38-V

PĒTERA STUČKAS LATVIJAS VALSTS UNIVERSITĀTE
ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. ПЕТРА СТУЧКИ

ZINĀTNISKIE RAKSTI
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

SĒJUMS
XXXVIII
TOM

RĪGA 1960 РИГА

К. А. ШТЕЙНС и Л. Ф. РОЗЕ

К ВОПРОСУ ОБ ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ ПОПРАВОК ЧАСОВ

§1. В связи с проведением работ по программе Международного Геофизического года 1957—1958, службам времени был дан ряд рекомендаций [1]. Была рекомендована программа для определения времени пассажным инструментом, по которой поправка часов вычисляется из наблюдений нескольких экваториальных звезд и около десяти зенитных звезд. Для вычисления были предложены:

а) метод наименьших квадратов,
б) метод Коши,
в) графический метод,
г) метод групп.

Так как графический метод определения поправки часов u и азимута инструмента k имеет субъективный характер, то мы его рассматривать не будем.

Во всех рассматриваемых методах u и k определяются из условных уравнений, которые имеют вид

$$u + K_i k = l_i, \tag{1}$$

где

$$K_i = \sin(\varphi - \delta_i)\sec\delta_i,$$
$$l_i = \alpha_i - T_i,$$

$i = 1, 2, \ldots, n$, n — количество наблюдавшихся звезд. В T_i уже внесены поправки наклонности, суточной аберрации, и др.

По методу Коши составляется осредненное уравнение

$$u + K_{ср} k = l_{ср} \tag{2}$$

где

$$K_{ср} = \frac{1}{n}\sum_{i=n}^{n} K_i,$$
$$l_{ср} = \frac{1}{n}\sum_{i=n}^{n} l_i,$$

и уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i (K_i - K_{ср}) k = \sum_{i=1}^{n} \omega_i (l_i - l_{ср}), \tag{3}$$

$\omega_i = 1$, если $K_i - K_{ср} > 0$, (4) $\omega_i = -1$, если $K_i - K_{ср} < 0$. (5). В дальнейшем везде будем считать, что значения индекса $i = 1, 2, \ldots, n_1$ соответствует зенитным звездам, а значения $i = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n$ — экваториальным.

По методу двух групп из условных уравнений (1) образуют два уравнения с двумя неизвестными, как средние арифметические из уравнений для экваториальных и зенитных звезд отдельно. Так как (5) имеет место только для $i = 1, 2, \ldots, n_1$ и (4) для $i = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n$, то метод Коши и метод двух групп для описанной выше программы звезд тождественны.

Возможен и другой вариант метода групп, по которому значение азимута k вычисляется как среднее арифметическое значений k, полученных комбинируя осредненное уравнение группы зенитных звезд с каждым уравнением экваториальных звезд. В дальнейшем под методом групп будем понимать именно этот вариант.

Относительно определения средних квадратичных ошибок, характеризующих точность наблюдений по внутреннему согласию, никаких указаний не было. Поэтому разные службы времени оценивают точность своих наблюдений по разному, и становится невозможным сравнить точность определения поправок разных служб времени. Так же невозможно сравнить между собой разные методы вычисления поправок часов, на что обратил внимание Ф. Коебке [2]. В настоящей статье даются формулы для вычисления средних квадратичных ошибок для всех выше упомянутых способов обработки наблюдений на основе общих принципов теории ошибок. Кроме того приводится несколько предложений, относящихся к выбору программы звезд для определения поправок часов.

§2. Система (1) в краковианах имеет вид

$$X \cdot \tau K = l, \tag{6}$$

где

$$X = \begin{Bmatrix} u \\ k \end{Bmatrix},$$
$$\tau K = \begin{Bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ K_1 & K_2 & \ldots & K_n \end{Bmatrix},$$
$$l = \tau\{ l_1 \;\; l_2 \;\; \ldots \;\; l_n \}.$$

Как правило, поправку часов определяют по наблюдениям 10—15 звезд. Так как каждая звезда дает одно уравнение системы (1), то для решения системы уравнений с двумя неизвестными u и k можно применять разные методы, в которых по разному образуются два уравнения с двумя неизвестными u и k. На практике применяются только такие методы, в которых новые уравнения образуются как линейные комбинации условных уравнений (1). В матричной форме такому преобразованию уравнений соответствует умножение уравнения (6) на некоторый краковиан s. Обозначим индексом «1» краковиан, соответствующий методу наименьших квадратов, индексом «2» — видоизмененному методу наименьших квадратов, описанному М. С. Зверевым [3], по которому из каждого уравнения (1) вычитается осредненное (2) и полученная система решается относительно одного неизвестного методом наименьших квадратов. Индексом «3» — методу двух групп (или Коши) и индексом «4» — методу групп.

Имеем

$$s_1 = \tau\begin{Bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ K_1 & K_2 & \ldots & K_n \end{Bmatrix},$$

$$s_2 = \tau\begin{Bmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ K_1 - K_{ср} & K_2 - K_{ср} & \ldots & K_n - K_{ср} \end{Bmatrix}, \tag{7}$$

$$s_3 = \tau\begin{Bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} \frac{1}{n_1} & \frac{1}{n_1} & \cdots & \frac{1}{n_1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{matrix}}_{n_1} & \underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{n-n_1} & \frac{1}{n-n_1} & \ldots & \frac{1}{n-n_1} \end{matrix}}_{n-n_1} \end{Bmatrix},$$

$$s_4 = \tau\begin{Bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} \frac{1}{n_1} & \frac{1}{n_1} & \cdots & \frac{1}{n_1} \\ \frac{\alpha}{n_1(n-n_1)} & \frac{\alpha}{n_1(n-n_1)} & \cdots & \frac{\alpha}{n_1(n-n_1)} \end{matrix}}_{n_1} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{-1}{(n-n_1)(K_{n_1+1}-K_{ср})} & \frac{-1}{(n-n_1)(K_{n_1+2}-K_{ср})} & \cdots & \frac{-1}{(n-n_1)(K_n-K_{ср})} \end{Bmatrix}.$$

где

$$K_a=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}K_i,\quad \alpha=\sum_{i=n_1+1}^{n}\frac{1}{K_a-K_i}.$$

Решение системы двух уравнений с двумя неизвестными

$$X=l[(Ks_i)^{-1}\tau s_i]=lA_i \tag{8}$$

является линейным относительно величин $l_1, l_2, \ldots, l_n$. Следовательно квадраты средних квадратичных ошибок ε^2_u и ε^2_k неизвестных u и k равны суммам квадратов средних квадратичных ошибок m_i, умноженным на квадраты коэффициентов соответствующих линейных форм. Для случая $m_i=m$

$$\begin{pmatrix}\varepsilon^2_{u_i} & * \\ * & \varepsilon^2_{k_i}\end{pmatrix}=A_i\tau A_i m. \tag{9}$$

Мы имеем

$$A_1=\frac{1}{n\sum_{i=1}^{n}K_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}K_i\right)^2}\left\{\begin{array}{cc}\sum_{i=1}^{n}K_i^2-K_1\sum_{i=1}^{n}K_i & -\sum_{i=1}^{n}K_i+nK_1\\ \sum_{i=1}^{n}K_i^2-K_2\sum_{i=1}^{n}K_i & -\sum_{i=1}^{n}K_i+nK_2\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \sum_{i=1}^{n}K_i^2-K_n\sum_{i=1}^{n}K_i & -\sum_{i=1}^{n}K_i+nK_n\end{array}\right\},$$

$$A_2=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}K_i^2-nK^2_{cp}}\left\{\begin{array}{cc}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}K_i^2-K_1K_{cp} & K_1-K_{cp}\\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}K_i^2-K_2K_{cp} & K_2-K_{cp}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}K_i^2-K_nK_{cp} & K_n-K_{cp}\end{array}\right\},$$

$$A_3=\frac{1}{K_a-K_b}\left\{\begin{array}{cc}\frac{1}{n_1}K_b & -\frac{1}{n_1}\\ \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots\\ \frac{1}{n_1}K_b & -\frac{1}{n_1}\\ -\frac{1}{n-n_1}K_a & \frac{1}{n-n_1}\\ \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots\\ -\frac{1}{n-n_1}K_a & \frac{1}{n-n_1}\end{array}\right\}\begin{array}{l}\}\,n_1\\ \\ \}\,n-n_1\end{array},$$

$$\tag{10}$$

$$A_4=\left\{\begin{array}{cc}\frac{1}{n_1}-\frac{K_b\alpha}{n_1(n-n_1)} & \frac{\alpha}{n_1(n-n_1)}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \frac{1}{n_1}-\frac{K_b\alpha}{n_1(n-n_1)} & \frac{\alpha}{n_1(n-n_1)}\\ \frac{K_a}{(n-n_1)(K_a-K_{n_1+1})} & \frac{-1}{(n-n_1)(K_a-K_{n_1+1})}\\ \frac{K_a}{(n-n_1)(K_a-K_{n_1+2})} & \frac{-1}{(n-n_1)(K_a-K_{n_1+2})}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \frac{K_a}{(n-n_1)(K_a-K_n)} & \frac{-1}{(n-n_1)(K_a-K_n)}\end{array}\right\}\begin{array}{l}\}\,n_1\\ \\ \\ \end{array},$$

где

$$K_b=\frac{1}{n-n_1}\sum_{i=n_1+1}^{n}K_i.$$

Средняя квадратичная ошибка m величин l_i определяется по отклонениям v_i, где

$$v_i=l_i-u-kK_i.$$

Пусть X — значения неизвестных, которые получены решением уравнений (8), $X+\Delta X$ — истинные значения. Через $E=E(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ обозначим истинные ошибки измерений $l=l(l_1, l_2, \ldots, l_n)$. Тогда

$$\{X+\Delta X\}\tau K=l+E, \tag{11}$$

$$X\tau K=l+v, \tag{12}$$

откуда

$$\Delta X\tau K=E-v. \tag{13}$$

После составления двух уравнений с двумя неизвестными получим

$$\Delta X\tau Ks_i=Es_i, \tag{14}$$

$$vs_i=0, \tag{15}$$

так как уравнения (14) решаются точно.

Из уравнений (14) следует:

$$\Delta X=Es_i(Ks_i)^{-1}. \tag{16}$$

Подставляя (16) в (13), получим:

$$Es_i(Ks_i)^{-1}\tau K=E-v. \tag{17}$$

После умножения (17) на $E+v$ и исключения с помощью (13) и (16) в левой части v, получим одно соотношение, связывающее $[EE]$ и $[vv]$, которое дает возможность определить $[EE]$. Как обычно это делается в теории ошибок [4], заменяя E^2_i на их средние значения m^2, получаем

$$[EE]-[vv]=E(2S)E-E(SS)E, \tag{18}$$

где

$$S=\tau s_i(Ks_i)^{-1}\cdot\tau K=\tau A_i\cdot\tau K.$$

Предполагая, что истинные ошибки с положительными и отрицательными знаками встречаются одинаково часто [4] получим, что правая часть уравнения (18) содержит только квадратичные члены. Окончательно имеем

$$m^2=\frac{[vv]}{n-4+[B]}, \tag{19}$$

где B — диагональные элементы краковиана (SS), а $[B]$ — сумма квадратов всех членов матрицы S.

Подставляя значения (19) в (9) получим средние квадратичные ошибки поправок часов, соответствующие разным методам вычислений:

$$\varepsilon_{u_1}=\pm\sqrt{\frac{[vv]}{n(n-2)}},$$

$$\tag{20}$$

$$\varepsilon_{u_2}=\pm\sqrt{\frac{[vv]\sum_{i=1}^{n}K_i^2}{n(n-2)\sum_{i=1}^{n}(K_i-K_{cp})}}.$$

$$\varepsilon_{u_3}=\pm\sqrt{\frac{[vv]\left(\frac{1}{n_1}K_b^2+\frac{1}{n-n_1}K_a^2\right)}{\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n}(K_a-K_i)^2+\frac{1}{n-n_1}\sum_{i=1}^{n}(K_b-K_i)^2+(n-4)(K_a-K_b)}},$$

$$\tag{20}$$

$$\varepsilon_{u_4}=\pm\sqrt{\frac{[vv]\left\{1-2\alpha\cdot\frac{K_b}{n-n_1}+n_1\cdot\frac{K_b^2}{(n-n_1)^2}\left(\beta+\frac{\alpha^2}{n_1}\right)\right\}}{n_1(n-4+C)}},$$

где

$$C=\frac{n}{n_1}-\frac{2\alpha}{n_1(n-n_1)}\sum_{i=n_1+1}^{n}(K_a-K_i)+\frac{1}{(n-n_1)^2}\sum_{i=1}^{n}(K_a-K_i)\left(\beta+\frac{\alpha^2}{n_1}\right),$$

$$\alpha=\sum_{i=n_1+1}^{n}\frac{1}{K_a-K_i},$$

$$\beta=\sum_{i=n_1+1}^{n}\frac{1}{(K_a-K_i)^2}.$$

Если считать, что выражения (20) для определения средних квадратичных ошибок ε_{u_3} и ε_{u_4} слишком сложны и неудобны для применения на практике, то с некоторым приближением при вышеописанной программе звезд формулы для ε_{u_3} и ε_{u_4} можно заменить формулами

$$\varepsilon'_{u_{3,4}}=\pm\sqrt{\frac{[vv]}{n_1(n-2)}} \tag{21}$$

или

$$\varepsilon''_{u_{3,4}}=\pm\sqrt{\frac{[vv]}{n_1(n-3)}}. \tag{22}$$

Нами выполнено сравнение разных методов обработки наблюдений. Использован материал наблюдателя Службы времени Латвийского Государственного Университета Я. Клетниеке. Были отобраны наблюдения, содержащие не меньше 10 звезд для определения одной поправки, из них не меньше трех экваториальных в зоне склонений $-5°\div+20°$. Все остальные — зенитные звезды в зоне склонений $+45°\div+65°$.

Избранный материал был обработан методом наименьших квадратов («1»), методом Коши («3») и методом групп («4»), см. таблицу 1. Вычисление видоизмененным методом наименьших квадратов не производилось, так как в выбранной программе явно не выполнено условие наилучшего выбора звезд ($K_{cp}=0$) для этого метода.

Таблица I.

№	n	n_1	„1" u	„1" k	„1" ε_u	„3" u	„3" k	„3" ε_u	„3" ε'_u	„3" ε''_u	„3" ε'''_u	„4" u	„4" k	„4" ε_u	„4" ε'_u	„4" ε''_u	„4" ε'''_u	„1a" u	„1a" k	„1a" ε_u
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
3	12	9	− 1.425	− 1.686	14	− 1.426	− 1.683	17	16	16	14	− 1.427	− 1.678	17	16	17	14	− 1.429	− 1.689	14
8	12	9	− 4.685	− 2.068	11	− 4.684	− 2.071	13	13	14	11	− 4.684	− 2.073	13	13	14	11	− 4.686	− 2.087	11
11	12	8	− 5.264	− 0.009	9	− 5.263	− 0.013	15	12	13	10	− 5.262	− 0.015	14	12	12	9	− 5.264	− 0.005	9
15	13	9	− 9.124	− 0.363	8	− 9.125	− 0.360	13	9	9	8	− 9.129	− 0.355	10	19	9	8	− 9.125	− 0.370	8
19	12	9	−12.137	− 0.342	12	−12.132	− 0.364	17	14	15	12	−12.131	− 0.367	17	14	15	12	−12.134	− 0.349	12
21	14	10	−13.497	− 0.304	8	−13.497	− 0.306	11	9	10	8	−13.501	− 0.303	12	10	10	8	−13.494	− 0.318	8
24	10	7	+ 2.239	− 0.496	10	+ 2.243	− 0.510	13	12	12	10	+ 2.245	− 0.518	12	12	13	10	+ 2.242	− 0.503	10
29	14	10	+ 0.596	− 0.581	9	+ 0.601	− 0.601	12	10	11	9	+ 0.602	− 0.602	12	10	11	9	+ 0.597	− 0.586	8
30	12	9	+ 0.502	− 0.620	11	+ 0.504	− 0.629	14	13	13	11	+ 0.500	− 0.628	14	14	15	12	+ 0.505	− 0.621	11
31	14	11	−14.223	− 0.310	13	−14.215	− 0.342	17	15	16	13	−14.215	− 0.343	17	15	16	13	−14.220	− 0.314	14
38	11	8	− 1.537	− 0.369	11	− 1.535	− 0.378	16	14	14	12	− 1.533	− 0.386	14	13	14	11	− 1.539	− 0.367	11
43	10	6	− 4.252	+ 1.213	7	− 4.250	+ 1.206	9	9	10	7	− 4.256	+ 1.230	10	9	10	7	− 4.251	+ 1.211	5
45	11	8	− 4.576	+ 1.129	11	− 4.575	+ 1.124	13	13	14	11	− 4.575	+ 1.123	12	13	14	11	− 4.577	+ 1.131	11
46	13	9	− 0.969	+ 2.230	7	− 0.969	+ 2.231	8	8	10	8	− 0.966	+ 2.243	9	8	9	7	− 0.959	+ 2.228	7
47	13	9	− 1.198	+ 2.953	8	− 1.201	+ 2.962	11	10	10	8	− 1.202	+ 2.966	11	10	10	8	− 1.199	+ 2.958	8
49	11	8	− 1.752	− 3.995	7	− 1.754	− 3.986	8	8	8	7	− 1.755	− 3.981	8	8	9	7	− 1.752	− 3.992	7
50	14	11	− 1.692	− 4.014	11	− 1.694	− 4.000	13	12	13	11	− 1.695	− 3.998	13	13	13	11	− 1.692	− 4.020	12
51	13	9	− 1.970	− 1.647	10	− 1.969	− 1.648	14	12	14	11	− 1.970	− 1.648	13	13	14	11	− 1.974	− 1.643	10
52	13	10	− 1.962	− 1.640	9	− 1.962	− 1.637	12	10	11	9	− 1.962	− 1.636	10	10	11	9	− 1.962	− 1.638	9
59	11	8	− 2.531	+ 0.086	8	− 2.527	+ 0.073	11	9	10	8	− 2.526	+ 0.072	11	9	10	8	− 2.531	+ 0.084	8
141	13	9	+ 0.932	+ 0.187	10	+ 0.936	+ 0.168	12	12	13	10	+ 0.937	+ 0.166	12	12	13	10	+ 0.932	+ 0.184	10
151	13	10	+ 0.428	+ 0.186	7	+ 0.430	+ 0.177	9	8	8	7	+ 0.432	+ 0.176	9	8	8	7	+ 0.429	+ 0.185	7
153	11	7	+ 1.506	+ 0.913	13	+ 1.511	+ 0.906	16	16	19	14	+ 1.505	+ 0.909	18	18	19	14	+ 1.504	+ 0.915	14
160	12	9	− 0.338	− 0.169	6	− 0.339	− 0.167	8	8	8	7	− 0.338	− 0.170	7	7	7	6	− 0.339	− 0.168	6
162	13	9	+ 0.474	− 0.165	4	+ 0.471	− 0.154	6	5	6	5	− 0.471	− 0.155	6	5	6	5	+ 0.473	− 0.162	4
177	11	8	+ 0.159	− 0.123	7	+ 0.157	− 0.116	9	8	8	7	− 0.157	− 0.116	9	8	8	7	+ 0.156	− 0.118	6
179	11	8	+ 0.154	− 0.202	9	+ 0.150	− 0.189	13	11	12	10	− 0.150	− 0.189	14	11	12	10	+ 0.151	− 0.200	10
181	12	9	+ 0.130	− 0.093	8	+ 0.130	− 0.094	13	9	10	8	− 0.131	− 0.095	13	10	10	8	+ 0.131	− 0.098	8
183	11	8	+ 0.156	− 0.194	8	+ 0.154	− 0.184	12	10	11	9	− 0.154	− 0.185	12	10	11	9	+ 0.156	− 0.194	9
188	11	8	+ 1.419	− 0.223	8	+ 1.417	− 0.217	9	9	10	8	+ 1.418	− 0.217	9	10	10	8	+ 1.418	− 0.229	7

u и k даны в секундах времени. ε_u в тысячных долях секунды.