\frac{\mu_{j\beta sq}(k_{j\beta sq})}{e_{j\beta sq}(k_{j\beta sq})}.\end{gathered} \tag{7.40}$$

Стационарные вероятности состояний сети, как видно из (7.36), удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{gathered}\Sigma_1\,\mu_{i\alpha cg}(k_{i\alpha cg}+1)p_{i\alpha cgj\beta sq}(k+I_{i\alpha cg}-I_{j\beta sq})P\left(k+I_{i\alpha cg}-I_{j\beta sq}\right)u(k_{j\beta sq})+\\ +\Sigma_3\,\mu_{j\beta sq}(k_{j\beta sq}+1)p_{j\beta sq0}(k+I_{j\beta sq})P\left(k+I_{j\beta sq}\right)+\\ +\Sigma_3\,\lambda p_{0j\beta sq}(k-I_{j\beta sq})P\left(k-I_{j\beta sq}\right)u(k_{j\beta sq})=\\ =\left[\lambda+\Sigma_3\,\mu_{j\beta sq}(k_{j\beta sq})\right]P(k).\end{gathered} \tag{7.41}$$

Подставив выражения (7.40) в систему (7.41), будем иметь

$$\begin{gathered}\Sigma_1\, p_{i\alpha cgj\beta sq}(k+I_{i\alpha c}-I_{j\beta sq})\mu_{j\beta sq}(k_{j\beta sq})\frac{e_{i\alpha cg}(k_{i\alpha cg}+1)}{e_{j\beta sq}(k_{j\beta sq})}u(k_{j\beta sq})+\\ +\Sigma_3\, p_{j\beta sq0}(k+I_{j\beta sq})e_{j\beta sq}(k_{j\beta sq}+1)+\\ +\lambda\Sigma_3\, p_{0j\beta sq}(k-I_{j\beta sq})\frac{\mu_{j\beta sq}(k_{j\beta sq})}{e_{j\beta sq}(k_{j\beta sq})}u(k_{j\beta sq})=\\ =\lambda+\Sigma_3\,\mu_{j\beta sq}(k_{j\beta sq}).\end{gathered} \tag{7.42}$$

Но, используя (7.38), имеем

$$\sum\nolimits_3 \mu_{j\beta sq}(k_{j\beta sq})u(k_{j\beta sq})\left[\sum\nolimits_2 p_{i\alpha cgj\beta sq}(k+I_{i\alpha cg}-I_{j\beta sq})\frac{e_{i\alpha cg}(k_{i\alpha cg}+1)}{e_{j\beta sq}(k_{j\beta sq})}+\right.$$

$$\left.+\lambda\frac{p_{0j\beta sq}(k-I_{j\beta sq})}{e_{j\beta sq}(k_{j\beta sq})}\right]=\sum\nolimits_3 \mu_{j\beta sq}(k_{j\beta sq})\left[\sum\nolimits_2 p_{j\beta sqi\alpha cg}(k)+p_{j\beta sq0}(k)\right]=$$

$$=\sum\nolimits_1 p_{j\beta sqi\alpha cg}(k)\mu_{j\beta sq}(k_{j\beta sq})+\sum\nolimits_3 p_{j\beta sq0}(k)\mu_{j\beta sq}(k_{j\beta sq}),$$

то есть

$$\sum\nolimits_1 p_{i\alpha cgj\beta sq}(k+I_{i\alpha cg}-I_{j\beta sq})\mu_{j\beta sq}(k_{j\beta sq})\frac{e_{i\alpha cg}(k_{i\alpha cg}+1)}{e_{j\beta sq}(k_{j\beta sq})}u(k_{j\beta sq})+$$

$$+\lambda\sum\nolimits_3\frac{p_{0j\beta sq}(k-I_{j\beta sq})\mu_{j\beta sq}(k_{j\beta sq})}{e_{j\beta sq}(k_{j\beta sq})}u(k_{j\beta sq})= \qquad (743)$$

$$=\sum\nolimits_1 p_{j\beta sqi\alpha cg}(k)\mu_{j\beta sq}(k_{j\beta sq})+\sum\nolimits_3 p_{j\beta sq0}(k)\mu_{j\beta sq}(k_{j\beta sq}).$$

Кроме того, заменив в (7.38) $k_{j\beta sq}$ на $k_{j\beta sq}+1$ и взяв в обеих частях этого равенства сумму $\sum_3$, получим

$$\sum\nolimits_3 p_{j\beta sq0}(k+I_{j\beta sq})e_{j\beta sq}(k_{j\beta sq}+1)=\lambda\sum\nolimits_3 p_{0j\beta sq}(k)=\lambda. \qquad (7.44)$$

Перепишем выражение (7.35) в виде

$$\sum\nolimits_2 p_{j\beta sqi\alpha cg}(k)+p_{j\beta sq0}(k)=1.$$

Умножив это равенство на $\mu_{j\beta sq}(k_{j\beta sq})$ и взяв сумму $\sum_3$, в обеих частях, получаем

$$\sum\nolimits_1 p_{j\beta sqi\alpha cg}(k)\mu_{j\beta sq}(k_{j\beta sq})+$$

$$+\sum\nolimits_3 p_{j\beta sq0}(k)\mu_{j\beta sq}(k_{j\beta sq})=\sum\nolimits_3 \mu_{j\beta sq}(k_{j\beta sq}). \qquad (7.45)$$

Таким образом, из (7.43)–(7.45) вытекает, что при выполнении соотношений (7.37), (7.38) выражение (7.42) превращается в тождество.Покажем, что условие (7.39) является условием эргодичности случайного процесса *k(t)*. Воспользуемся эргодической теоремой Фостера (см. теорему 3.7), согласно которой достаточно проверить, что система уравнений

$$\sum_{z\in X} x(z)\frac{\lambda(z,k)}{\lambda(z)}=x(k),\ \lambda(z)>0,\ k\in X, \qquad (7.46)$$

где $\lambda(z)$ – интенсивность выхода из состояния , имеет нетривиальное решение $x(k)$, $k \in X$, такое, что $\sum_{k\in X}\left|x(k)\right|<\infty.$ Действительно, беря $x(k)=\lambda(k)P(k)$, где $P(k)$ определяется соотношением (7.37), получим, что (7.46) удовлетворяется, т.к.

$$\sum_{z\in X} P(z)\lambda(z,k)=P(k)\lambda(k)=P(k)\sum_{m\in X}\lambda(k,m),\ k\in X,$$

совпадают с уравнениями глобального равновесия (7.34), которым, как мы проверили, удовлетворяют вероятности $P(k)$, $k\in X$. Сходимость ряда

$$\sum_{k\in X}\left|x(k)\right|=\sum_{k\in X}\lambda(k)P(k)$$

следует из ограниченности $\lambda(k)$ и сходимости ряда (7.39). Значит, при выполнении условия (7.39) процесс *k(t)* эргодичен. Поэтому финальное распределение является единственным стационарным распределением и, следовательно, совпадает с $\{P(k),\ k\in X\}$, где определяется (7.37).

---

* Matalytski M., Koluzaewa E. Queueing networks with multi-type messages of multiple classes: analysis and applications // Computer Science. – 2006. – V.6. – №10. – P. 19–36.