

**О.И. САВЕНКОВ**, аспирант каф. механики и конструирования машин  
НУК им. адм. Макарова, Николаев

## КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЗУБЧАТОЙ МУФТЕ С ПРОДОЛЬНО МОДИФИЦИРОВАННЫМИ ЗУБЬЯМИ\*

В работе впервые выполнено решение плоской задачи применительно к модели контакта цилиндра со скошенной плоскостью, имитирующей условия взаимодействия продольно модифицированных зубьев муфты, работающей при перекосах осей. Получены выражения максимальных контактных напряжений и ширины площадки контакта.

В роботі вперше виконано рішення плоскої задачі стосовно моделі контакту циліндра зі скошеною площиною, що імітує умови взаємодії поздовжньо модифікованих зубів муфти, яка працює при перекосах осей. Отримані вирази максимальних контактних напружень і ширини ділянки контакту.

For the first time the solution of the plane problem as applied to the model of contact of the cylinder with broken plane imitating the conditions of interaction of longitudinally modified coupling teeth working under misalignment of axes has been carried out. The expressions of maximum contact stresses and contact area width have been obtained.

**Постановка проблемы.** Разработка и создание тяжелонагруженных зубчатых муфт, предназначенных для эксплуатации в условиях перекоса осей соединяемых валов силовых агрегатов, является актуальной проблемой. Данная проблема представляет неразрывную составную часть существующих в настоящее время научных программ и заданий применительно ко всем отраслям машиностроения, выпускающим зубчатые муфты. Для успешного решения указанной проблемы нужны новые технические решения и новые методы расчетов.

**Анализ последних исследований.** Наиболее полно основы новых технических решений даны в [1-8], а в [9, 10] изложены основы исследований контактной прочности зубьев для любых случаев их взаимодействия в условиях перекоса осей.

**Цель работы.** Работа предусматривает решение новой контактной задачи применительно к продольно модифицированным наружным и внутренним зубьям зубчатых муфт. При этом в качестве расчётной выступает модель контакта цилиндра со скошенной плоскостью.

**Изложение основного материала.** В качестве объекта исследования используется зубчатая муфта [1], которая за счет продольной модификации наружных и внутренних зубьев характеризуется не только нахождением всех сопряженных пар зубьев в зацеплении при перекосах осей соединяемых валов агрегатов, но и равномерным распределением усилий между зубьями. На основании сказанного данную зубчатую муфту следует рассматривать как муфту, нечувствительную к перекосам осей.

Для решения рассматриваемой плоской контактной задачи применительно к произвольно взятой сопряженной под нагрузкой паре зубьев воспользуемся основами новой теорией контактной прочности, разработанной профессором А.П. Поповым [9, 10]. Новая теория контактной прочности упру-

гую сжатых тел, как и любая другая теория, базируется на допущениях и упрощающих предположениях, некоторые из которых озвучим.

**Во-первых,** контактные напряжения определяются на рабочих поверхностях зубьев, а силы трения по площадке контакта не учитываются ввиду их малых величин.

**Во-вторых,** материалы контактирующих друг с другом тел принимаются изотропными с разными значениями коэффициентов Пуассона  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  и модулей упругости материалов  $E_1$ ,  $E_2$ .

**В-третьих,** сила, сжимающая зубья, создает в зоне контакта только лишь упругие деформации, подчиняющиеся закону Гука. И, наконец, площадка контакта при сжатии зубьев считается меньшей величиной по сравнению с площадью тел, в пределах которой осуществляется их взаимодействие.

Новая теория контактной прочности упруго сжатых тел предусматривает получение двух равнозначных функций контактных деформаций. **Первая функция кон-**

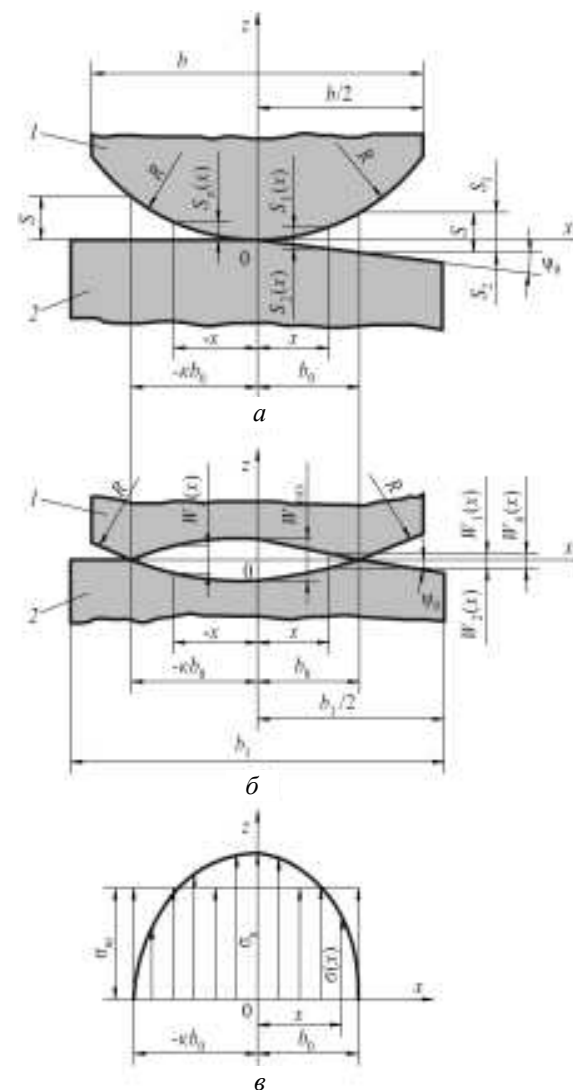


Рисунок – Расчетная модель контакта зубьев 1 и 2 до нагружения (а), после нагружения (б) и эпюра контактных напряжений (в)

\* Работа выполнена под научным руководством д.т.н., проф. А.П. Попова

тактных деформаций определяется с учетом формы зазора между телами до нагружения. Нахождение **второй функции** контактных деформаций осуществляется на основе обобщенного закона Гука и гипотезы Винклера. При этом гипотеза Винклера, как известно, характеризует плоское напряженно деформированное состояние. Однако в [9, 10] указанная гипотеза впервые разработана применительно к объемному напряженно-деформированному состоянию, что делает возможным решения пространственных контактных задач.

А теперь перейдем к непосредственному решению контактной задачи, обратившись к рисунку. Здесь  $a$  – расчетная модель контакта наружного зуба 1 с внутренним зубом 2 до нагружения,  $b$  – после нагружения. В данном случае образующие боковых поверхностей зуба 1 выполнены криволинейными с радиусом кривизны  $R$ , а образующие боковых поверхностей зуба 2 являются прямолинейно-скошенными на угол  $\psi_0$ .

Из рисунка,  $a$  следует, что максимальные величины боковых зазоров между зубьями при  $-x = -\kappa_0 b_0$  (слева от оси  $z$ ) и при  $x = b_0$  (справа от оси  $z$ ) равны:

$$S(\kappa, b_0) = \frac{\kappa^2 b_0^2}{2R}; \quad S(\psi_0, b_0) = \frac{b_0^2}{2R} + \psi_0 b_0.$$

По аналогии с выражениями  $S(\kappa, b_0)$  и  $S(\psi_0, b_0)$  представим зависимости зазоров в точках  $-x$  и  $x$  (рисунок,  $a$ ) в следующем виде:

$$S(\kappa, x) = \frac{\kappa^2 x^2}{2R}; \quad S(\psi_0, x) = \frac{x^2}{2R} + \psi_0 x.$$

В соответствии с выражениями  $S(\kappa, b_0)$  и  $S(\kappa, x)$ , а также  $S(\psi_0, b_0)$  и  $S(\psi_0, x)$  запишем функции контактных деформаций слева и справа от оси  $z$ , а именно:

$$W_{\text{л}}(x) = S(\kappa, b_0) - S(\kappa, x) = \frac{\kappa^2 b_0^2}{2R} - \frac{\kappa^2 x^2}{2R} = \frac{\kappa^2 b_0^2}{2R} \left( 1 - \frac{x^2}{b_0^2} \right); \quad (1)$$

$$W_{\text{п}}(x) = S(\psi_0, b_0) - S(\psi_0, x) = \frac{b_0^2}{2R} + \psi_0 b_0 - \frac{x^2}{2R} + \psi_0 x = \frac{b_0^2}{2R} \left( 1 - \frac{x^2}{b_0^2} \right) + \psi_0 b_0 \left( 1 - \frac{x}{b_0} \right). \quad (2)$$

Из уравнений (1), (2) очевидно, что функция (1) и первое слагаемое функции (2) изменяются по параболическому закону, а второе слагаемое функции (2) – по линейному закону.

Однако, как следует из [9, 10], параболические функции контактных деформаций справедливы при относительно небольших значениях величин максимальных контактных напряжений  $\sigma_{\text{к}}$ . В связи со сказанным решение рассматриваемой плоской задачи осуществим, исходя из эллиптического закона распределения контактных деформаций, которые в данном случае имеют вид [9, 10]:

$$W_{\text{л}}(x) = \frac{\kappa^2 b_0^2}{2R} \sqrt{1 - \frac{x^2}{\kappa^2 b_0^2}}; \quad (3) \quad W_{\text{п}}(x) = \frac{b_0^2}{2R} \sqrt{1 - \frac{x^2}{b_0^2}} + \psi_0 (b_0 - x). \quad (4)$$

Определившись с первыми функциями (3) и (4) контактных деформаций, перейдем к отысканию вторых равнозначных им функций контактных деформаций  $W_{\text{л}}(x)$  и  $W_{\text{п}}(x)$ . С этой целью воспользуемся законом Гука и гипотезой Винклера.

При сжатии зубьев 1 и 2 при изменении контактных деформаций в направлении оси  $x$  будем исходить из подчинения сближаемых тел в пределах упругости гипотезе Винклера [9, 10], тогда:

$$W_{\text{л}}(x) = A_1(x) \omega_{\text{л}}(x) + A_2(x) \omega_{\text{п}}(x) = [A_1(x) + A_2(x)] \omega_{\text{л}}(x); \quad (5)$$

$$W_{\text{п}}(x) = A_1(x) \omega_{\text{л}}(x) + A_2(x) \omega_{\text{п}}(x) = [A_1(x) + A_2(x)] \omega_{\text{п}}(x), \quad (6)$$

где  $A_1(x)$ ,  $A_2(x)$  – коэффициент постели 1 и 2 зубьев, причём  $A_1(x) + A_2(x) = A(x)$ , мм<sup>2</sup>/Н;  $\omega_{\text{л}}(x)$ ,  $\omega_{\text{п}}(x)$  – функции нагрузки, распределенной по оси  $x$  в пределах  $\kappa b_0$  и  $b_0$ , Н/мм.

В соответствии с приведенными обозначениями функции (5) и (6) примут вид:

$$W_{\text{л}}(x) = A(x) \omega_{\text{л}}(x); \quad (7) \quad W_{\text{п}}(x) = A(x) \omega_{\text{п}}(x). \quad (8)$$

Из уравнений (7) и (8) очевидно, что коэффициент постели  $A(x)$  является переменной величиной, что не позволяет осуществить решение рассматриваемой задачи. На основании сказанного перейдем от переменной величины коэффициента постели  $A(x)$  к постоянной величине коэффициента постели  $A$ , которая не зависит от  $x$ . Для этого заменим величину площади реальной эпюры напряжений равной ей по величине площадью эпюры средних напряжений  $\sigma_m$  (рисунок,  $в$ ), определяемых по формуле

$$\sigma_m = \frac{F_n}{(1 + \kappa) b_0 h_p}, \quad (9)$$

где  $h_p = 2c^* m = 1,6m$  – рабочая высота зуба;  $c^* = 0,8$  – коэффициент высоты головки зуба;  $m$  – модуль зацепления.

В качестве зависимости, устанавливающей взаимосвязь между упругими перемещениями зубьев и возникающими в них напряжениями, примем выражение [9, 10]

$$W = C_m \sigma, \quad (10)$$

где  $C_m$  – размерный параметр, мм/МПа.

Далее, исходя из пропорционального соотношения между напряжениями  $\sigma$  и упругими деформациями, представим, согласно закону Гука, выражения контактных напряжений, действующих на каждый из зубьев, полагая  $\nu_1 \neq \nu_2$  и  $E_1 \neq E_2$  в таком виде:

$$\sigma_1 = \frac{\varepsilon E_1}{1 - \nu_1^2} = \frac{E_1}{1 - \nu_1^2} \cdot \frac{\Delta L}{L}; \quad \sigma_2 = \frac{\varepsilon E_2}{1 - \nu_2^2} = \frac{E_2}{1 - \nu_2^2} \cdot \frac{\Delta L}{L},$$

где  $\varepsilon = \Delta L / L$  – относительная деформация;  $\Delta L$  – абсолютная величина деформации;  $L$  – некоторый линейный размер, принимаемый равным ширине площадки контакта  $(1 + \kappa) b_0$  [9, 10].

Зависимость (10) на основании двух последних выражений, исходя из  $\sigma=\sigma_1$  и  $\sigma=\sigma_2$ , представим в виде уравнений применительно к зубьям 1 и 2 (рисунок, а), полагая  $L=(1+\kappa)b_0$ :

$$\left. \begin{aligned} W &= 2C_{m1}\sigma_1 = \frac{E_1\Delta L}{(1+\kappa)(1-\nu_1^2)b_0}; \\ W &= 2C_{m2}\sigma_2 = \frac{E_2\Delta L}{(1+\kappa)(1-\nu_2^2)b_0} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Прежде чем продолжить решение задачи, рассмотрим краткие пояснения, касающиеся размерных параметров  $C_{m1}$  и  $C_{m2}$ . Размерные параметры  $C_{m1}$  и  $C_{m2}$  представляют собой величины деформации первого и второго зубьев, измеряемые в миллиметрах при действии напряжений, равных одному МПа. Напряжения на рабочих поверхностях зубьев характеризуются, как известно, действием одной и той же силы и одинаковой площадкой контакта. В связи с этим примем  $C_{m1}=C_{m2}$ , причем  $C_{m1}+C_{m2}=C_m$ . В действительности при неизменной по размерам площадке контакта размерные параметры  $C_{m1}$  и  $C_{m2}$  отличаются друг от друга вследствие разных значений  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  и  $E_1$ ,  $E_2$ .

Так как зубья в подавляющем большинстве случаев изготавливаются из сталей, у которых коэффициенты Пуассона и модули упругости материалов соответственно равны друг другу, то принятое допущение о равенстве между собой размерных параметров  $C_{m1}$  и  $C_{m2}$  можно считать оправданным.

Таким образом, исходя из равенства между упругим деформациями  $W$  и абсолютной величиной  $\Delta L$ , найдем из выражения (11) уравнения размерных параметров:

$$C_{m1} = \frac{(1+\kappa)(1-\nu_1^2)b_0}{2E_1}; \quad C_{m2} = \frac{(1+\kappa)(1-\nu_2^2)b_0}{2E_2}.$$

С учетом выражений размерных параметров  $C_{m1}$  и  $C_{m2}$  и (9), полагая  $\sigma_m=\sigma_{m1}=\sigma_{m2}$ , найдем зависимости контактной податливости сопряженной пары зубьев 1 и 2, а именно:

$$\delta_{k1} = \frac{C_{m1}\sigma_{m1}}{F_n} = \frac{1-\nu_1^2}{2E_1h_p}; \quad \delta_{k2} = \frac{C_{m2}\sigma_{m2}}{F_n} = \frac{1-\nu_2^2}{2E_2h_p}.$$

Затем, умножив сумму правых частей выражений  $\delta_{k1}$  и  $\delta_{k2}$  на ширину площадки  $(1+\kappa)b_0$ , найдём уравнение коэффициента постели

$$A = (1+\kappa)b_0(\delta_{k1} + \delta_{k2}) = \frac{(1+\kappa)\kappa_0b_0}{2h_p}, \quad (12)$$

где  $\kappa_0 = (1-\nu_1^2)/E_1 + (1-\nu_2^2)/E_2$  – параметр, характеризующий упругость контактирующих зубьев.

Тогда, в соответствии с зависимостью (12) функции (7) и (8) примут окончательный вид

$$\left. \begin{aligned} W_{\text{л}}(x) &= A \cdot \omega_{\text{л}}(x) = \frac{(1+\kappa)\kappa_0b_0}{2h_p} \omega_{\text{л}}(x); \\ W_{\text{п}}(x) &= A \cdot \omega_{\text{п}}(x) = \frac{(1+\kappa)\kappa_0b_0}{2h_p} \omega_{\text{п}}(x). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

С учетом равнозначных друг другу функций (3), (4) и (13) запишем выражение напряженно-деформированного состояния рассматриваемой сопряженной пары зубьев в виде

$$\begin{aligned} A &= \left[ \int_{-\kappa b_0}^0 W_{\text{л}}(x)dx + \int_0^{b_0} W_{\text{п}}(x)dx \right] = A(F_{n1} + F_{n2}) = AF_n = \frac{(1+\kappa)\kappa_0b_0F_n}{2h_p} = \\ &= \frac{\kappa^2b_0^2}{2R} \int_{-\kappa b_0}^0 \sqrt{1-\frac{x^2}{\kappa^2b_0^2}}dx + \frac{b_0^2}{2R} \int_0^{b_0} \sqrt{1-\frac{x^2}{b_0^2}}dx + \psi_0b_0 \int_0^{b_0} \left(1-\frac{x}{b_0}\right)dx = \frac{\pi(1+\kappa^3)b_0^3}{8R} + \frac{\psi_0b_0^2}{2}, \end{aligned}$$

исходя из которого определим квадратное уравнение

$$\frac{\pi(1+\kappa^3)b_0^2}{4R} + \psi_0b_0 - \frac{(1+\kappa)\kappa_0F_n}{h_p} = 0.$$

В результате решения последнего уравнения получим

$$b_0 = \frac{2R}{\pi(1+\kappa^3)} \left( \sqrt{\frac{\pi(1+\kappa)(1+\kappa^3)\kappa_0F_n}{Rh_p} + \psi_0^2} - \psi_0 \right). \quad (14)$$

Располагая выражением параметра  $b_0$ , перейдем к определению максимальных контактных напряжений  $\sigma_k$ . С этой целью, исходя из постоянной величины коэффициента  $A$ , описанного формулой (12), найдём выражения функций:

$$W_{\text{л}}(x) = A \cdot \omega_{\text{л}}(x) = A \frac{h_p}{h_p} \omega_{\text{л}}(x) = Ah_p \sigma_{\text{л}}(x); \quad W_{\text{п}}(x) = A \cdot \omega_{\text{п}}(x) = A \frac{h_p}{h_p} \omega_{\text{п}}(x) = Ah_p \sigma_{\text{п}}(x),$$

на основании которых получим:

$$\sigma_{\text{л}}(x) = \frac{W_{\text{л}}(x)}{Ah_p}; \quad \sigma_{\text{п}}(x) = \frac{W_{\text{п}}(x)}{Ah_p},$$

где  $\sigma_{\text{л}}(x)=\omega_{\text{л}}(x)/h_p$ ,  $\sigma_{\text{п}}(x)=\omega_{\text{п}}(x)/h_p$  – функции контактных напряжений, действующих слева и справа от вертикальной оси  $z$ ;  $W_{\text{л}}(x)$ ,  $W_{\text{п}}(x)$  – функции контактных деформаций, описанные формулами (1) и (2).

Для получения максимальных контактных напряжений  $\sigma_k$  необходимо в уравнениях (1) и (2), входящих в выражения  $\sigma_{\text{л}}(x)$  и  $\sigma_{\text{п}}(x)$ , принять  $x=0$ , в связи с чем запишем

$$\sigma_k = \sigma_{лк} = \sigma_{пк} = \frac{\kappa^2 b_0^2}{2RAh_p} = \frac{b_0^2 + 2R\psi_0 b_0}{2RAh_p}. \quad (15)$$

В соответствии с выражениями (12) и (14) уравнение (15) представим в окончательном виде

$$\sigma_k = \sigma_{лк} = \sigma_{пк} = \frac{\kappa^2 b_0^2}{2RAh_p} = \frac{2\kappa^2}{(1+\kappa)(1+\kappa^3)\kappa_0} = \left( \sqrt{\frac{\pi(1+\kappa)(1+\kappa^3)\kappa_0 F_n}{Rh_p}} + \psi_0^2 - \psi_0 \right). \quad (16)$$

Полученные уравнения (14) и (16) содержат неизвестный коэффициент  $\kappa$ . Для определения указанного коэффициента необходимо найти ещё одно дополнительное уравнение. С этой целью, исходя из равенства  $W_{\max} = W_{л\max} = W_{п\max}$ , которые при  $x=0$  определяются из уравнений (1) и (2), определим выражение

$$\frac{\kappa^2 b_0^2}{2R} = \frac{b_0^2}{2R} + \psi_0 b_0,$$

представленное в окончательном виде

$$b_0 = \frac{2R\psi_0}{\kappa^2 - 1}. \quad (17)$$

Далее полагая равными правые части уравнений (14) и (17), найдём зависимость в виде трансцендентного уравнения

$$\psi_0 = \frac{\kappa^2 - 1}{\pi(1+\kappa^3)} \left( \sqrt{\frac{\pi(1+\kappa)(1+\kappa^3)\kappa_0 F_n}{Rh_p}} + \psi_0^2 - \psi_0 \right), \quad (18)$$

решение которого в каждом конкретном случае позволяет определить искомую величину  $\kappa$ .

Для подтверждения достоверности полученных уравнений (14) и (17) перейдем от данной расчетной модели контакта к модели контакта цилиндра, описанного радиусом  $R$ , с плоскостью. Для этой модели контакта характерно  $\psi_0=0$  и  $\kappa=1$ , в связи с чем при  $\kappa_0 = (1-\nu_1^2)/E_1 + (1-\nu_2^2)/E_2$  уравнения для  $b_0$  и  $\sigma_k$  примут вид:

$$b_0 = 1,12866 \sqrt{\frac{RF_n}{h_p} \left( \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)}; \quad (19) \quad \sigma_k = 0,564 \sqrt{\frac{F_n}{Rh_p \left( \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)}}. \quad (20)$$

Если в уравнениях (19) и (20) принять коэффициенты Пуассона  $\nu_1=\nu_2=\nu=0,3$  и модули упругости  $E_1=E_2=E$ , что характерно для стальных материалов, то указанные уравнения будут выглядеть так:

$$b_0 = 1,522 \sqrt{\frac{RF_n}{Eh_p}}; \quad (21)$$

$$\sigma_k = 0,418 \sqrt{\frac{EF_n}{Rh_p}}. \quad (22)$$

Таким образом, уравнения (19)-(22) совпадают с аналогичными уравнениями Герца, полученными им в 1881г. применительно к модели контакта цилиндра с плоскостью, а это указывает на достоверность выполненных решений исследуемой модели контакта (рисунок 1).

В заключение выполним расчет зубчатой муфты, работающей при угле перекося  $\psi=5 \cdot 10^{-3}$  рад, исходя из следующих данных:  $m=5$  мм;  $z=60$ ;  $\alpha_n=20^\circ$ ;  $h_p=1,8$  мм;  $m=9$  мм;  $b=40$  мм;  $b_1=50$  мм;  $R=3300$  мм;  $\psi_0=3,443 \cdot 10^{-3}$  рад;  $F_n=3193$  Н;  $\nu=0,3$ ;  $E=2,1 \cdot 10^5$  МПа.

Путем графического решения уравнения (18) находим величину коэффициента  $\kappa=6$ . При  $\kappa=6$  по формуле (17) рассчитываем параметр  $b_0=0,65$  мм, в связи с чем ширина площадки контакта  $(1+\kappa)b_0=4,55$  мм. Затем по формуле (16) определяем максимальные контактные напряжения  $\sigma_k=70$  МПа.

### Выводы:

1. Впервые на основе новой теории контактной прочности, разработанной профессором А.П. Поповым, выполнены решения плоской контактной задачи применительно к модели взаимодействия цилиндра со скошенной плоскостью. Найдены решения для эллиптического закона изменения контактных деформаций.

2. Получены выражения максимальных контактных напряжений и ширины площадки контакта, которые при переходе от рассматриваемой модели контакта к модели контакта цилиндра с плоскостью целиком и полностью совпадают с известными решениями, найденными для указанной сравниваемой расчётной модели, что подтверждает достоверность выполненных исследований.

**Список литературы:** 1. А.с. 1504394 СССР. Зубчатая муфта / А.П. Попов. – 4089604/31-27; заявл. 09.07.86; опубл. 30.08.89, Бюл. №32. 2. А.с. 1559245 СССР. Зубчатая муфта / А.П. Попов. – 4142341/31-27; заявл. 05.11.86; опубл. 15.03.90, Бюл. №10. 3. А.с. 1393945 СССР. Зубчатая муфта / А.П. Попов. – 4063606/31-27; заявл. 25.02.86; опубл. 07.05.88, Бюл. №17. 4. А.с. 1587243 СССР. Зубчатая муфта / А.П. Попов. – 44415191/31-27; заявл. 15.06.88; опубл. 23.08.90, Бюл. №31. 5. Пат. 25103 Украина. Зубчатая муфта / О.П. Попов, О.И. Савенков. – u200703093; заявл. 23.03.07; опубл. 25.07.07, Бюл. №11. 6. Пат. 51954 Украина. Зубчатая муфта / О.П. Попов, О.И. Савенков. – u201000897; заявл. 29.01.10; опубл. 10.08.10, Бюл. №15. 7. Попов А.П. Научные основы проектирования зубчатых муфт / А.П. Попов // Динамика и прочность судовых машин. Сб. научн. тр. – Николаев: НКИ, 1985. – С. 99-111. 8. Попов А.П. Зубчатые муфты в судовых агрегатах / А.П. Попов. – Л.: Судостроение, 1985. – 240с. 9. Попов А.П. Контактная прочность зубчатых механизмов / А.П. Попов. – Николаев: Изд-во НУК, 2008. – 580с. 10. Попов А.П. Зубчатые механизмы с точечным контактом зубьев / А.П. Попов. – Николаев: Изд-во Атолл, 2010. – 774с.

Поступила в редколлегию 10.04.12