

ДИНАМИЧЕСКИЕ ЖЕСТКОСТИ КАНАТОВ ШАХТНЫХ ПОДЪЕМНЫХ УСТАНОВОК

Дворников В. И., Карцелин Е. Р., Трибухин В. А., Савенко Э. С. (Институт горной механики им. М. М. Федорова)

Во многих случаях, за исключением специальных, расчетную схематизация шахтной подъемной установки можно представить в виде трех массовой системы сосредоточенных тел, соединенных между собой массивными канатами, как это изображено на рис. 1 [1].

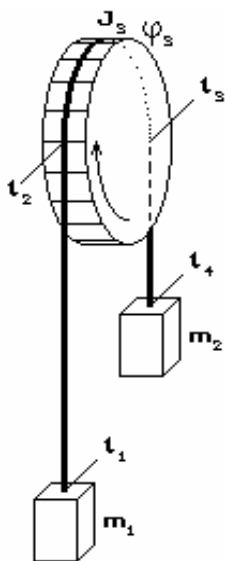


Рис. 1. Схематизация подъемной установки

Здесь m_1 , и m_2 – две сосредоточенные концевые массы сосудов, $m_3 = J_3 / R_6$ – вращающаяся масса машины (J_3 и R_6 – соответственно момент инерции и радиус барабана подъемной машины), l_1, l_2, l_3, l_4 – лонгальные координаты четырех характерных точек канатов, отсчитываемые от положения первого сосуда с массой m_1 в крайнем нижнем (начальном) положении в стволе вверх до точки l_1 и далее до точки набегания каната на барабан l_2 , затем от точки сбегания l_3 вниз до точки l_4 второго сосуда с массой m_2 . Очевидно, что в неподвижной системе лонгальные координаты l_1, l_4 являются переменными, а l_2, l_3 – постоянными. В связи с этим лонгальную *эйлерову* координату s , отмечающую положение произвольной точки каната, будем считать изменяющуюся от $s = l_1$ вверх до $s = l_2$ и далее от $s = l_3$ вниз до $s = l_4$.

В силу малости диаметра барабана по сравнению с длинами отвесов канатов допустимо принять $l_2 = l_3$, следовательно, $s \in [l_1, l_4]$. Таким образом, разности $L_1 = l_2 - l_1$ и $L_2 = l_4 - l_3$ являются длинами соответствующих ветвей головных канатов, изменяющиеся во времени (при этом $l_2 - l_1 + l_4 - l_3 = l_4 - l_1 = L$ остается величиной постоянной, равной длине одного каната в навеске L), и они однозначно определяют так называемое *квазистатическое положение* сосудов в стволе. В связи с этим представляется возможным эти разности выразить посредством безразмерной координаты x , определяемой соотношениями

$$x = \frac{h_{\Gamma} + H - (l_2 - l_1)}{H} = \frac{(l_4 - l_3) - h_{\Gamma}}{H}, \quad (1)$$

где H – высота подъема, h_{Γ} – наименьшая длина отвеса головного каната, откуда видно, что в исходном положении сосудов, когда $l_2 - l_1 = h_{\Gamma} + H$ и $l_4 - l_3 = h_{\Gamma}$ координата $x = 0$, а в конечном положении, когда $l_2 - l_1 = h_{\Gamma}$ и

$l_4 - l_3 = h_r + H$ координата $x = 1$. Таким образом, область определения безразмерной координаты x является закрытый интервал $[0, 1]$.

Координату первого сосуда x_1 будем отсчитывать от его начального положения в нижней части ствола (в загрузке) и соответственно координату второго сосуда x_2 – от его начального положения в верхней части ствола (в разгрузке). При этом считается, что $x_3 = j_3 R_\sigma$, где j_3 – угол поворота барабана машины.

В том случае, когда инерцией канатов можно пренебречь, а массы сосудов считать соединенными между собой упругими связями жесткостью C_1 и C_2 , имитирующими головные канаты, то в этом случае, очевидно

$$IX + JX + KX = P, \quad (2)$$

где для квадратных матриц обозначено

$$I = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} g_1 & -g_1 & 0 \\ -g_1 & g_1 + g_2 & -g_2 \\ 0 & -g_2 & g_2 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} C_1^{11} & -C_1^{12} & 0 \\ -C_1^{21} & C_1^{22} + C_2^{11} & -C_2^{12} \\ 0 & -C_2^{21} & C_2^{22} \end{pmatrix}.$$

Фактически в случае пренебрежения инерциальными свойствами канатов в матрице K имеют место равенства

$$C_1^{ik} = C_1 = A/L_1, \quad C_2^{ik} = C_2 = A/L_2 \quad (i, k = 1, 2), \quad (3)$$

где A – агрегатная продольная жесткость каната в обозначениях М. Ф. Глушко [2], однако здесь, как будет показано в дальнейшем, полезно сделать различия между этими величинами.

Компоненты вектор-столбцов в (2) X и P – соответственно перемещения сосредоточенных масс и действующие на них внешние силы:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} -m_1 g \\ M_g / R_\sigma \\ m_2 g \end{pmatrix},$$

где M_g – электродинамический момент привода машины или тормозной момент, когда машина останавливается при отключенном двигателе.

Матрица J в (2) введена для учета сил сопротивления в движущейся трех массовой системе, которые считаются пропорциональными первой степени относительных скоростей каждой массы в отдельности. В общем случае матрицы J и K неприводимые, однако они внешне подобны и могут быть структурно подобными в рамках известной гипотезы *внутреннего трения*, в силу чего

$$J = 2g_0 K, \quad (4)$$

где g_0 – некоторая константа, имеющая смысл обобщенного диссипативного коэффициента.

Если собственные векторы Φ_j и числа w_j системы (2) определить как

$$(K - w_i^2 I)\Phi_i = 0, \quad \det(K - w^2 I) = 0, \quad (5)$$

то, очевидно, эрмитова форма

$$\Phi_j^* I \Phi_k = d_{jk} N_k^2, \quad (6)$$

где Φ_j^* в отличие от Φ_k есть сопряженный вектор-строка, а N_k^2 – нормировочная постоянная, определяемая соотношением $N_k^2 = \Phi_k^* I \Phi_k$.

Пусть решение исходного уравнения (2) представимо в форме разложения по собственным векторам

$$X = \sum_j \Phi_j j_j(t), \quad (7)$$

где $j_j(t)$ – скалярные функции. Тогда в силу (5) и (4)

$$\sum_j I \Phi_j (j_j'' + 2g_0 w_j^2 j_j' + w_j^2 j_j) = P,$$

и благодаря (6), получим

$$j_j'' + 2g_0 w_j^2 j_j' + w_j^2 j_j = \frac{(\Phi_j, P)}{N_j^2} \quad (j = 1, 2, \dots). \quad (8)$$

Уравнение (8) имеет общее решение в форме

$$j_j(t) = e^{-g_0 w_j^2 t} \left(A_j' \cos w_j^* t + \frac{B_j'}{w_j^*} \sin w_j^* t \right) + \int_0^t \frac{(\Phi_j, P)}{w_j^* N_j^2} e^{-g_0 w_j^2 (t-t')} \sin w_j^* (t-t') dt, \quad (9)$$

где обозначено $w_j^* = w_j \sqrt{1 - g_0^2 w_j^2}$, причем для нулевого собственного числа ($j=0$) имеем

$$j_0 = A_0' + B_0' t + \int_0^t \frac{(\Phi_0, L)}{N_0^2} (t-t') dt.$$

Постоянные интегрирования A_j' и B_j' определяются из условий, что при $t=0$ векторы $X(0) = X_0$ и $\dot{X}(0) = \dot{X}_0$ заданы. Тогда в силу соотношений ортогональности собственных векторов (6) находим

$$A_j' = \frac{1}{N_j^2} \Phi_j^* I X_0, \quad B_j' = \frac{1}{N_j^2} \Phi_j^* I \dot{X}_0 + \frac{g_0 w_j^2}{2} A_j'.$$

Для рассматриваемой выше трех массовой модели подъемной установки имеем с помощью (5)

$$\Phi_j = \begin{pmatrix} C_1^{12} (C_2^{22} - w_j^2 m_2) \\ (C_1^{11} - w_j^2 m_1) (C_2^{22} - w_j^2 m_2) \\ C_2^{21} (C_1^{11} - w_j^2 m_1) \end{pmatrix} \quad (j = 0, 1, 2, \dots), \quad (10)$$

причем собственные числа w_j^2 находятся как корни уравнения

$$\begin{aligned} & (C_1^{11} - w^2 m_1) (C_1^{22} + C_2^{11} - w^2 m_3) (C_2^{22} - w^2 m_2) - \\ & - C_1^{12} C_1^{21} (C_2^{22} - w^2 m_2) - C_1^{12} C_2^{21} (C_1^{11} - w^2 m_1) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Рассматриваемую модель упруго соединенных дискретных масс теперь усложним, введя инерционные звенья, последовательно соединяющее дискретные массы m_1 , m_3 и m_2 . Для этого, воспользовавшись известными уравнениями М. Ф. Глушко [1], представим уравнения для собственных функций, описывающей продольно-крутильные колебания каната, в форме

$$\left. \begin{aligned} A_i W_{ji}'' + C_i V_{ji}'' + r_i w_j^2 W_{ji} &= 0, \\ C_i W_{ji}'' + B_i V_{ji}'' + \bar{r}_i w_j^2 V_{ji} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где A_i, B_i, C_i – агрегатные жесткости каната, W_{ij} и V_{ij} – соответственно формы продольных и крутильных колебаний каната. Здесь дифференцирование, обозначаемое штрихами, производится по s . Индекс i означает принадлежность параметра интервалу $[l_i, l_{i+1}]$.

Введя новые переменные

$$p_{ji} = A_i W_{ji} + C_i V_{ji}, \quad q_{ji} = C_i W_{ji} + B_i V_{ji},$$

нетрудно получить для них решения в виде суперпозиции некоторых бигармонических функций.

Прежде чем записать эти решения, условимся считать, что на границах интервала интегрирования $V_{ji}(l_i) = 0$. Введенное допущение позволяет считать, что перемещение каната в граничных точках есть p_{ji}/A_i . Воспользовавшись этим обстоятельством, а также условием $V_{ji}(l_i) = 0$, потребуем, чтобы

$$p_{ji}/A_i \Big|_{s=l_i} = \Phi_{ji}, \quad p_{ji}/A_i \Big|_{s=l_{i+1}} = \Phi_{j,i+1},$$

тогда функция p_{ji} будет содержать в качестве постоянных интегрирования две компоненты Φ_{ji} и $\Phi_{j,i+1}$ собственного вектора Φ_j и запишется в виде

$$p_{ji} = A_i [\Phi_{j,i+1} y_{ji}(s, l_i) - \Phi_{ji} y_{ji}(s, l_{i+1})],$$

где y_{ji} упомянутые выше бигармонические функции, определенные на интервале $[l_i, l_{i+1}]$ и удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} y_{ji}(l_i, l_i) &= 0, & y_{ji}(l_{i+1}, l_i) &= 1, \\ y_{ji}(l_i, l_{i+1}) &= -1, & y_{ji}(l_{i+1}, l_{i+1}) &= 0. \end{aligned}$$

Соответствующие вычисления приводят к следующему результату

$$y_{ji}(s, l_i) = \frac{1}{1 - k_i a_i} \left[\frac{\sin I_{1i} w_j (s - l_i)}{\sin I_{1i} w_j L_i} - k_i a_i \frac{\sin I_{2i} w_j (s - l_i)}{\sin I_{2i} w_j L_i} \right], \quad (13)$$

где введены обозначения:

$$k_i = \frac{A_i b_i - C_i}{A_i - C_i a_i}, \quad a_i = \frac{r_i C_i}{r_i B_i - I_{2i}^2 D_i^2}, \quad b_i = \frac{r_i C_i}{r_i A_i - I_{1i}^2 D_i^2}, \quad D_i^2 = A_i B_i - C_i^2,$$

причем I_{1i}^2 и I_{2i}^2 определяются как корни уравнения

$$I^4 D_i^2 - I^2 (r_i B_i + \bar{r}_i A_i) + r_i \bar{r}_i = 0.$$

Заметим, что $1/I_{1i}$ и $1/I_{2i}$ есть соответственно скорости продольных и крутильных волн деформаций каната.

Аналогично запишем

$$q_{ji} = A_i [\Phi_{ji+1} \tilde{y}_{ji}(s, l_i) - \Phi_{ji} \tilde{y}_{ji}(s, l_{i+1})],$$

где, в отличие от (13) имеем

$$\tilde{y}_{ji} = \frac{1}{1 - k_i C_i} \left[b_i \frac{\sin I_{li} w_j (s - l_i)}{\sin l_i w_j L_i} - k_i \frac{\sin I_{2i} w_j (s - l_i)}{\sin 2_i w_j L_i} \right]. \quad (14)$$

Функции $y_{ji}(s, l_{i+1})$ и $\tilde{y}_{ji}(s, l_{i+1})$ получаются из (13) и (14) путем замены l_i в аргументах $I_{li} w_j (s - l_i)$ на l_{i+1} . Заметим, что при отсутствии кручения каната ($C_i = 0$) из (13) и (14) следует

$$y_{ji}(s, l_i) = \frac{\sin I_{li} w_j (s - l_i)}{\sin I_{li} w_j L_i}, \quad \tilde{y}_{ji} = 0, \quad (15)$$

причем в этом случае достаточно ограничиваться определением только I_{li} в соответствии с соотношением $I_{li}^2 = r_i / A_i$.

Теперь сравним выражения для силы упругости, действующей на массу m_i со стороны i -той безынерционной и инерционной связи. В первом случае, очевидно,

$$Q_{ji} = -[\Phi_{ji} C_i^{11} - \Phi_{ji+1} C_i^{12}],$$

где формально $C_i^{11} = C_i^{12} = C_i$. Во втором же случае согласно с (12) и использованием имеем

$$Q_{ji} = -A_i \frac{d}{ds} [\Phi_{ji} y_{ji}(s, l_{i+1}) - \Phi_{ji+1} y_{ji}(s, l_i)]_{s=l_i},$$

Эти же две связи, но действующие на массу m_{i+1} порождают соответственно силы

$$Q'_{ji} = [\Phi_{ji} C_i^{21} - \Phi_{ji+1} C_i^{22}],$$

$$Q'_{ji} = -A_i \frac{d}{ds} [\Phi_{ji} y_{ji}(s, l_{i+1}) - \Phi_{ji+1} y_{ji}(s, l_i)]_{s=l_{i+1}}.$$

Из сравнения этих выражений следует, что формальные преобразования

$$\left. \begin{aligned} C_i^{11} &\rightarrow A_i \frac{dy_{ji}(s, l_{i+1})}{ds} \Big|_{s=l_i}, & C_i^{12} &\rightarrow A_i \frac{dy_{ji}(s, l_i)}{ds} \Big|_{s=l_i}, \\ C_i^{21} &\rightarrow A_i \frac{dy_{ji}(s, l_{i+1})}{ds} \Big|_{s=l_{i+1}}, & C_i^{22} &\rightarrow A_i \frac{dy_{ji}(s, l_i)}{ds} \Big|_{s=l_{i+1}} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

дают возможность распространить полученные ранее результаты для модели с безынерционными связями на модель, в которой может быть произвольное количество инерционных связей довольно сложной природы. Так, например, для рассмотренной ранее трех массовой модели, но уже с инерционными связями (канатами), собственные векторы вычисляются в соответствии с (10) и с учетом (16). При этом собственные числа находятся как корни уравнения (11), которое после преобразования (16) превращается в трансцендентное и этим самым по-

рождает бесконечный спектр собственных чисел w_j , среди которых существует нулевое значение. Соответствующие им собственные векторы Φ_j становятся вектор-функциями с компонентами

$$\begin{pmatrix} W_{ji} \\ V_{ji} \end{pmatrix}$$

на всех участках $s \in [l_i, l_{i+1}]$, где имеется инерционное звено, причем на границах этого интервала

$$\begin{pmatrix} W_{ji} \\ V_{ji} \end{pmatrix}_{s=l_i} = \begin{pmatrix} \Phi_{ji} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} W_{ji} \\ V_{ji} \end{pmatrix}_{s=l_{i+1}} = \begin{pmatrix} \Phi_{ji+1} \\ 0 \end{pmatrix},$$

В связи с этим обстоятельством, скалярное произведение двух векторов Φ_j и P , входящее в (8) и (9), согласно правилам образования этой конструкции [3], имеет форму

$$(\Phi_j, L) = \sum_{i=1}^n \Phi_{ji} P_i + \sum_{i=1}^m \int_{l_i}^{l_{i+1}} (W_{ji} P_{wi} + V_{ji} P_{vi}) ds,$$

где P_{wi} – распределенная осевая нагрузка на канат, P_{vi} – распределенная моментная нагрузка на канат (для рассматриваемой модели $L_{vi} = 0$), n – количество сосредоточенных масс, m – количество инерционных связей в системе.

Что же касается эрмитовой формы типа (6), то она строится следующим образом

$$(\Phi_j^*, \mathbf{K} \Phi_k) = \sum_{i=1}^n \Phi_{ji} m_i \Phi_{ki} + \sum_{i=1}^m \int_{l_i}^{l_{i+1}} (r W_{ji} W_{ki} + \bar{r} V_{ji} V_{ki}) ds. \quad (17)$$

Входящие сюда функции W_{ji} и V_{ji} определяются из (12) в форме

$$W_{ji} = \Phi_{ji+1} \mathbf{j}_{ji}(s, l_i) - \Phi_{ji} \mathbf{j}_{ji}(s, l_{i+1}),$$

$$V_{ji} = \Phi_{ji+1} \tilde{\mathbf{j}}_{ji}(s, l_i) - \Phi_{ji} \tilde{\mathbf{j}}_{ji}(s, l_{i+1}),$$

где обозначено

$$\mathbf{j}_{ji}(s, l_i) = a \frac{\sin l_{1i} w_j (s - l_i)}{\sin l_{1i} w_j (l_{i+1} - l_i)} - b \frac{\sin l_{2i} w_j (s - l_i)}{\sin l_{2i} w_j (l_{i+1} - l_i)},$$

$$\tilde{\mathbf{j}}_{ji}(s, l_i) = \tilde{a} \frac{\sin l_{1i} w_j (s - l_i)}{\sin l_{1i} w_j (l_{i+1} - l_i)} - \tilde{b} \frac{\sin l_{2i} w_j (s - l_i)}{\sin l_{2i} w_j (l_{i+1} - l_i)}.$$

причем

$$a = \frac{A}{D^2} \frac{B - Cb}{1 - ka}, \quad b = \frac{A}{D^2} \frac{Ba - C}{1 - ka} k,$$

$$\bar{a} = \frac{A}{D^2} \frac{Aa - C}{1 - ka}, \quad \bar{b} = \frac{A}{D^2} \frac{A - aC}{1 - k} k.$$

Соотношения (16) представим также в виде

$$\left. \begin{aligned} C_i^{11} = C_i^{22} &= \frac{A_i w_i}{1 - k_i a_i} [I_{1i} \operatorname{ctg} I_{1i} w_j L_i - I_{2i} k_i a_i \operatorname{ctg} I_{2i} w_j L_i], \\ C_i^{12} = C_i^{21} &= \frac{A_i w_i}{1 - k_i a_i} \left\{ \frac{I_{1i}}{\sin I_{1i} w_j L_i} - \frac{I_{2i} k_i a_i}{\sin I_{2i} w_j L_i} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Коэффициенты, определяемые преобразованиями (16) или соотношениями (18), названы нами *динамическими жесткостями канатов*.

Итак, задача о взаимодействии дискретных тел, соединенных между собой безынерционными или инерционными связями, решается единообразно, что достигнуто путем введения специальных бигармонических функций и преобразований (16), приводящих к понятию динамической жесткости канатов.

Иными словами, для решения задачи о взаимодействии тел с распределенными и сосредоточенными массами вначале рассматривается модель только с сосредоточенными массами, строятся уравнения типа (2), осуществляется преобразование (16), находятся собственные числа и векторы с помощью (11) и (10), вычисляется интеграл (17), определяются функции (9) и строится искомое решение по разложению (7).

ЛИТЕРАТУРА

1. Дворников В. И. Теория и моделирование динамического состояния шахтного подъемного комплекса. Дис... докт. техн. наук. – Донецк, 1989. – 385 с.
2. Глушко М. Ф. Стальные подъемные канаты. – Киев: Техніка, 1966. – 328 с.
3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М. – Наука, 1968. – 720 с.