

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛООБМЕННЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ДВИЖЕНИИ ВОЗДУХА В ГОРНЫХ ВЫРАБОТКАХ РУДНЫХ ШАХТ

### MATHEMATICAL MODELING OF HEAT EXCHANGE PROCESSES AT THE MOVEMENT OF AIR IN MINE WORKINGS OF ORE MINES

Разработка рудных месторождений в глубоких шахтах Кривбасса и Запорожского железорудного комбината (ЗЖРК) сопровождается ухудшением условий труда вследствие повышения температуры воздуха в горных выработках до 28-30°C. Согласно требованиям «Правил безопасности...» при температуре воздуха больше 26°C необходимо применять меры по её снижению. Разработка способов нормализации микроклимата в глубоких шахтах требует научного обоснования теплообменных процессов в горных выработках [1].

Учитывая воздействия различных факторов на теплообменные процессы, большая часть которых порой даже неконтролируема, можно прийти к естественному выводу о необходимости построения их математических моделей с применением вычислительной техники [2].

На рис. 1 представлена общая схема проветривания выработки воздухом. Согласно этой схеме, вначале охлаждаемый воздух подается сверху вниз по вертикальному стволу шахты на глубину  $H$  (I участок). Затем он движется, по горизонтальной выработке длиной  $L$  (II участок) и, наконец, поднимается вверх на поверхность шахты (III участок).

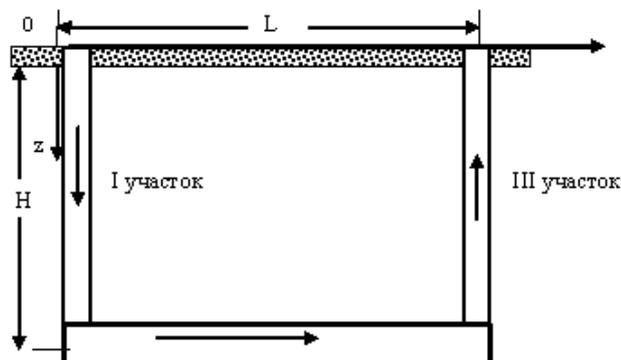


Рис. 1. Схема движения воздуха в горных выработках.

Для 1-ого участка математическая модель, описывающая нестационарный теплообменный процесс, представится в виде дифференциального уравнения в частных производных первого порядка [3]

$$\frac{\partial t_1}{\partial \tau} = w_1 \frac{\partial t_1}{\partial z} - \frac{\alpha_1 \cdot \Pi_1}{c_1 \cdot \rho_1 \cdot s_1} (t_1 - t_{1c}), \quad (0 \leq z \leq H), \quad (1)$$

где  $t$  - температура воздуха, °С;  $t_{1c}$  - температура стенки ствола шахты, °С;  $\tau$  - время, с;  $w_1$  - скорость воздуха, м/с;  $c_1$  - теплоемкость воздуха, Дж/кг°С;  $\rho$  - плотность воздуха, кг/м<sup>3</sup>;  $\alpha_1$  - коэффициент теплоотдачи, Вт/м<sup>2</sup>°С;  $\Pi_1$ ,  $s_1$  - периметр и площадь поперечного сечения ствола шахты, (м, м<sup>2</sup>) соответственно.

Если воспользоваться уравнением неразрывности  $\rho$  [4]

$$c_1 \cdot \rho_1 \cdot w_1 = G_0, \quad (2)$$

где  $G_0$  - массовый расход воздуха, поступающего в ствол шахты, кг/с, то уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial t_1}{\partial \tau} = -\frac{1}{\rho_1 \cdot s_1} (G_0 \frac{\partial t_1}{\partial z} + \frac{\alpha_1 \cdot \Pi_1}{c_1} (t_1 - t_{1c})), \quad (0 \leq z \leq H), \quad (3)$$

Для однозначного решения поставленной задачи необходимо также задать начальное и граничное условия:

$$t_1(\tau = 0) = t_{1c}, \quad (4) \quad \text{и} \quad t_1(z = 0) = t_0. \quad (5)$$

Так как воздух движется сверху вниз, то в уравнении (1) необходимо учесть, возрастание температуры стенок ствола шахты с глубиной, начиная от температуры нейтральной зоны. Сама же зависимость может быть аппроксимирована линейной функцией

$$t_{1c} = t_n + k \cdot z, \quad (6)$$

где  $t_n$  - температура нейтрального слоя, °С,  $k$  - коэффициент, учитывающий возрастание температуры, °С/м.

Кроме того, по мере углубления увеличивается плотность воздуха, что определяется формулой [4]

$$\rho_1 = \rho_0 \cdot e^{\frac{z}{h_0}}, \quad (7)$$

где  $\rho_0$  - плотность воздуха на поверхности земли, кг/м<sup>3</sup>,  $h_0 = \frac{p_0}{\rho_0 g}$ ;  $p_0$  - давление на поверхности земли, Па;  $g$  - ускорение свободного падения, м/с<sup>2</sup>.

Анализ зависимости плотности воздуха от глубины шахты показывает, что при рассматриваемых глубинах шахт (порядка 1,5 км) зависимость (7) может быть аппроксимирована с достаточной точностью линейной функцией

$$\rho_1 = \rho_0 \cdot (1 + l \cdot z), \quad (8)$$

где  $l$  - параметр, характеризующий скорость возрастания относительной плотности воздуха, 1/м.

На рис.2 графики зависимости плотности воздуха от глубины.

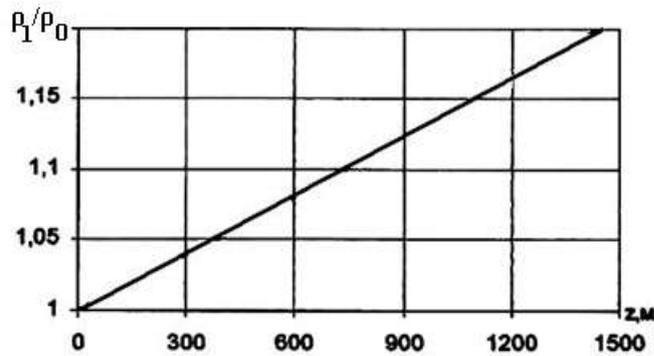


Рис. 2. Зависимость относительной плотности воздуха от глубины шахты.

Анализ графика, представленного на рис.2 показывает, что с увеличением глубины разработки относительная плотность воздуха линейно возрастает.

С учетом формул (6) и (8) уравнение (3) примет вид

$$\frac{\partial t_1}{\partial \tau} = - \frac{1}{s_1 \cdot \rho_0 \cdot (1 + l \cdot z)} \left( G_0 \frac{\partial t_1}{\partial z} + \frac{\alpha_1 \cdot \Pi_1}{c_1} (t_1 - t_n - k \cdot z) \right), \quad (0 \leq z \leq H), \quad (9)$$

а начальное условие (4) запишется так

$$t_1(\tau = 0) = t_n + k \cdot z. \quad (10)$$

Уравнение (9) с учетом условий (5) и (10) является математической моделью нестационарного процесса теплообмена на 1-ом участке, то есть при движении воздуха сверху вниз по стволу шахты.

На II-ом участке, при движении воздуха по горизонтальной выработке, математическая модель процесса теплообмена задается уравнением

$$\frac{\partial t_2}{\partial \tau} = - \frac{1}{s_2 \cdot \rho_0 \cdot (1 + l \cdot H)} \left( G_0 \frac{\partial t_2}{\partial x} + \frac{\alpha_2 \cdot \Pi_2}{c_2} (t_2 - t_n - k \cdot H) \right). \quad (11)$$

При этом, очевидно, должны выполняться начальное и граничное условия

$$t_2(\tau = 0) = t_n + k \cdot H, \quad (12) \quad \text{и} \quad t_2(z = H) = t_1(z = H). \quad (13)$$

Второе условие указывает на равенство температур при переходе воздуха из первого участка во второй.

На III-ем участке движение воздуха происходит снизу вверх, что позволяет записать математическую модель процесса теплообмена в виде уравнения

$$\frac{\partial t_3}{\partial \tau} = - \frac{1}{s_3 \cdot \rho_0 \cdot (1 + l \cdot z)} \left( G_0 \frac{\partial t_3}{\partial z} - \frac{\alpha_3 \cdot \Pi_3}{c_3} (t_3 - t_n - k \cdot z) \right), \quad (0 \leq z \leq H), \quad (14)$$

с соблюдением начального и граничного условий

$$t_3(\tau = 0) = t_n + k \cdot z, \quad (15) \quad \text{и} \quad t_3(z = H) = t_2(z = H). \quad (16)$$

Таким образом, процесс теплообмена при прохождении охлажденного воздуха по горным выработкам описывается дифференциальными уравнениями в частных производных первого порядка (9), (11) и (14) с учетом начальных и граничных условий (5), (10), (12), (13), (15) и (16), что, в целом, и представляет математическую модель исследуемого процесса теплообмена.

Анализ построенной модели процесса теплообмена позволяет сделать вывод о ее сложности, как для решения, так и для последующего применения. Вместе с тем, при движении охлажденного воздуха по горным выработкам через некоторое время устанавливается стационарное распределение температур, которое больше всего интересует на практике.

Поэтому целесообразно приведение математической модели к стационарному виду, что достигается приравниванием производных по времени нулю.

На I-ом участке

$$\frac{dt_1}{dz} = -\frac{\alpha_1 \cdot \Pi_1}{c_1 \cdot G_0} (t_1 - t_n - k \cdot z), \text{ при } t_1(z=0) = t_0. \quad (17)$$

На II-ом участке

$$w_2 \frac{dt_2}{dx} = -\frac{\alpha_2 \cdot \Pi_2}{c_2 \cdot G_0} (t_2 - t_n - k \cdot H), \text{ при } t_2(x=0) = t_1(z=H). \quad (18)$$

На III-ем участке

$$w_3 \frac{dt_3}{dz} = -\frac{\alpha_3 \cdot \Pi_3}{c_3 \cdot G_0} (t_3 - t_n - k \cdot z), \text{ при } t_3(z=H) = t_2(x=L). \quad (19)$$

Уравнения (17), (18) и (19) являются линейными дифференциальными уравнениями первого порядка и допускают аналитические решения.

Так как дифференциальное уравнение (17) является линейным с постоянными коэффициентами, то для его решения воспользуемся интегрирующим множителем. Прежде всего, введем новое обозначение и сделаем замену переменной

$$b_1 = -\frac{\alpha_1 \cdot \Pi_1}{c_1 \cdot G_0}, \quad \theta_1 = t_1 - t_n - k \cdot z. \quad (20)$$

Тогда задача Коши примет вид

$$\frac{d\theta_1}{dz} + b_1 \cdot \theta_1 = -k, \quad \theta_1(z=0) = t_0 - t_n. \quad (21)$$

Пользуясь интегрирующим множителем  $e^{b_1 \cdot z}$ , получаем

$$\frac{d\theta_1 e^{b_1 z}}{dz} = -k e^{b_1 z}. \quad (22)$$

Уравнение (22) является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Поэтому последовательно решаем

$$d\theta_1 e^{b_1 z} = -k e^{b_1 z} dz, \quad \int d(\theta_1 e^{b_1 z}) = -k \int e^{b_1 z} dz, \quad \theta_1 e^{b_1 z} = -\frac{k}{b_1} e^{b_1 z} + C,$$

$$\theta_1 = -\frac{k}{b_1} + C e^{-b_1 z}.$$

Учитывая граничное условие (21), находим

$$\theta_1 = -\frac{k}{b_1} + (t_0 - t_n + \frac{k}{b_1}) \cdot e^{-b_1 z}.$$

С учетом замены (20) окончательно получаем стационарное распределение температуры на I-ом участке по длине ствола шахты [5]

$$t_1 = t_n - \frac{k}{b_1} + k \cdot z + (t_0 - t_n + \frac{k}{b_1}) \cdot e^{-b_1 z}. \quad (23)$$

На II-ом участке задача Коши (18) после замены

$$b_2 = \frac{\alpha_2 \cdot \Pi_2}{c_2 \cdot G_0}, \quad \theta_1 = t_2 - t_H - k \cdot H \quad (24)$$

принимает вид

$$\frac{d\theta_1}{dz} + b_1 \cdot \theta_1 = -k \quad (25)$$

$$\theta_2(x=0) = -\frac{k}{b_1} + (t_0 - t_H + \frac{k}{b_1}) \cdot e^{-b_1 z}.$$

Как и для I-ого участка, с помощью интегрирующего множителя находим решение задачи Коши (25)

$$\theta_2 = ((t_0 - t_H + \frac{k}{b_1})e^{-b_1 H} - \frac{k}{b_1})e^{-b_2 x}. \quad (26)$$

С учетом (24) решение (26) принимает вид

$$t_2 = t_H + k \cdot H + ((t_0 - t_H + \frac{k}{b_1})e^{-b_1 H} - \frac{k}{b_1})e^{-b_2 x}. \quad (27)$$

Формула (27) описывает распределение температуры воздуха при его движении на II-ом участке.

На III-ем участке после замены

$$b_3 = \frac{\alpha_3 \cdot \Pi_3}{c_3 \cdot G_0}, \quad \theta_3 = t_3 - t_H - k \cdot z \quad (28)$$

задача Коши (19) принимает вид

$$\frac{d\theta_3}{dz} = -b_3 \cdot \theta_3 = -k \quad (29)$$

$$\theta_3(z=H) = ((t_0 - t_H + \frac{k}{b_1})e^{-b_1 H} - \frac{k}{b_1})e^{-b_2 L}.$$

С помощью интегрирующего множителя находим решение задачи Коши (29)

$$\theta_3 = \frac{k}{b_3} + (-\frac{k}{b_3} + ((t_0 - t_H + \frac{k}{b_1})e^{-b_1 H} - \frac{k}{b_1})e^{-b_2 L})e^{-b_3(H-z)}. \quad (30)$$

С учетом замены (28) решение (30) принимает вид

$$t_3 = t_H + \frac{k}{b_3} + k \cdot z + (-\frac{k}{b_3} + ((t_0 - t_H + \frac{k}{b_1})e^{-b_1 H} - \frac{k}{b_1})e^{-b_2 L})e^{-b_3(z-H)}. \quad (31)$$

Формула (31) описывает распределение температуры воздуха при его движении на III-ем участке. Таким образом, формулы (23), (27) и (31) позволяют рассчитать стационарное распределение температуры воздуха в горной выработке, показанной на рис. 1.

Для удобства расчетов полученные формулы представлены ниже

$$t_1(z) = t_H - \frac{k}{b_1} + k \cdot z + (t_0 - t_H + \frac{k}{b_1})e^{-b_1 z} \quad (0 \leq z \leq H),$$

$$t_2(x) = t_H + k \cdot H + ((t_0 - t_H + \frac{k}{b_1})e^{-b_1 H} - \frac{k}{b_1})e^{-b_2 x}, \quad (0 \leq x \leq L), \quad (32)$$

$$t_3(z) = t_H + \frac{k}{b_3} + k \cdot z + (-\frac{k}{b_3} + ((t_0 - t_H + \frac{k}{b_1})e^{-b_1 H} - \frac{k}{b_1})e^{-b_2 L})e^{-b_3(z-H)}, \quad (0 \leq z \leq H)$$

Ниже приведены исходные данные для расчета температуры воздуха,

проходящего по горной выработке, изображенной на рис. 1:  $t_n = 11 \text{ }^\circ\text{C}$ ;  $k = 0,02 \text{ }^\circ\text{C/м}$ ;  $R_1 = 1,5 \text{ м}$ ;  $c_1 = 1 \text{ кДж/кг}^\circ\text{C}$ ;  $H = 1000 \text{ м}$ ;  $c_2 = 1 \text{ кДж/кг}^\circ\text{C}$ ;  $h_2 = 3 \text{ м}$ ;  $l_2 = 5 \text{ м}$ ;  $L = 1000 \text{ м}$ ;  $R_3 = 1,5 \text{ м}$ ;  $c_3 = 1 \text{ кДж/кг}^\circ\text{C}$ .

На рис. 3 представлен график зависимости температуры стенки ствола шахты от его глубины.

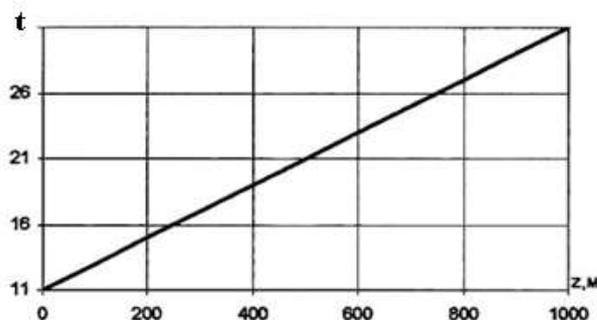


Рис. 3. Изменение температуры стенки ствола шахты в зависимости от глубины.

Анализ представленного графика показывает, что эта температура изменяется линейно от температуры нейтральной зоны ( $11^\circ\text{C}$ ) до  $31^\circ\text{C}$  на глубине 1000м.

Для оценки коэффициента теплоотдачи, входящего в формулы, воспользуемся методикой [3]. Принимая во внимание, что скорость движения воздуха составляет величину порядка 8 м/с, радиус ствола 1,5м и усредненная кинематическая вязкость воздуха  $20 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ , находим число Рейнольдса

$$Re = \frac{u \cdot d}{\nu} = \frac{8 \cdot 3}{20 \cdot 10^{-6}} = 1,2 \cdot 10^6$$

Такая величина числа Рейнольдса соответствует развитому турбулентному течению. Поэтому, далее находим число Нуссельта по формуле

$$Nu = 0,018 \cdot Re^{0,8} = 0,018 \cdot (1,2 \cdot 10^6)^{0,8} = 1314,1.$$

И, наконец, учитывая, что средний коэффициент теплопроводности воздуха при рассматриваемых температурах составляет величину порядка  $0,028 \text{ Вт/(м}^\circ\text{C)}$ , находим коэффициент теплоотдачи

$$\alpha = Nu \cdot \frac{\lambda}{d} = 1314,1 \cdot \frac{0,028}{3} = 12,3 \text{ Вт/м}^2 \cdot ^\circ\text{C}.$$

На рис. 4, 5 и 6 представлены результаты расчетов согласно исходным данным.

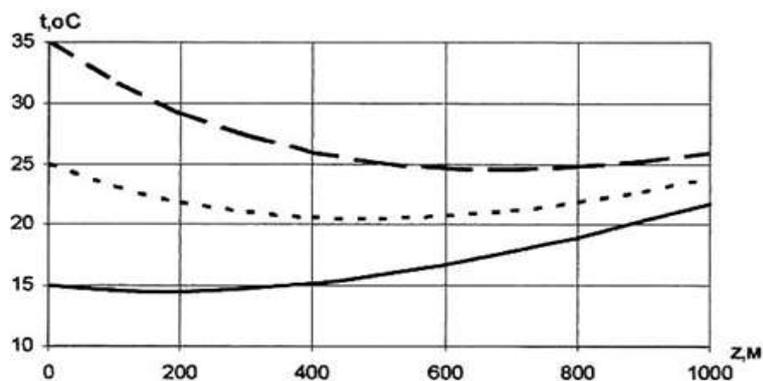
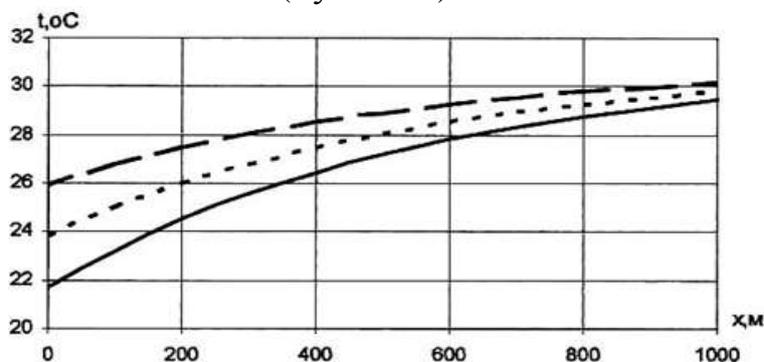


Рис. 4. Зависимость температуры воздуха от глубины для различных входных температур при движении воздуха вниз по стволу шахты (I участок).



————— 15 °С; - - - - - 25 °С; - - - - - 35 °С

Рис.5. Зависимость температуры воздуха от длины горизонтальной выработки для различных входных температур воздуха на глубине (II участок).

Анализ графиков Рис.4 показывает, что при движении воздуха по стволу шахты сверху вниз его температура сначала падает, а затем начинает возрастать. Если входная температура высокая, в нашем случае 35°С, то наблюдается снижение температуры до 24°С на глубине порядка 700м, с последующим ее возрастанием до 26°С на глубине 1000м.

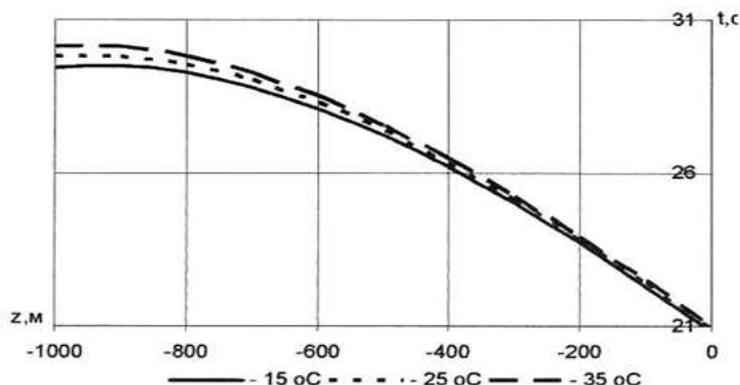


Рис. 6. Зависимость температуры воздуха от глубины для различных входных температур при движении воздуха вверх по стволу шахты (III участок).

При последующем движении воздуха по горизонтальной выработке на глубине 1000м наблюдается возрастание его температуры, вплоть до 28-30°C на расстоянии 1000м, что показано на графиках Рис.5.

Анализ графиков Рис.6 показывает, что при движении воздуха снизу вверх по стволу шахты его температура уменьшается практически до 21°C на поверхности шахты, независимо от величины входной температуры.

На Рис.7 представлены объединенные графики изменения температуры воздуха в зависимости от длины выработок независимо от их расположения для разных входных температур.

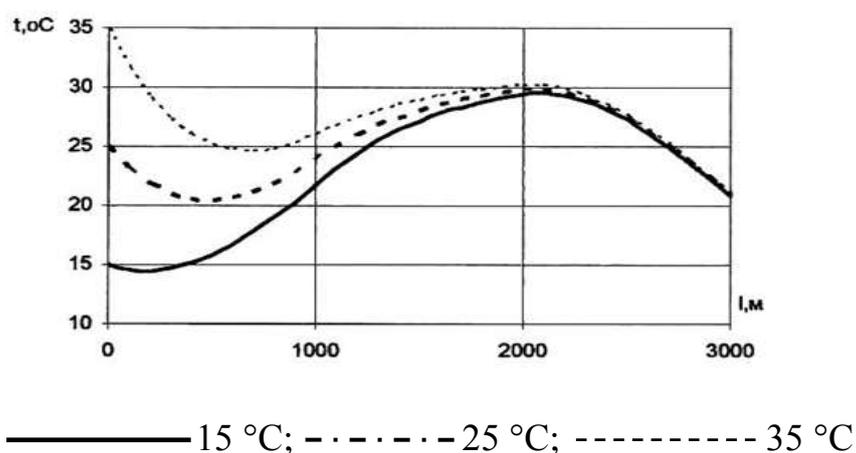


Рис. 7. Зависимость температуры воздуха от длины выработок для различных входных температур.

На рис. 7 промежуток на горизонтальной оси от 0 до 1000м соответствует движению воздуха вниз по стволу шахты, от 1000 м до 2000 м - движению воздуха по горизонтальной выработке, от 2000 м до 3000 м - движению воздуха вверх по стволу шахты.

**Вывод и направление дальнейших исследований.** Проведено математическое моделирование теплообменного процесса в горных выработках, охлаждаемых рудничным воздухом, позволяющее организовать вычислительный эксперимент, в ходе которого можно исследовать особенности протекания рассматриваемого процесса. Направление дальнейших исследований связано с решением проблемы создания условий работы в выработках, соответствующих санитарно-гигиеническим нормам.

#### Литература.

1. Щербань А.Н., Кремнев О.А. Научные основы расчета и регулирования теплового режима глубоких шахт. Том I. – Изд-во АН УССР, 1960. – 345с.
2. Самарский А.А., Попов Ю.П. Вычислительный эксперимент. – М.: Наука, 1988. – 279с.

3. Михеев М.А., Михеева И.М. Основы теплопередачи. – М.: Энергия, 1977. – 343с.

4. Повх И.Л. Техническая гидромеханика. – Л.: Машиностроение, 1969. – 524с.

5. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1982. – 391с.

#### **Аннотация.**

Проведено математическое моделирование теплообменных процессов при движении воздуха в горных выработках рудных шахт. С целью научного обоснования теплообменных процессов в горных выработках проведен вычислительный эксперимент. В ходе построения математических моделей и вычислительного эксперимента исследованы особенности протекания рассматриваемого процесса в вертикальных воздухоподающих и воздуховыдающих стволах, а также и в горизонтальных выработках.

Результаты исследований показали, что на глубинах 1200-1500 м температура рудничного воздуха достигает 28-30 °С.

Was held the mathematical modeling of heat exchange processes at the movement of air in mine workings of ore mines. With a view to scientific justification heat transfer processes in mine workings, was conducted a computational experiment. During the construction of mathematical models and computational experiment were studied the features of flow the process in question in the vertical shafts for air supply and issue, as well as in horizontal mine workings.

The results showed that at a depth of 1200-1500 m the temperature of mine air reaches to 28-30 °С.

#### **Ключевые слова.**

горная выработка, моделирование, теплообмен, воздух, температура  
mine working, modeling, heat exchange, air, temperature