Сорокин С.В., Щербаков М.А.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

В настоящее время линейные системы достаточно хорошо изучены и нашли множество применений практически во всех областях науки и техники. Тем не менее, использование методов линейной фильтрации не позволяет получить приемлемое решение в ряде практически важных приложений. Известно, например, что задача оптимальной фильтрации допускает решение в классе линейных фильтров только в том случае, когда сигнал и аддитивная помеха независимы и имеют нормальное распределение. В действительности помеха может зависеть от полезного сигнала, иметь мультипликативный характер или закон распределения, отличный от нормального, например представлять собой импульсный шум. В этих случаях оптимальным решением будет являться нелинейный фильтр.

Так как спектры сигнала и помехи могут перекрываться, применение линейных фильтров приводит к нежелательному искажению полезного сигнала. В частности, при фильтрации изображений от шума с помощью сглаживающего фильтра нижних частот этот эффект будет проявляться в виде ухудшения четкости границ деталей изображения [1,3,5]. При построении систем цифровой обработки сигналов следует также принимать во внимание нелинейный характер самих процессов передачи, кодирования и восприятия информации, например датчиков информации, канала связи, зрительной системы человека и т. п.

С целью расширения спектра задач, решаемых средствами цифровой обработки сигналов, и преодоления ограничений, присущих методам линейной фильтрации, в настоящее время активно внедряются методы нелинейной фильтрации.

Все линейные системы подчиняются принципу суперпозиции:

$$T\{\alpha x_1(n)+\beta x_2(n)\}=\alpha T\{x_1(n)\}+\beta T\{x_2(n)\}\,, \quad (1)$$

где $T\{(\bullet)\}$ - выход линейной системы, при этом $(\bullet)$ - её вход, $x_1(n)$ и $x_2(n)$ - два различных входных сигнала, α и β - произвольные константы. Принцип суперпозиции является очень мощным инструментом, который позволяет нам изучать все линейные системы универсальным образом. Нелинейные системы не удовлетворяют принципу суперпозиции. Кроме того, т.к. каждая система, которая не подчиняется принципу суперпозиции, является нелинейной, не представляется возможным разработать общую теорию для всех нелинейных систем.

Традиционным подходом к изучению нелинейных систем являются рассмотрение одного или нескольких классов таких систем и разработка теории для анализа, проектирования и реализации, а также использование каждого такого класса индивидуально. Одним из таких классов нелинейных систем являются полиномиальные системы [2,4]. Этот класс нелинейных систем определяется отношением входных - выходных сигналов в следующем виде:

$$y(n)=\sum_{i=0}^{P} f_i\{x(n),\, x(n-1),\, ...,\, x(n-N),\, y(n-1),\, ...,\, y(n-M)\}\,, \quad (2)$$

где $x(n)$ и $y(n)$ представляют входные и выходные сигналы соответственно, $f_i(...)$ -полином i -ой степени, P -максимальная степень полиномов, включенных в модель. Обычно используют полиномиальные модели, включающие квадратичные фильтры, которые описываются следующим отношением:

$$y(n)=\sum_{m_1=0}^{N_1-1} h_1(m_1)x(n-m_1)+\sum_{m_1=0}^{N_2-1}\sum_{m_2=0}^{N_2-1} h_2(m_1,m_2)x(n-m_1)x(n-m_2) \quad (3)$$

и билинейные фильтры:

$$y(n)=\sum_{i=0}^{N_1} a_i x(n-i)+\sum_{j=1}^{N_2} b_j y(n-j)+\sum_{i=0}^{N_3}\sum_{j=1}^{N_4} c_{ij}x(n-i)y(n-j) \quad (4)$$

В этих выражениям, $h_1(m_1)$, $h_2(m_1,m_2)$, a_i, b_j, c_{ij} представляют собой коэффициенты или параметры, полностью характеризующие рассматриваемую систему.

Из общего числа нелинейных фильтров выделяют следующие классы: гомоморфные фильтры, фильтры, основанные на порядковых статистиках, морфологические фильтры, нейронные сети, полиномиальные фильтры.

Гомоморфные фильтры находят применение в тех приложениях, где выходной сигнал формируется в виде произведения двух различных сигналов. Например, изображение может быть представлено в виде произведения освещенности и коэффициента отражения [5]:

$$f(x,y)=i(x,y)r(x,y), \quad (5)$$

где $i(x,y)$ - интенсивность света, падающего на объект с пространственными координатами (x,y), $r(x,y)$ -коэффициент отражения от объекта для тех же координат (x,y).

С помощью гомоморфных фильтров мы можем обрабатывать компоненты $i(x,y)$ и $r(x,y)$ отдельно, т.е. можно, например, работать с частотной составляющей коэффициента отражения, не влияя на частотную составляющую освещенности. Для этих целей используется логарифмирование:

$$z(x,y)=\ln(f(x,y))=\ln(i(x,y))+\ln(r(x,y)) \quad (6)$$

В итоге, после логарифмирования мы получаем вместо произведения компонентов их сумму, и можем использовать линейную фильтрацию для обработки изображения. На рисунке 1 схематически представлен данный метод обработки изображений, где $g(x,y)$ - изображение после обработки, (ДПФ)$^{-1}$ – обратное преобразование Фурье.

После логарифмирования каждый компонент подвергается обработке используя дискретное преобразование Фурье и передаточную функцию H(u,v).

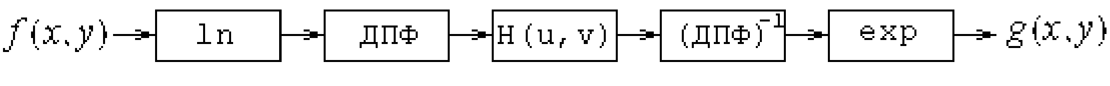

Рис.1 Метод гомоморфной фильтрации для обработки изображений

При обозначении двух операций * и +, определенных над входным и выходным сигналом соответственно, гомоморфная система удовлетворяет обобщенному принципу суперпозиции:

$$N\{x_1(n) * x_2(n)\}=N\{x_1(n)\}+N\{x_2(n)\} \quad (7)$$

При обработке изображений оператор * обозначает поэлементное умножение, а оператор + поэлементное сложение.

Отклик **фильтра, основанного на порядковых статистиках** [6], определяется предварительным ранжированием входных значений, и последующим выбором значения, находящегося на определенной позиции упорядоченной последовательности. Из всего класса данных фильтров наиболее известен медианный фильтр (median filter). Одномерный медианный фильтр (2k+1) значений определяется выражением:

$$y(n) = median\{(x(n+k)), (x(n+k-1)), \ldots, \ (x(n-k))\}, \quad (8)$$

где медианой (2k+1) значений является (k+1) среди значений, упорядоченных по величине в порядке возрастания или убывания.

Медианные фильтры отлично справляются с задачей удаления импульсных шумов, и , в отличии линейных фильтров низких частот, они практически не искажают граней сигнала. Медиана набора чисел есть такое число ξ, что половина чисел из набора меньше или равны ξ, а другая половина больше или равны ξ. Например, пусть мы имеем на входе медианного фильтра девять значений: (5, 10, 10 15, 10, 30, 15, 10, 40). Послу упорядочивания мы получаем следующее выражение:

$$y(n) = median\{5, 10, 10, 10, 10, 15, 15, 30, 40\} = 10 \ .$$

Класс фильтров, основанных на порядковых статистиках включает в себя медианный фильтр и его обобщения. Одно из таких обобщений вычисляет выходной сигнал как линейную комбинацию упорядоченных по величине элементов. Выход такого фильтра можно выразить выражением:

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} h_i x_i(n), \quad (9)$$

где $x_i(n)$ - входной элемент проранжированного множества $x(n)$, $x(n-1)$, …, $x(n-N+1)$ в порядке возрастания, h_i - соответствующий коэффициент $x_i(n)$.

Данный фильтр обладает свойствами как линейных фильтров так и медианных фильтров.

Во многих приложениях распознавания образов и робототехники необходимо разделять изображение на сегменты на основе геометрических свойств объекта, изображенного на рисунке. В этих и других приложениях может быть также необходимо получить каркасную модель этих объектов. Эти цели могут быть выполнены с помощью математических преобразований входного сигнала используя **морфологические фильтры** [5]. В дополнение к распознаванию образов и к декомпозиции изображений с использованием каркасных представлений, морфологические фильтры также используются в системах сжатия изображений.

При помощи **нейронных сетей** [7] моделируют нелинейные системы, используя взаимосвязь нелинейных элементов, так называемых искусственных нейронов. Искусственные нейроны в основном представляю собой системы с множеством входов и одним выходом:

$$y(n) = f\left\{\sum_{i=1}^{N} w_i x_i(n) \ - \ \theta\right\}, \quad (10)$$

где w_i - вес, связанный с i-ым входом $x_i(n)$, θ - постоянная времени (порог), f - нелинейная функция. В типичных приложениях, вес w_i использующийся в сети, подбирается путем обучения нейронной сети на данных, которые являются образцами того, что сеть будет получать в реальных ситуациях. Основном подход к проектированию нейронных сетей является попытка подделать деятельность нервной системы. Нервная системы состоит из огромного количества параллельных взаимосвязей нейронов, и эти взаимосвязи способны выполнять распознавание и задачи принятия решения, которые не могут быть сравнимы с любым самым мощным суперкомпьютером, который есть сегодня. Преимущество искусственных нейронных сетей – их способность моделировать большую часть нелинейных систем. Тем не менее, для того чтобы выполнить моделирование адекватно, сети может потребоваться большое количество искусственных нейронов. Другой недостаток нейронной сети – что общая сходимость обучающих алгоритмов, таких как алгоритм обратного распространения, не гарантированна.

Если система (2) устойчива при ограниченных входных и выходных значениях, она допускает сходимость расширения рядов Вольтерра в виде [2,4]

$$\begin{aligned} y(n) = h_0 &+ \sum_{m_1=0}^{N_1-1} h_1(m_1)x(n-m_1) + \sum_{m_1=0}^{N_2-1}\sum_{m_2=0}^{N_2-1} h_2(m_1, m_2)x(n-m_1)x(n-m_2) + \ldots \\ &+ \sum_{m_1=0}^{N_r-1}\sum_{m_2=0}^{N_r-1} \ldots \sum_{m_r=0}^{N_r-1} h_r(m_1, m_2, \ldots, m_r)x(n-m_1)x(n-m_2)\ldots x(n-m_r) \qquad (11) \\ &+ \ldots, \end{aligned}$$

где $h_r(m_1, m_2, \ldots, m_r)$ - ядро Вольтерра r-ой степени нелинейной системы. Из этого выражения видно, каждое слагаемое, кроме первого, выглядит как r-мерная свертка. Следовательно, мы можем мы можем рассматривать полиномиальные системы как обобщение линейных систем.

Полиномиальные системы подразделяют на рекурсивные и нерекурсивные системы. Нерекурсивные полиномиальные системы характеризуются следующим отношением:

$$\begin{aligned} y(n) = h_0 &+ \sum_{m_1=0}^{N_1-1} h_1(m_1)x(n-m_1) + \sum_{m_1=0}^{N_2-1}\sum_{m_2=0}^{N_2-1} h_2(m_1, m_2)x(n-m_1, n-m_2) + \ldots \\ &+ \sum_{m_1=0}^{N_p-1}\sum_{m_2=0}^{N_p-1} \ldots \sum_{m_p=0}^{N_p-1} h_p(m_1, m_2, \ldots, m_p)x(n-m_1, n-m_2, \ldots n-m_p). \end{aligned} \qquad (12)$$

Билинейные системы (4) представляют собой пример рекурсивной полиномиальной системы. Такие системы характеризуются (возможно нелинейной) обратной связью.

Полиномиальные системы имеют следующие преимущества.

Теорию полиномиальных систем можно рассматривать как расширение теории линейных систем. Следовательно, многие результаты по анализу и проектированию линейных систем могут быть расширены в непосредственной форме для случая нелинейных систем.

Полиномиальные модели с конечным числом коэффициентов способны к аппроксимации большого класса нелинейных систем с мягкой нелинейностью.

В реальном мире существует много процессов, которые могут быть промоделированы используя полиномиальные системы. В качестве примеров можно привести движение корабля в океанских волнах, гармонические искажения в громкоговорителях.

Полиномиальные модели также не лишены недостатков. Главные недостатки полиномиальных моделей приведены ниже.

При использовании полиномиальных моделей, необходимо большое количество коэффициентов для адекватного моделирования многих реальных нелинейных систем. Так как объем памяти и соответственно количество коэффициентов модели возрастают, сложность реализации таких систем становиться непреодолимой. Несмотря на то, что мощность современных цифровых компьютеров постоянно увеличивается, многие приложения полиномиальных систем до сих пор включают модели систем, использующие многочлены малой степени.

Свойства стабильности рекурсивных полиномиальных систем к настоящему времени еще не достаточно изучены. Для многих системных моделей, только разрабатываются достаточные условия для стабильности, которые часто очень ограничены.

Несмотря на перечисленные недостатки, полиномиальная фильтрация демонстрирует наилучшие результаты при решении многих задач обработки сигналов и изображений.

ЛИТЕРАТУРА

1. У. Прэтт, «Цифровая обработка изображений». В 2 кн. – М.: МИР, 1982.
2. М. А. Щербаков, «Цифровая полиномиальная фильтрация: теория и приложение». —— Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 1997.
3. М. А. Щербаков, «Нелинейная фильтрация сигналов и изображений: Учеб. Пособие». —— Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 1999.
4. V. J. Mathews and G. L. Sicuranza, «Polynomial Signal processing», New York: Wiley, 2000.
5. Р. С. Гонсалес, Р. Е. Вудс, «Цифровая обработка изображений», Москва: Техносфера, 2005.
6. L. Yin, R. Yang, M. Gabbouj and Y. Neuvo, «Weighted median filters: a tutorial», IEEE trans. Circuits Syst. II: Analog digital signal process., vol. 43, no. 3, March 1996.
7. S. Haykin, «Neural networks», New York: Macmillan, 1994.