

УДК 622.673.1

А. Г. Степанов, д-р техн. наук, проф., г. Бостон, США

E-mail: AGStepa-ov@mail.ru

## Теоретические основы динамики шахтного подъема

---

*Рассмотрена методика исследования динамики шахтного подъема с учетом распределенной массы канатов. Определены собственные числа и фундаментальные функции задачи. Предложена эквивалентная схема, в которой головные и уравновешивающие канаты разбиты на 10 частей, представляющих массы, соединенные вязкоупругими связями. Схема косвенно учитывает волновые процессы и существенно уменьшает трудоемкость при исследовании динамики шахтного подъема.*

**Ключевые слова:** подъем, динамика, канат, распределенная масса, вязкоупругие свойства, собственное число, фундаментальная функция, ортогональность.

A. G. Stepanov

## The Theoretical Basis of the Dynamics of Shaft Hoisting

---

*The article discusses the method of studying the dynamics of shaft hoisting with distributed mass of ropes. The eigenvalues and fundamental functions are determined. The equivalent model is proposed. The scheme takes into account the wave process and significantly reduces the complexity in studying the dynamics of shaft hoisting.*

**Keywords:** shaft hoisting, dynamics, rope, mass distribution, viscoelastic properties, eigenvalue, eigenfunction, orthogonality.

Большинство конкретных задач динамики шахтных подъемных установок были решены методами, в которых канаты принимались вязкоупругими невесомыми элементами, эквивалентные массы которых определялись с помощью метода Рэлея, добавляясь к сосредоточенным [1–6]. Впервые на возможность приведения распределенной массы к сосредоточенной указал Рэлей [7]. Сущность метода Рэлея заключалась в том, что характер деформации канатов, подвергающихся динамическим нагрузкам, принимался соответствующим деформации при статическом нагружении. Масса уравновешивающих канатов присоединялась полностью [2, 4] или частично к сосудам [8]. В этих случаях распространение упругой волны получалось мгновенным. Метод давал хорошие результаты при отсутствии уравновешивающих канатов и при малых длинах головных канатов. С увеличением глубины подъема возрастает влияние распределенной массы канатов на динамические процессы. Скорость распространения упругой волны в канате приблизительно равна 3700 м/с. Современные шахтные многоканатные подъемные установки могут иметь высоту подъема более 1000 м, поэтому время распространения упругих

волн существенно и пренебрегать им нельзя. Движение отдельных сечений следует рассматривать более строго, а именно, учитывать, что массовые и деформационные характеристики распределены по длине упругого элемента. Начало решения подобного класса задач положено в работах академиков А. Н. Крылова [9], С. П. Тимошенко [10]. основополагающими исследованиями динамики подъемного каната являются работы академиков А. Д. Динника [11], Г. Н. Савина [12, 13] и профессора Ф. В. Флоринского [14]. В этих и других исследованиях [4, 15, с. 256] решены задачи для свободно подвешенного каната и для случая, когда к концу каната подвешен груз. В ряде работ были сделаны попытки решения конкретных задач для более сложных схем, например, таких, как три массы последовательно соединенных четырьмя канатами (многоканатный подъем) и др. [4, с. 29]. Однако точное решение задач с учетом распределенной массы каната по его длине представляет чрезвычайно трудоемкую задачу. Следует отметить, что современные математические пакеты (например, MathCad 14) чрезвычайно упрощают решение системы дифференциальных уравнений высокого порядка. Поэтому в целях уменьшения трудоем-

кости решения задач динамики шахтного подъема с помощью волновых уравнений предлагается более простое решение, когда канат с распределенной массой по длине разбивается на равные части и заменяется  $n$  массами (здесь  $n = 10$ ), соединенными невесомыми вязкоупругими связями. При выполнении этой работы поставлена цель доказать допустимость и точность такого метода.

### Математическая модель

Рассмотрим схему, приведенную на рис. 1. Канат длиной  $l$  жестко закреплен в верхнем сечении, а в нижнем к канату подвешен груз массой  $m$ . Выделим на расстоянии  $x$  элементарный участок каната  $dx$ . Допустим, что к сечениям каната I и II приложены силы упругости  $S$  и  $S_1$ . Тогда  $\partial S = S_1 - S$ .

Разность усилий  $S$  и  $S_1$  обусловлена, с одной стороны, весом элементарного участка  $gdx$ , а с другой — волновым процессом, характеризующим распределение усилий вдоль каната, поэтому

$$S_1 = S + gdx + \frac{\partial S}{\partial x} dx, \quad (1)$$

здесь  $p$  — линейная плотность каната, кг/м.

Если обозначить через  $v$  перемещение участка  $dx$  и допустить, что верхний конец каната имеет ускорение  $j(t)$ , то величина  $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$  будет относительным ускорением участка, а абсолютное ускорение участка с координатой  $x$  равно  $j(t) + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ . Используя принцип Даламбера—Лагранжа [15, с. 26; 16], дифференциальное уравнение, характеризующее движение элементарного участка, запишем

$$pdx \left[ j(t) + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right] = S_1 - S. \quad (2)$$

Представим канат как вязкоупругий элемент, в котором полное напряжение равно сумме напряжений от упругой деформации и от сил вязкого сопротивления. В соответствии с гипотезой Фойхта [17] упругая деформация подчиняется закону Гука, а напряжение от сил вязкого сопротивления пропорционально скорости деформации, поэтому полное напряжение  $\sigma = E\varepsilon + E\mu_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$ , здесь  $E$  — модуль упругости каната, Па;  $\mu_k$  — коэффициент, характеризующий диссипативные свойства каната, с;  $\varepsilon = \frac{\partial v}{\partial x}$  — относительное удлинение каната (относи-

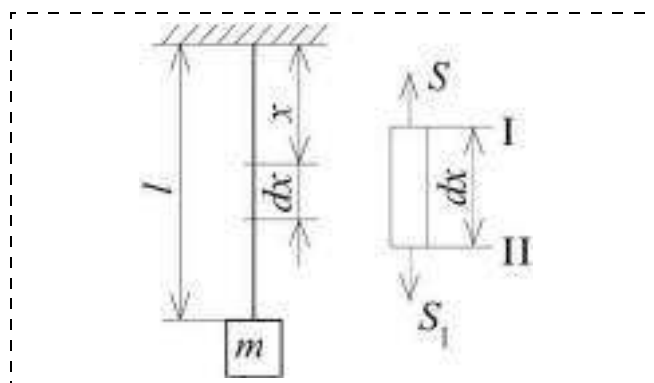


Рис. 1. Расчетная схема массы, подвешенной на канате

тельная деформация). Если умножить правую и левую части последнего равенства на площадь поперечного сечения всех проволок в канате  $F$ , получим

$$S = EF \left( 1 + \mu_k \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3)$$

Продифференцировав это уравнение, получим

$$\frac{\partial S}{\partial x} = EF \left( 1 + \mu_k \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Подставив значение  $\frac{\partial S}{\partial x}$  в (1), уравнение (2) запишем как

$$pdx \left[ j(t) + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right] = gdx + EF \left( 1 + \mu_k \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx.$$

Разделив все члены уравнения на  $pdx$ , получим

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \left( 1 + \mu_k \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = g - j(t), \quad (4)$$

где  $a^2 = \frac{EF}{p}$  — квадрат скорости распространения упругой волны,  $m^2/c^2$ .

Как было отмечено, величина  $v$  характеризует перемещение элементарного участка каната с координатой  $x$ , которое равно сумме удлинений от статических и динамических нагрузок, т. е.

$$v = v_0 + u, \quad (5)$$

где  $v_0$  — деформация каната под действием статических нагрузок, м;  $u$  — деформация каната под действием динамических нагрузок, м.

Если рассматривать свободно висящий канат, то статическое удлинение элементарного участка каната  $dx$  будет происходить под действием силы от веса каната длиной  $(l - x)$ , поэтому  $dv_0 = \frac{gp(l-x)dx}{EF}$

или  $v_0 = g \frac{p}{EF} \left( lx - \frac{x^2}{2} \right)$  при  $x = l$ ,  $v_0 = g \frac{m_{\kappa} l}{2EF}$ , где  $m_{\kappa} = pl$  — масса каната, кг.

Если на конце каната висит сосредоточенная масса  $m$ , то статическое удлинение каната

$$v_0 = g \left[ \frac{p}{EF} \left( lx - \frac{x^2}{2} \right) + \frac{m}{EF} x \right]. \quad (6)$$

Подставив (6) в (5) и дважды продифференцировав по  $t$  и  $x$ , получим

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{gp}{EF}.$$

Тогда уравнение (4) будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \left( 1 + \mu_{\kappa} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -j(t). \quad (7)$$

Если канат представить упругим элементом ( $\mu_{\kappa} = 0$ ), верхний конец которого неподвижен, то получим классическое волновое уравнение [18, 19]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (8)$$

Задачи динамики шахтного подъемного каната являются типичными для задач математической физики, решение которых зависит от краевых условий. Краевыми условиями называется совокупность начальных и граничных условий [19]. Начальные условия характеризуют состояние системы в заданный момент времени, например, при  $t = 0$ . Граничные условия указывают значение кинематических или силовых параметров в заданных сечениях каната.

Таким образом, краевые условия определяются физической постановкой задачи и могут иметь разнообразный характер.

### Решение задачи в общем виде

Рассмотрим свободные колебания каната. Уравнением, характеризующим свободные колебания каната, будет зависимость (7) при  $j(t) = 0$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \left( 1 + \mu_{\kappa} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (9)$$

Уравнение (9) решается методом разделения переменных (метод Фурье) [19]. Существо метода состоит в представлении искомого решения в виде ряда Фурье по некоторой ортогональной системе функций, связанных с рассматриваемой задачей.

Будем искать (не равное тождественно нулю) частное решение уравнения (9) в виде произведения двух функций  $X(x)$  и  $T(t)$ , из которых первая зависит только от  $x$ , а вторая — только от  $t$ . В этой интерпретации

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (10)$$

Подставляя (10) в (9), получим

$$X(x) \ddot{T}(t) = a^2 \left( 1 + \mu_{\kappa} \frac{\partial}{\partial t} \right) T(t) X''(x)$$

или

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{\ddot{T}(t)}{a^2 \left( 1 + \mu_{\kappa} \frac{\partial}{\partial t} \right) T(t)} = -k^2. \quad (11)$$

Здесь и далее производные по времени обозначены точками, а производные по координате — штрихами. В левой части этого выражения стоит функция, независимая от  $t$ , а в правой — независимая от  $x$ . Это равенство возможно только в том случае, когда левая и правая части не зависят ни от  $x$ , ни от  $t$ , т. е. равны постоянному числу, которое обозначим через  $-k^2$  ( $k^2 > 0$ ). Из этих равенств получаются два уравнения:

$$\begin{cases} X''(x) + k^2 X(x) = 0; \\ \ddot{T}(t) + k^2 a^2 \mu_{\kappa} \dot{T}(t) + k^2 a^2 T(t) = 0. \end{cases}$$

Обозначив  $\omega^2 = k^2 a^2$ ;  $2\mu = \omega^2 \mu_{\kappa}$ , получим

$$\begin{cases} X''(x) + k^2 X(x) = 0; \\ \ddot{T}(t) + 2\mu \dot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Корни характеристических уравнений (12)

$$r_x = \pm k \sqrt{-1}; \quad r_t = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega^2}.$$

Для реальных канатов  $b > \mu$  всегда, поэтому корни уравнений комплексные, и следовательно, общими решениями однородных уравнений (12) будут [22]

$$\begin{aligned} X(x) &= A \cos kx + B \sin kx; \\ T(t) &= e^{-\mu t} (C \cos \omega t + D \sin \omega t), \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\omega = \sqrt{b^2 - \mu^2}$  — частота затухающих колебаний,  $s^{-1}$ .

Коэффициент  $\mu$  характеризует затухание колебаний, в соответствии с [4, с. 123] связан с логарифмическим декрементом колебаний  $\delta$  соотношением  $\mu = \frac{\delta}{2\pi} b$ . Каждая гармоника  $j$  имеет свое значение  $k_j$ , а следовательно, и определенные коэффициенты  $\mu_j$  и  $\omega_j$ . Постоянные интегрирования  $A_j, B_j$  опреде-

ляются из граничных условий, т. е. из значений кинематических или силовых параметров в заданных сечениях каната. Постоянные интегрирования  $C_j$  и  $D_j$  определяются из начальных условий, т. е. из условий, которые характеризуют состояние системы в заданный момент времени.

Поэтому уравнение (10) следует записать

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} X_j(x) T_j(t). \quad (14)$$

С учетом (13) последнее уравнение будет

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} (A_j \cos k_j x + B_j \sin k_j x) \times e^{-\mu_j t} (C_j \cos \omega_j t + D_j \sin \omega_j t). \quad (15)$$

Ряд (15) будет решением уравнения (9) только в том случае, если коэффициенты  $C_j$  и  $D_j$  таковы, что этот ряд сходится и сходятся ряды, получающиеся после двукратного почленного дифференцирования по  $x$  и  $t$  [19].

### Собственные числа задачи

Было отмечено, что значения  $k_j$  являются корнями трансцендентного уравнения, которое получается из граничных условий. В свою очередь, граничные условия формулируются в зависимости от конструкции машины и режима ее работы. Рассмотрим схему, в которой масса  $m$  соединена двумя ветвями канатов (рис. 2). Эта схема характерна для уравновешенной подъемной установки после останова органа навивки. Граничные условия:

1. Сила упругости в нижнем сечении уравновешивающего каната равна нулю, т. е. при  $x = l_1 + l_3 = l$

$$S = EF \left( 1 + \mu_k \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u_3(l, t)}{\partial x} = 0.$$

Сила упругости  $S$  может быть равна нулю только при  $\frac{\partial u_3(l, t)}{\partial x} = 0$ . Эта величина равна  $X_3'(l)T(t) = 0$ ,

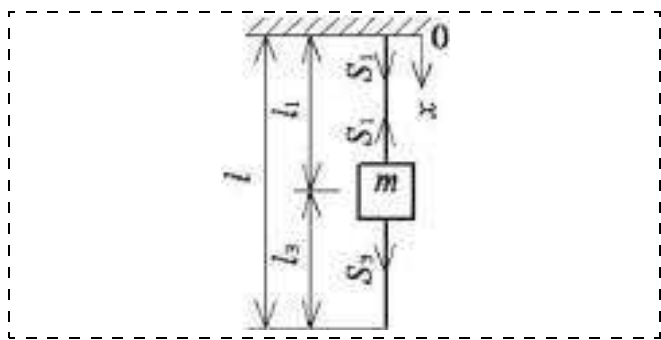


Рис. 2. Эквивалентная схема ветви канатов уравновешенного подъема

следовательно, сила упругости равна нулю при  $X_3'(l) = 0$ , поэтому, продифференцировав первое уравнение (13), получим

$$-k_j A_{3j} \sin k_j l + k_j B_{3j} \cos k_j l = 0. \quad (16)$$

2. Деформация в верхнем сечении головного каната в любой момент времени равна нулю, т. е. при  $x = l = 0$   $X_{1j}(0) = A_{1j} \cos(k_j \cdot 0) + B_{1j} \sin(k \cdot 0) = 0$ . Следовательно,  $A_{1j} = 0$ .

3. Координаты перемещения канатов, прикрепленных к массе  $m$ , равны, т. е. при  $x = l_1$ ,  $u_1 = (l_1, t) = u_3(l_1, t)$ ,  $X_1(l_1)T(t) = X_3(l_1)T(t)$ , следовательно,  $X_1(l_1) = X_3(l_1)$ . Поэтому при  $A_{1j} = 0$  получим

$$B_{1j} \sin k_j l_1 - A_{3j} \cos k_j l_1 - B_{3j} \sin k_j l_1 = 0. \quad (17)$$

4. На массу  $m$  действует динамическая сила, уравновешенная силами упругости  $S_1$  головного и  $S_3$  уравновешивающего канатов. При этом если сила упругости головного каната увеличивается, то сила упругости уравновешивающего каната уменьшается. Поэтому при  $x = l_1$

$$\begin{aligned} m \frac{\partial^2 u_1(l_1, t)}{\partial t^2} &= \\ &= EF \left( 1 + \mu_k \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u_3(l_1, t)}{\partial x} - EF \left( 1 + \mu_k \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u_1(l_1, t)}{\partial x}. \end{aligned}$$

Используя соотношение (10), из которого  $\frac{\partial^2 u_1(l_1, t)}{\partial t^2} = \ddot{T}(t)X_1(l_1)$ ,  $\frac{\partial u_1(l_1, t)}{\partial x} = X_1'(l_1)T(t)$ , получим

$$m \ddot{T}(t)X_1(l_1) = EF \left( 1 + \mu_k \frac{\partial}{\partial t} \right) [X_3'(l_1)T(t) - X_1'(l_1)T(t)].$$

Из уравнения (11) нетрудно заметить, что последнее уравнение можно записать

$$\frac{m}{p} (-k_j^2) = \frac{X_3'(l_1) - X_1'(l_1)}{X_1(l_1)}.$$

Подставив функции  $X_1(l_1)$ ,  $X_1'(l_1)$ ,  $X_3'(l_1)$  и учитывая, что  $A_{1j} = 0$ , получим

$$B_{1j} \left[ k_j \frac{m}{p} \sin k_j l_1 - \cos k_j l_1 \right] - A_{3j} \sin k_j l_1 + B_{3j} \cos k_j l_1 = 0. \quad (18)$$

Таким образом, получены три алгебраических уравнения (16)–(18), в которых для каждой гармоники имеется три неизвестных постоянных  $B_{1j}$ ,  $A_{3j}$ ,  $B_{3j}$  и собственное число  $k_j$ . Известно, что собственные числа определяются из характеристического уравнения, которое получается из характеристического определителя [15, с. 44]. Если раскрыть ха-

рактористический определитель, то получим его детерминант

$$\begin{vmatrix} 0 & -\sin k_j l & \cos k_j l \\ -\sin k_j l_1 & -\cos k_j l_1 & -\sin k_j l_1 \\ \left[ k_j \frac{m}{p} \sin k_j l_1 - \cos k_j l_1 \right] & -\sin k_j l_1 & \cos k_j l_1 \end{vmatrix}. \quad (19)$$

Математический пакет MathCad 14 позволяет определить значение детерминанта в символьном виде. Функция  $f(k_j)$  при нулевом значении дает величину собственного числа. Пакет MathCad 14, кроме этого, дает возможность определения детерминанта в численном виде, избавляя исследователя от громоздких формул. На рис. 3 показан

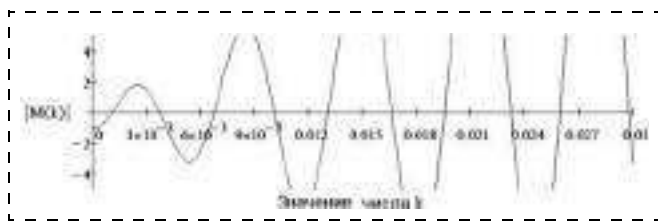


Рис. 3. Зависимость детерминанта определителя  $|M(k)|$  от числа  $k$

Собственные числа  $k_j$  и коэффициенты  $B_{1j}$ ,  $A_{3j}$  и  $B_{3j}$  ( $A_{1j} = 0$ )

Наименование	$j$	$k_j$	$B_{1j}$	$A_{3j}$	$B_{3j}$
Начало подъема: $l_1 = 945$ м; $l_3 = 15$ м	1	$8,249206 \cdot 10^{-4}$	1,002613	0,4938509	0,500338
	2	$3,562519 \cdot 10^{-3}$	1,0032371	0,2149091	0,0614032
	3	$6,775598 \cdot 10^{-3}$	1,0042914	0,1171574	0,02636955
	4	$1,0059 \cdot 10^{-2}$	1,00346908	0,0795276	0,01876819
	5	$1,013362 \cdot 10^{-2}$	0,9994112	0,0600254	0,016055673
	6	$1,016674 \cdot 10^{-2}$	0,98600243	0,04815033	0,014838
	7	$1,01999 \cdot 10^{-2}$	0,99242426	0,0401860	0,014241
	8	$1,023308 \cdot 10^{-2}$	1,01026047	0,0344777	0,0139539
	9	$1,026628 \cdot 10^{-2}$	1,00296729	0,0301748	0,013839
	10	$1,029949 \cdot 10^{-2}$	1,0109694	0,0268262	0,013844
Середина подъема: $l_1 = 485$ м; $l_3 = 475$ м	1	$1,043326 \cdot 10^{-3}$	0,99998	0,29695	0,4641076
	2	$3,741031 \cdot 10^{-3}$	0,99998	4,26866	2,060932
	3	$6,727577 \cdot 10^{-3}$	1,00040	0,11930	0,0211297
	4	$1,009 \cdot 10^{-2}$	0,99996	11,826615	3,168264
	5	$1,3085 \cdot 10^{-2}$	0,99502	0,06333665	-0,000274
	6	$1,6638 \cdot 10^{-2}$	0,999964	19,23577	5,209049
	7	$1,952 \cdot 10^{-2}$	0,9941	0,042763	-0,004728
	8	$2,3223 \cdot 10^{-2}$	0,99989	26,1679	8,16942
	9	$2,5976 \cdot 10^{-2}$	1,003321	0,322148	-0,006388
	10	$2,982 \cdot 10^{-2}$	0,9988	32,430815	11,294981
Конец подъема: $l_1 = 25$ м; $l_3 = 935$ м	1	$1,6328 \cdot 10^{-3}$	1,006242	0,00306043	0,925967
	2	$4,67856 \cdot 10^{-3}$	1,001151	0,0771474	0,343427
	3	$6,038 \cdot 10^{-3}$	0,999937	0,165421	-0,087535
	4	$8,5824 \cdot 10^{-3}$	0,999491	0,47124	-1,162518
	5	$1,1856 \cdot 10^{-2}$	0,999937	1,2253848	-3,0123386
	6	$1,5187 \cdot 10^{-2}$	0,999512	2,526372	-5,33109
	7	$1,8532 \cdot 10^{-2}$	-7,972064	4,482207	-7,97206
	8	$2,1883 \cdot 10^{-2}$	-10,77069	7,169369	-10,77069
	9	$2,5237 \cdot 10^{-2}$	-13,56606	10,64072	-13,56606
	10	$2,8592 \cdot 10^{-2}$	-16,1379	14,87406	-16,1379

график, характеризующий значение детерминанта определителя  $|M(k)|$  от величины собственного числа  $k$  для данных:  $m = 31\,500$  кг,  $p = 4 \cdot 5,38$  кг/м,  $l = 960$  м,  $l_1 = 485$  м (индекс  $j$  при  $k$  в программе должен быть опущен). Этот график можно представить в любом масштабе и получить значения чисел  $k$  практически с любой желаемой точностью. Определитель (19) характеризует систему уравнений

$$\begin{cases} -A_{3j} \sin k_j l + B_{3j} \cos k_j l = 0; \\ B_{1j} \sin k_j l_1 - A_{3j} \cos k_j l_1 - B_{3j} \sin k_j l_1 = 0; \\ B_{1j} \left[ k_j \frac{m}{p} \sin k_j l_1 - \cos k_j l_1 \right] - A_{3j} \sin k_j l_1 + B_{3j} \cos k_j l_1 = 0. \end{cases}$$

Неизвестные коэффициенты  $B_{1j}$ ,  $A_{3j}$ ,  $B_{3j}$  определяются путем использования в пакете MathCad 14 операторов Given-Find. Подставив эти величины и значение  $\lambda_j$  в первое уравнение системы (13), получим фундаментальные функции для ветвей канатов уравновешенного подъема. Значения этих величин приведены в таблице.

### Ортогональность фундаментальных функций

Для определения постоянных интегрирования  $C_j$  и  $D_j$  уравнения (15) воспользуемся ортогональностью фундаментальных функций.

Известно [19, 20], что для системы функций, ортогональных на отрезке  $[0, l]$ , выполняются условия

$$n \neq j; \int_0^l X_j(x) X_n(x) dx = 0, \quad n = j; \int_0^l X_j^2(x) dx \neq 0,$$

где  $n$  и  $j$  — соответствующие номера гармоник.

Величину  $\int_0^l [X_j(x)]^2 dx = \|X_j\|^2$  принято называть квадратом нормы функции  $X_j(x)$  [19, 21].

Канату длиной  $l_1$  предпишем индекс 1, а канату длиной  $l_3$  — индекс 3. Перепишем выражение (11) для гармоник  $j$  и  $n$ .

$$X_{1j}''(x) = -k_j^2 X_{1j}(x); \quad X_{1n}''(x) = -k_n^2 X_{1n}(x);$$

$$X_{3j}''(x) = -k_j^2 X_{3j}(x); \quad X_{3n}''(x) = -k_n^2 X_{3n}(x).$$

Умножим первое и третье из этих соотношений соответственно на  $X_{1n}(x)$  и  $X_{3n}(x)$ , а второе и четвертое — на  $X_{1j}(x)$  и  $X_{3j}(x)$  и проинтегрируем в пределах  $[c - d]$ , получим для каната длиной  $l_1$

$$\begin{cases} \int_c^d X_{1j}''(x) X_{1n}(x) dx = -k_j^2 \int_c^d X_{1j}(x) X_{1n}(x) dx, \\ \int_c^d X_{1n}''(x) X_{1j}(x) dx = -k_n^2 \int_c^d X_{1n}(x) X_{1j}(x) dx. \end{cases}$$

Разность этих выражений равна

$$\int_c^d X_{1j}''(x)X_{1n}(x)dx - \int_c^d X_{1n}''(x)X_{1j}(x)dx = \\ = (k_n^2 - k_j^2) \int_c^d X_{1j}(x)X_{1n}(x)dx.$$

Интегралы, стоящие в левой части выражения, интегрируем по частям. Тогда получим [22, с. 483]:

$$\left\{ \begin{aligned} \int_c^d X_{1j}''(x)X_{1n}(x)dx &= X_{1j}'(x)X_{1n}(x)|_c^d - \int_c^d X_{1j}'(x)X_{1n}'(x)dx, \\ \int_c^d X_{1n}''(x)X_{1j}(x)dx &= X_{1n}'(x)X_{1j}(x)|_c^d - \int_c^d X_{1n}'(x)X_{1j}'(x)dx. \end{aligned} \right.$$

С учетом этих выражений уравнение для канатов с длинами  $l_1$  и  $l_3$  запишем

$$\left\{ \begin{aligned} X_{1j}'(x)X_{1n}(x)|_c^d - X_{1n}'(x)X_{1j}(x)|_c^d &= \\ = (k_n^2 - k_j^2) \int_c^d X_{1j}(x)X_{1n}(x)dx, \\ X_{3j}'(x)X_{3n}(x)|_c^d - X_{3n}'(x)X_{3j}(x)|_c^d &= \\ = (k_n^2 - k_j^2) \int_c^d X_{3j}(x)X_{3n}(x)dx. \end{aligned} \right. \quad (20)$$

Пределы интегрирования для каната длиной  $l_1 - [0 - l_1]$ , а для каната длиной  $l_3 - [l_1 - l]$ . Граничные условия для рассматриваемой задачи:  $x = l, X_3'(l) = 0; x = 0, X_1(0) = 0; x = l_1, X_1(l_1) = X_3(l_1);$

$$x = l_1, X_1'(l_1) = X_3'(l_1) + k^2 \frac{m}{p} X_1(l_1).$$

Подставив эти значения в (20), сложив последнее, выполнив преобразования, получим

$$\left\{ \begin{aligned} j \neq n; \int_0^{l_1} X_{1j}(x)X_{1n}(x)dx + \int_{l_1}^l X_{3j}(x)X_{3n}(x)dx + \\ + \frac{m}{p} X_{1j}(l_1)X_{1n}(l_1) = 0; \\ j = n; \int_0^{l_1} X_{1j}^2(x)dx + \int_{l_1}^l X_{3j}^2(x)dx + \frac{m}{p} X_{1j}^2(l_1) \neq 0. \end{aligned} \right. \quad (21)$$

Квадрат нормы весовой и фундаментальных функций будет

$$\|X_j\|^2 = \int_0^{l_1} X_{1j}^2(x)dx + \int_{l_1}^l X_{3j}^2(x)dx + \frac{m}{p} X_{1j}^2(l_1).$$

Выражения (21) характеризуют ортогональность фундаментальных функций подъемной системы, в которой масса соединена двумя ветвями канатов.

### Свободные колебания

Процесс свободных колебаний описывается уравнением (9). Приняв в качестве решения уравнения (15), запишем для канатов, имеющих длины  $l_1$  и  $l_3$ , эти функции и их производные:

$$\left\{ \begin{aligned} u_1(x, t) &= \sum_{j=1}^{\infty} X_{1j}(x)T_j(t); u_3(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} X_{3j}(x)T_j(t); \\ \frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} &= \sum_{j=1}^{\infty} X_{1j}(x)\dot{T}_j(t); \frac{\partial u_3(x, t)}{\partial t} = \sum_{j=1}^{\infty} X_{3j}(x)\dot{T}_j(t). \end{aligned} \right. \quad (22)$$

Решения (22) должны удовлетворять начальным условиям. Для этого подбираются постоянные  $C_j$  и  $D_j$ . Предположим, что к нижнему сечению уравновешивающего каната (см. рис. 2) приложена сила  $S$ , а затем, при начальной скорости  $v_0$ , эта сила убирается. Начинаются свободные колебания.

Под действием силы  $S$  канат длиной  $l$  удлинится на величину  $u(l, 0) = \frac{Sl}{EF}$ . Так как деформация  $u(l, 0)$  распределится равномерно по всей длине каната, то, очевидно, можно записать  $f_1(x) = f_3(x) = \frac{S}{EF}x$ ,

$\varphi_1(x) = \varphi_3(x) = \frac{v_0}{l}x$ . Здесь  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  — функции распределения деформации и скорости вдоль канатов.

Подставив значения этих функций при  $t = 0$ , получим

$$f_1(x) = u_1(x, 0) = \sum_{j=1}^{\infty} C_{1j}X_{1j}(x),$$

$$f_3(x) = u_3(x, 0) = \sum_{j=1}^{\infty} C_{1j}X_{3j}(x),$$

$$\varphi_1(x) = \frac{\partial u_1(x, 0)}{\partial t} = \sum (D_{1j}\omega_{1j} - C_{1j}\mu_{1j})X_{1j}(x),$$

$$\varphi_3(x) = \frac{\partial u_3(x, 0)}{\partial t} = \sum_{j=1}^{\infty} (D_{1j}\omega_{3j} - C_{1j}\mu_{3j})X_{3j}(x).$$

Умножим обе части равенств на  $X_{1n}(x)$  и  $X_{3n}(x)$ , проинтегрируем в заданных пределах, сложим функции  $f_1(x)$  с  $f_3(x)$ , а  $\varphi_1(x)$  с  $\varphi_3(x)$ , и используя

условие ортогональности фундаментальных функций (21), определим коэффициенты  $C_j$  и  $D_j$  [4]:

$$C_j = \frac{\int_0^{l_1} f_1(x) X_{1j}(x) dx + \int_0^l f_3(x) X_{3j}(x) dx + \frac{m}{p} f_1(l_1) X_{1j}(l_1)}{\|X_j\|^2},$$

$$D_j = \frac{1}{\omega_j} \left[ C_j \mu_j + \frac{\int_0^{l_1} \varphi_1(x) X_{1j}(x) dx + \int_0^l \varphi_3(x) X_{3j}(x) dx}{\|X_j\|^2} \right]. \quad (23)$$

Коэффициенты  $C_j$  и  $D_j$ , вычисленные по формулам (23), называются коэффициентами Фурье ортогональных функций [19]. Подставив значения этих постоянных в уравнение (15), определяются процессы при свободных колебаниях.

В качестве примера рассмотрим процессы формирования деформаций в головном канате у массы  $m$  и у петли уравнивающего каната. На рис. 4 показаны эти процессы, при этом деформации приведены в относительных единицах, приняв в качестве базовых деформации при статическом усилии  $S$ , приложенном к петле уравнивающего каната при скорости  $\varphi_1(x) = \varphi_3(x) = 0$ . Процессы формирования динамических усилий приведены для трех случаев, представленных в таблице ( $a - l_1 = 945$  м;  $l_3 = 15$  м;  $b - l_1 = 485$  м;  $l_3 = 475$  м;  $в - l_1 = 25$  м;  $l_3 = 935$  м). На рисунке видно влияние массы уравнивающего каната на формирование колебательного процесса. Для первого случая, когда длина уравнивающего каната мала, его масса практически не оказывает влияния и масса  $m$  совместно с петлей каната совершают гармонические колебания. Статическая деформация у петли каната при нагрузке  $S = 4,9 \cdot 10^5$  Н равна  $f_1(l) = 1,28$  м, следовательно, абсолютная ве-

личина изменения положения петли каната достигает 2,56 м.

Учитывая, что вторая ветвь подъема может иметь колебания, совпадающие по фазе с первой ветвью, амплитуда линейных перемещений петли может достигать больших величин. Такие колебания петли каната зафиксированы при эксплуатации многоканатного подъема, однако теоретически определены впервые. Для случая  $b$ , когда длины головного и уравнивающего канатов примерно равны, распределенная масса уравнивающего каната начинает проявлять влияние. Для третьего случая масса уравнивающего каната соизмерима с массой  $m$  и она существенно искажает гармонический характер колебания груза. В этом процессе учитывается скорость распространения упругой волны и отметка 0,256 с показывает время, за которое она достигнет массы  $m$ .

Рассмотренный выше пример представляет только частный случай, а именно, положение элементов уравнивающего подъема при стоянке машины и разных положениях сосуда. Реальные схемы шахтного подъема более разнообразны. Например, многоканатная подъемная установка во время рабочего режима дополнительно имеет еще одну или две сосредоточенные массы и еще одну ветвь канатов, аналогичную в исследуемом примере. Эта же схема изменит свою структуру в случае появления скольжения канатов по футеровке барабана трения. Во всех этих случаях необходимо снова определять собственные числа системы, фундаментальные функции и все последующие коэффициенты. При определении вынужденных колебаний возмущающие воздействия могут быть нелинейными, что вызовет дополнительные сложности исследования динамических процессов шахтного подъема. В заключение этого раздела следует отметить, что исследование динамических процессов в шахтном подъеме с учетом распределенной массы канатов (волновых процессов) представляет значи-

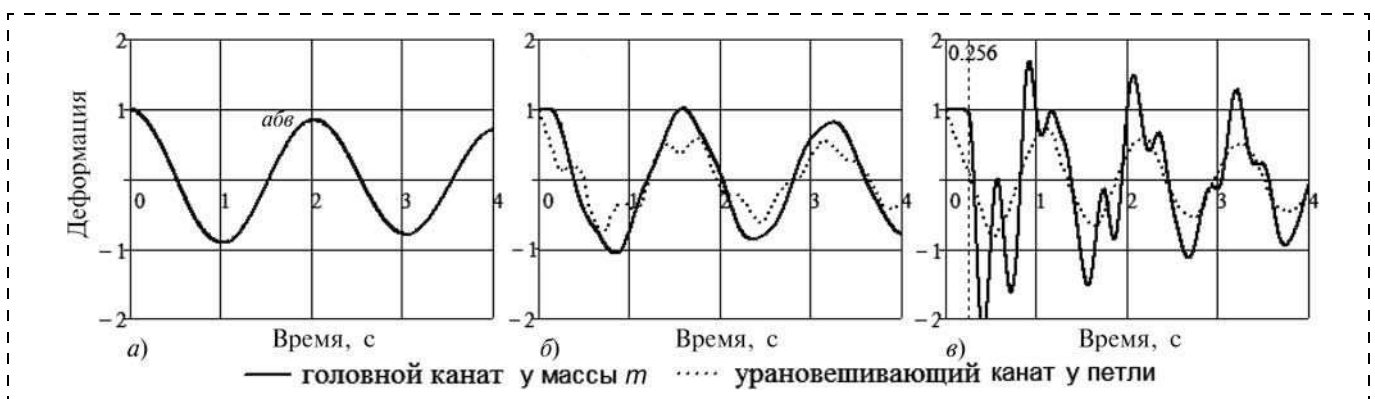


Рис. 4. Деформации канатов

тельную трудоемкость, поэтому автор предлагает схему подъема с распределенной массой канатов заменить эквивалентной многомассовой системой.

### Эквивалентная многомассовая система

Современные математические пакеты (например, MathCad 14, MATLAB) чрезвычайно упрощают решение системы дифференциальных уравнений высокого порядка. Поэтому в целях уменьшения трудоемкости при условии получения точного решения задач динамики шахтного подъема предлагается канат с распределенной массой по длине разбить на равные части и заменить  $n$  массами, соединенными невесомыми вязкоупругими связями. Тогда схему, приведенную на рис. 2, можно представить рис. 5. Массы канатов  $m_1, m_2, \dots,$

$m_{10} = \frac{\rho l_1}{n}$ , а массы  $m_{11}, m_{12}, \dots, m_{20} = \frac{\rho l_3}{n}$ . Каждая масса соединена невесомым вязкоупругим элемен-

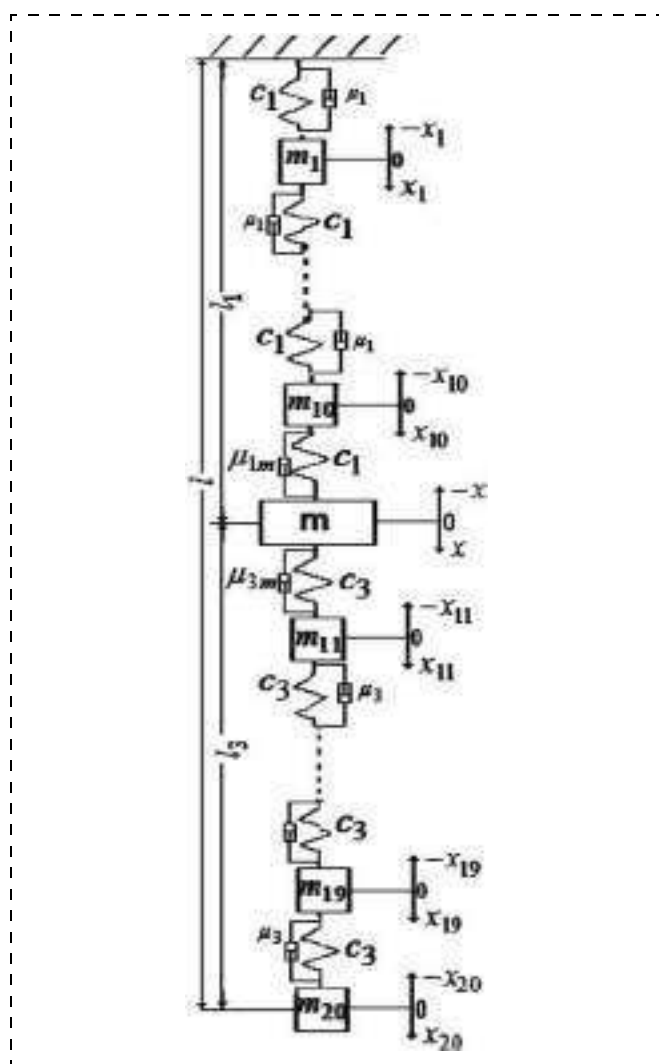


Рис. 5. Эквивалентная схема ветви канатов уравновешенного подъема

том, обладающим жесткостью для головного каната

$$c_1 = \frac{EF}{l_1} (n + 1), \text{ а для уравновешивающего каната}$$

$$c_3 = \frac{EF}{l_3} n \text{ и коэффициентами, характеризующими}$$

диссипативные свойства канатов соответственно

$$\mu_1 = \frac{\delta}{\pi} \sqrt{c_1 m_1}, \mu_3 = \frac{\delta}{\pi} \sqrt{c_3 m_0}, \mu_{1m} = \frac{\delta}{\pi} \sqrt{c_1 m},$$

$$\mu_{3m} = \frac{\delta}{\pi} \sqrt{c_3 m} \text{ [4, с. 123].}$$

Используя принцип Даламбера [16] для массы  $m_1$ , можно записать

$$m_1 x_1'' = -c_1 x_1 - \mu_1 x_1' + c_1 (x_2 - x_1) + \mu_1 (x_2' - x_1').$$

Для массы  $m$ :

$$m x'' = -c_1 (x - x_{10}) - \mu_{1m} (x' - x_{10}') - c_3 (x - x_{11}) - \mu_{3m} (x' - x_{11}').$$

По аналогии, для любой массы каната  $m_n$  будет справедливо уравнение

$$m_n x_n'' = -c(x_n - x_{n-1}) - \mu(x_n' - x_{n-1}') - c(x_n - x_{n+1}) - \mu(x_n' - x_{n+1}'). \quad (24)$$

Для головного каната используются коэффициенты  $c_1, \mu_{1m}$ , и  $\mu_1$ , а для уравновешивающего —  $c_3, \mu_{3m}$  и  $\mu_3$ .

Таким образом, для исследования динамических характеристик рассматриваемой схемы необходимо решить систему из 21 дифференциальных уравнений второго порядка. Рассмотрим свободные колебания системы, параметры которой такие же, как в схеме с распределенной массой канатов, а головной и уравновешивающий канаты разбиты на 10 частей ( $n = 10$ ). Если к массе  $m_{20}$  приложить силу  $S$ , а затем ее убрать, то в системе возникнут свободные колебания.

Аналогично рассмотренному выше примеру к концу уравновешивающего каната (к массе  $m_{20}$ ) приложена сила  $S = 9,8 \cdot 10^5$  Н, под действием которой канаты получают деформацию. Деформация каждого участка головного каната равна  $\Delta_1 = \frac{S}{c_1}$ ,

а уравновешивающего —  $\Delta_3 = \frac{S}{c_3}$ . Эта величина

будет использована в качестве начальных условий для массы  $m_1$ . Для последующих масс, до массы  $m$ , начальные деформации будут  $\Delta_n = \Delta_1 n$ . Для масс  $m_{11}, m_{12}, \dots, m_{20}$  начальные деформации будут увели-



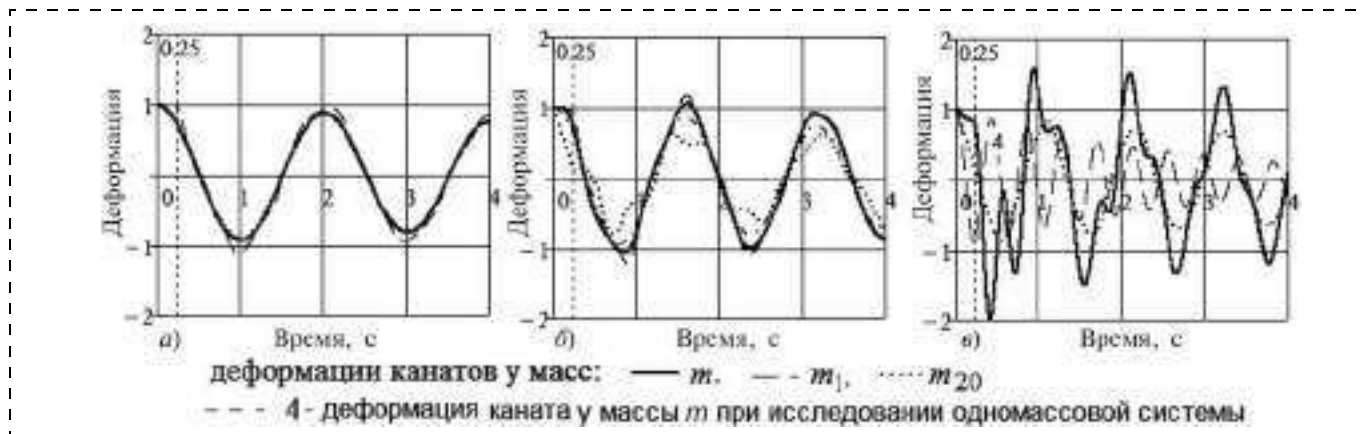


Рис. 6. Характеристики деформаций канатов при различных положениях грузевого сосуда

чиваться на величину  $\Delta_3$  и равны  $x_{011} = 10\Delta_1 + \Delta_3$ . После этого при скорости масс, равной нулю, сила  $S$  убирается и в системе начнутся свободные колебания. На рис. 6 показаны характеристики деформаций для исследуемой системы для аналогичных случаев, представленных на рис. 4. Кривая 4 характеризует деформацию каната у массы  $m$  при представлении исследуемой схемы одномассовой системой, когда одна третья часть массы головного каната и полная масса уравнивающего каната прибавлялись к массе сосуда  $m$ . Деформации канатов представлены в относительных единицах, при этом за базовую величину приняты деформации при статическом нагружении, т. е.  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ . Эти кривые позволяют судить о кинематических и силовых характеристиках движения масс. На рис. 6, а видно, что для начала подъема все массы имеют примерно одну и ту же деформационную характеристику. Изменение деформации каната у массы  $m_1$  (пунктирная линия) начинается через 0,25 с от начала процесса. Это объясняется скоростью распространения упругой волны вдоль каната. Кривая 4 показывает изменение деформации в верхней точке крепления каната при допущении, что деформация в канате распространяется мгновенно. Небольшие различия в характеристиках объясняются тем фактором, что длина уравнивающего каната мала ( $l_3 = 15$  м) и ее масса практически не оказывает влияние на динамический процесс. На рис. 6, б видно влияние массы уравнивающего каната на формирование динамических нагрузок (деформаций) в канатах при положении массы  $m$  в середине ствола. Частоты и деформация каната у массы  $m$ , полученная по разным методикам, имеют близкие характеристики. Кривая для массы  $m_{20}$  характеризует деформацию каната у петли уравнивающего каната.

При дальнейшем увеличении длины уравнивающего каната (см. рис. 6, в) влияние его массы на динамические характеристики существенно. Масса уравнивающего каната стала соизмеримой с массой груза  $m$ . Характеристики процесса у масс  $m$  и  $m_1$  одинаковые, так как длина каната грузовой ветви мала ( $l_1 = 15$  м) и эти массы практически расположены в одном месте. Колебания массы  $m_{20}$  близки к гармоническим. Колебания уравнивленного каната сильно искажают колебания массы  $m$ . Характеристика 4, полученная при решении схемы, представленной одномассовой системой, имеет существенные отличия.

Таким образом, исследования динамических процессов подъемных установок с большой массой уравнивающего каната по схеме, в которой вся масса уравнивленного каната прибавляется к массе груза, приводят к большим ошибкам. Поэтому изучение динамических процессов уравнивленных подъемных установок следует вести по методике, в которой распределенная масса канатов заменена  $n$  массами, соединенных идеальными вязкоупругими связями. Рассмотренная методика позволяет решить ряд практических задач, например, в работе [23] исследованы процессы скольжения канатов по футеровке барабана трения при предохранительном торможении и определены динамические нагрузки и кинематические характеристики в разных сечениях канатов.

В заключение сравним характеристики с результатами, полученными для системы, в которой канат представлен вязкоупругим элементом с распределенной массой по его длине. На рис. 7 приведены характеристики, соответствующие трем выбранным выше положениям сосуда в стволе. Характеристики колебательного процесса получились идентичными результатам при исследовании свободных колебаний массы, соединенной двумя ветвями с распре-



Рис. 7. Характеристики деформаций для разных систем

деленной массой канатов. Небольшие различия объясняются, возможно тем, что при решении этих задач с распределенными параметрами принималась сумма ограниченного числа гармоник (10), а при решении эквивалентной системы канаты делились на 10 частей.

Предложенная методика косвенно учитывает волновые процессы в канатах и позволяет более строго решать практические задачи динамики шахтного подъема.

#### Список литературы

1. Давыдов Б. А., Скородумов Б. А. Статика и динамика машин. М.: Машиностроение, 1967. 413 с.
2. Найдено И. С., Белый В. Д. Шахтные многоканатные подъемные установки. М.: Недра, 1979. 391 с.
3. Степанов А. Г. Динамика шахтных подъемных установок. М.: Наука, 1994. 203 с.
4. Степанов А. Г. Динамика машин. Екатеринбург: Российская академия наук, 1999. 392 с.
5. Траубе Е. С., Найдено И. С. Тормозные устройства и безопасность шахтных подъемных машин. М.: Недра, 1980. 230 с.
6. Федоров М. М. Шахтные подъемные установки. М.: Недра, 1979. 305 с.
7. Стретт Дж. В. /Лорд Рэлей/. Теория звука. М.: Гостехиздат, 1955. 318 с.
8. Алексеева А. А. и др. Теория и практика подъема. Киев: Наукова думка, 1975. 359 с.
9. Крылов А. Н. Вибрация судов // Собрание трудов. Т.Х.М. 1948. 278 с.

10. Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.

11. Динник А. Н. Приближенная формула для модуля упругости проволочных канатов / В кн.: Статьи по горному делу. М.: Углетехиздат, 1957.

12. Савин Г. Н. Современное состояние и задачи исследований по динамике шахтных подъемных канатов // Стальные канаты. 1965. № 2. С. 7—14.

13. Савин Г. Н., Горошко О. А. Динамика нити переменной длины. Киев: АН УССР, 1962. 332 с.

14. Флоринский Ф. В. Динамика шахтного подъемного каната. М.: Углетехиздат, 1955. 239 с.

15. Бабаков И. М. Теория колебаний. М.: Дрофа, 2004. 591 с.

16. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики. М.: Наука, 1968. 478 с.

17. Вибрация в технике. Справочник. Т. I. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.

18. Крауфорд Ф. Волны. Курс физики. Т. III. М.: Наука, 1974. 527 с.

19. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука, 1985. 560 с.

20. Бермант А. Ф., Араманович И. Г. Краткий курс математического анализа. М.: Физматгиз, 1969. 736 с.

21. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников. М.: Наука, 1968. 831 с.

22. Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике. М.: Астрель. ФСЕ, 2006. 783 с.

23. Степанов А. Г. Динамические процессы при скольжении канатов по футеровке барабана многоканатной подъемной установки // Горное оборудование и электромеханика. № 6. 2010. С. 24—35.