ГЛАВА IV

ПРЯМЫЕ РАВНОТОЧНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

§ 1. Точечная оценка измеряемой величины

Пусть измерения физической величины a дают значения x_1, $x_2, \ldots, x_n$. Будем считать, что эти значения представляют собой сумму a и случайных погрешностей

$$\Delta_i = x_i - a \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{4.1.1}$$

причем погрешности Δ_i независимы в совокупности и нормальны. Далее, будем считать, что

$$E(\Delta_i) = 0; \quad E(\Delta_i^2) = \sigma^2 \tag{4.1.2}$$

(т. е. $\Delta_i \in N(0, \sigma)$).

Равенство $E(\Delta_i) = 0$ означает *несмещенность измерений* (отсутствие систематической ошибки). То, что число σ, неизвестное нам, одно и то же для всех значений i, означает *равноточность измерений*.

Требуется найти приближенное значение физической величины a на основании наблюдений $x_1, \ldots, x_n$. Как мы видели, это — задача оценивания параметра a при повторной выборке. Применим для ее решения способ максимального правдоподобия (§ 4 гл. III). Функция правдоподобия имеет вид

$$L(x_1, \ldots, x_n, a) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, a),$$

где

$$f(x_i, a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp - \frac{(x_i - a)^2}{2\sigma^2}.$$

Таким образом,

$$L(x_1, \ldots, x_n, a) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma^{-n} \exp - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2. \tag{4.1.3}$$

Предписание максимального правдоподобия требует при заданном σ выбирать $a = \hat{a}$ так, чтобы было

$$L(x_1, \ldots, x_n, a) = \max. \tag{4.1.4}$$

Из (4.1.3) очевидно, что это равносильно условию

$$Q=\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2=\min, \tag{4.1.5}$$

которое и есть предписание наименьших квадратов.

Введя среднее выборочное

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i, \tag{4.1.6}$$

находим

$$Q=\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2+n\left(a-\bar{x}\right)^2, \tag{4.1.7}$$

откуда видно, что $\min Q$ получается тогда и только тогда, если заменим a на $\bar{x}$, т. е.

$$\hat{a}=\bar{x}. \tag{4.1.8}$$

Итак, оценка по методу наименьших квадратов в данном случае дает $\hat{a}=\bar{x}$ в качестве приближенного значения a. Выясним реальный смысл такого приближения.

Имеем

$$E\left(\bar{x}\right)=a;\quad D\left(\bar{x}\right)=\frac{\sigma^2}{n}.$$

Поскольку $\bar{x}$ — нормальная случайная величина, то

$$\bar{x}\in N\left(a,\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

Значит, $\bar{x}$ будет нормальной величиной со средним, равным измеряемой физической величине a, и штандартом, равным $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. В частности, будем иметь

$$P\left\{\left|\bar{x}-a\right|>\frac{1{,}96\sigma}{\sqrt{n}}\right\}=0{,}05. \tag{4.1.9}$$

При большом числе наблюдений n мы будем иметь, при работе с оценкой $\bar{x}$, почти наверное приближение порядка $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$ к измеряемой величине a. Однако изредка (с вероятностью $<0{,}05$) возможны и бóльшие отклонения. Отклонение более чем на $\frac{3\sigma}{\sqrt{n}}$ имеет уже вероятность около 0,003. Далее, $\bar{x}$ является эффективной оценкой для a, ибо из (3.3.13) имеем для весьма широкого класса других несмещенных оценок t параметра a неравенство

$$D(t)\geqslant\frac{\sigma^2}{n}=D\left(\bar{x}\right).$$

Таким образом, на основании сказанного в § 5 гл. II, реальный смысл оценки $\bar{x}$ по методу наименьших квадратов таков: в весьма широком классе асимптотически несмещенных и асимптотически нормальных оценок t имеем при заданном сколь угодно малом $\varepsilon > 0$

$$P\{|\bar{x}-a| > \varepsilon\} \leqslant P\{|t-a| > \varepsilon\}, \tag{4.1.10}$$

с точностью до возможных добавочных слагаемых, стремящихся к нулю при увеличении объема выборки. Это служит оправданием выбора предписания наименьших квадратов вместо какого-либо иного.

§ 2. Оценивание с помощью доверительных интервалов

Хотя мы знаем, что точечная оценка $\bar{x}$, полученная в § 1, выгодна в широком классе иных точечных оценок, она имеет тот недостаток, что наверное не совпадает с измеряемой величиной a; кроме того, для определения ее точности нужно знать дисперсию единичного наблюдения. Последний вопрос требует отдельного решения. Теперь же мы обратимся к новому, более совершенному способу оценивания — способу доверительных интервалов, принадлежащему известному американскому статистику Ю. Нейману [38]. Мы будем рассматривать этот способ не во всей полноте его применений, а лишь в приложении к методу наименьших квадратов.

Наряду с выборочным средним $\bar{x}$ введем еще выборочную дисперсию $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$. Докажем следующую теорему.

Теорема 4.2.1. *s^2 есть случайная величина, статистически независимая от $\bar{x}$ и распределенная как величина*

$$\frac{\sigma^2}{n}\chi^2_{n-1}. \tag{4.2.1}$$

Для доказательства независимости s^2 и $\bar{x}$ докажем, что $\bar{x}$ независимо от нормального случайного вектора $(x_1-\bar{x}, \ldots, x_n-\bar{x})$ (вырожденного, так как сумма его компонент равна нулю).

Рассмотрим n-мерный случайный нормальный вектор

$$(x_1-\bar{x}, \ldots, x_{n-1}-\bar{x}, \bar{x}). \tag{4.2.2}$$

Компоненты $\bar{x}$ некоррелированы с остальными компонентами. В самом деле,

$$E(x_i-\bar{x}) = 0,$$

$$E(x_i-\bar{x})(\bar{x}-a) = E[(x_i-a)-(\bar{x}-a)](\bar{x}-a) =$$
$$= \frac{1}{n}E(x_i-a)^2 - E(\bar{x}-a)^2 = \frac{\sigma^2}{n} - \frac{\sigma^2}{n} = 0.$$

Ввиду нормальности плотности распределения (4.2.2), это означает, что $\bar{x}$ не зависит от $x_i - \bar{x}$ ($i = 1, 2, \ldots, n-1$) в совокупности, стало быть и от любой их непрерывной функции $f\left(x_1 - \bar{x}, \ldots, x_{n-1} - \bar{x}\right)$. Следовательно, $\bar{x}$ не зависит от $x_n - \bar{x} = -\sum_{i=1}^{n-1}\left(x_i - \bar{x}\right)$, от совокупности $\left(x_1 - \bar{x}, \ldots, x_n - \bar{x}\right)$ и от любой непрерывной функции $f\left(x_1 - \bar{x}, \ldots, x_n - \bar{x}\right)$, в частности, от $s^2 = \frac{1}{n}\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^2$. Остается доказать, что s^2 распределено как $\frac{\sigma^2}{n}\chi^2_{n-1}$. Рассмотрим величину $\frac{ns^2}{\sigma^2}$ и положим $y_i = \frac{x_i - a}{\sigma}$, так что $y_i \in N(0, 1)$.

Тогда

$$\frac{ns^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2.$$

Рассмотрим ортогональное преобразование

$$\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt{n}\,\bar{y} = \frac{1}{\sqrt{n}}y_1 + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}y_n\\
z_2 &= c_{21}y_1 + \ldots + c_{2n}y_n\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
z_n &= c_{n1}y_1 + \ldots + c_{nn}y_n
\end{aligned}$$

с первой строкой, отвечающей $\sqrt{n}\,\bar{y}$, и другими соответствующим образом подобранными строками.

Согласно теореме Фишера (теорема 2.3.2), $(z_1, \ldots, z_n)$ будет таким же нормальным вектором, как $(y_1, \ldots, y_n)$, т. е. $z_i \in N(0, 1)$ и z_i независимы в совокупности ($i = 1, 2, \ldots, n$). Далее,

$$\sum y_i^2 = \sum z_i^2, \quad \frac{ns^2}{\sigma^2} = \sum y_i^2 - n\bar{y}^2 = \sum_{i=1}^{n} z_i^2 - z_1^2 = \sum_{i=2}^{n} z_i^2.$$

Таким образом, величина $\frac{ns^2}{\sigma^2}$ распределена по закону χ^2_{n-1}. Отсюда следует важная теорема:

Теорема 4.2.2. *Дробь*

$$t_{n-1} = \frac{\bar{x} - a}{s}\sqrt{n-1} \tag{4.2.3}$$

распределена по закону Стьюдента с $n-1$ степенями свободы.

Для доказательства замечаем, что $t_{n-1} = \frac{\xi}{\sqrt{(n-1)^{-1}\left(\eta_1^2 + \ldots + \eta_{n-1}^2\right)}}$, где $\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-1}$ независимы в совокупности и нормальны $N(0, 1)$.

Заметим, что на основании предыдущего величина $\sqrt{\frac{ns^2}{\sigma^2(n-1)}}$ распределена, как $\sqrt{\frac{\chi^2_{n-1}}{n-1}}$, а величина $\frac{(\bar{x}-a)\sqrt{n}}{\sigma}$ от нее независима и нормальна $N(0, 1)$. Поэтому величина

$$t_{n-1} = \frac{\bar{x}-a}{s}\sqrt{n-1} = \frac{\bar{x}-a}{\sigma}\sqrt{n}\left(\frac{s\sqrt{n}}{\sigma\sqrt{n-1}}\right)^{-1}$$

действительно распределена по закону Стьюдента с плотностью вероятности $s_{n-1}(x)$ [см. (2.6.6)], т. е. с $n-1$ степенями свободы.

Доказанная теорема дает путь к оцениванию a по методу доверительных интервалов. По заданному числу степеней свободы $n-1$ выберем γ по табл. I приложений так, чтобы было

$$P\{|t_{n-1}| \leqslant \gamma\} = 0{,}95. \tag{4.2.4}$$

Это означает, что

$$P\left\{\left|\frac{\bar{x}-a}{s}\right|\sqrt{n-1} \leqslant \gamma\right\} = 0{,}95, \tag{4.2.5}$$

или

$$P\left\{\bar{x} - \frac{\gamma s}{\sqrt{n-1}} \leqslant a \leqslant \bar{x} + \frac{\gamma s}{\sqrt{n-1}}\right\} = 0{,}95. \tag{4.2.6}$$

Иначе говоря, вероятность того, что интервал со случайными концами

$$I = \left[\bar{x} - \frac{\gamma s}{\sqrt{n-1}},\quad \bar{x} + \frac{\gamma s}{\sqrt{n-1}}\right] \tag{4.2.7}$$

накрывает неизвестное значение a, есть 0,95.

Такой интервал I со случайными концами называется *доверительным интервалом*, а изложенные соображения — *методом оценивания с помощью доверительного интервала*. Этот метод требует мало дополнительных вычислений по сравнению с методом точечной оценки.

Величина 0,95 в данном случае называется *надежностью* доверительного интервала, а математическое ожидание длины интервала, т. е. величина

$$E\left(\frac{2\gamma s}{\sqrt{n-1}}\right), \tag{4.2.8}$$

— *точностью* оценивания.

Надежность можно задавать равной не только 0,95, но и 0,99; 0,999, и вообще любой, употребляя при необходимости интерполяцию в таблицах. При данной надежности точность будет обратно пропорциональна $\sqrt{n-1}$, а при заданном числе наблюдений и увеличении надежности число γ возрастает, так что точность уменьшается.

Остановимся на вопросе о реальном смысле оценивания по методу доверительных интервалов. Допустим, что наблюдатель производит большое число N серий равноточных прямых измерений различных величин $a_1, a_2, \ldots, a_N$, измеряя их по методу доверительных интервалов с одной и той же надежностью, скажем, равной 0,95. Мы можем тогда утверждать, что при большом числе N серий измерений, около $0{,}95 N$ построенных наблюдателем доверительных интервалов I_i будут накрывать измеряемые величины a_i.

В самом деле, введем случайную величину ξ_i, принимающую значение единица, если доверительный интервал I_i накрывает a_i, и нуль, если он ее не накрывает. Тогда $\Xi_N = \xi_1 + \ldots + \xi_N$ будет числом успешных измерений наблюдателя. Здесь числа $\xi_1, \ldots, \xi_N$ независимы, и при этом

$$E(\xi_i) = 1 \cdot 0{,}95 + 0 \cdot 0{,}05 = 0{,}95,$$
$$D(\xi_i) = 0{,}95 \cdot 0{,}05 < 0{,}05.$$

Отсюда, по закону больших чисел (теорема 2.7.3)

$$P\left\{\left|\frac{\Xi_N}{N} - 0{,}95\right| > \varepsilon\right\} \to 0$$

при $N \to \infty$ и любом заданном $\varepsilon > 0$, что доказывает наше утверждение.

Встает вопрос о том, почему мы употребляем именно доверительный интервал (4.2.7), а не какие-либо иные. Мы замечаем, что центр доверительного интервала (4.2.7) — оценка $\bar{x}$ — найден по методу наименьших квадратов и представляет собой точечную оценку для a, оптимальную в определенном смысле [см. (4.1.10)]. Оказывается, что и доверительный интервал (4.2.7) в некотором смысле оптимален, но мы не будем на этом останавливаться, ибо это требует углубления в теорию так называемых достаточных статистик.

Мы видели, что $D(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$. Очевидно, несмещенной оценкой для $\frac{\sigma^2}{n}$ будет оценка

$$\frac{s_1^2}{n} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2. \tag{4.2.9}$$

При обработке наблюдений указанного типа обычно употребляются терминология и обозначения, восходящие еще к Гауссу. Величины $\Delta_i = x_i - a$ (вообще говоря, неизвестные нам) называются *истинными ошибками*.

Величины $v_i = x_i - \bar{x}$ называются *кажущимися ошибками*. Суммы вида $\sum_{i=1}^{n} a_i$ обозначаются символом $[a]$, а суммы вида $\sum_{i=1}^{n} b_i^2$ — символом $[bb]$.

Правила обработки прямых равноточных наблюдений

а) Точечное оценивание

Находим $\bar{x} = \frac{1}{n}[x]$; $s_1^2 = \frac{1}{n-1}[vv]$; $\frac{s_1^2}{n} = \frac{1}{n(n-1)}[vv]$.

Вычисление удобно делать с помощью подходящим образом выбранного числа β и очевидных равенств

$$\bar{x} = \frac{1}{n}[x-\beta] + \beta, \tag{4.2.10}$$

$$[vv] = \frac{1}{n}[x-\beta,\ x-\beta] - (\bar{x}-\beta)^2. \tag{4.2.11}$$

Для контроля вычислений $\bar{x}$ пользуемся равенством $[v] = 0$.

б) Оценивание по методу доверительных интервалов

Вычисляем величины $\bar{x}$ и $s = \sqrt{\frac{1}{n}[vv]}$; выбираем подходящую надежность p_0; она будет первым входом табл. I приложений. Вторым входом будет число степеней свободы $n-1 = k$. Эти два входа дадут по таблице число γ. Доверительный интервал

$$I = \left[\bar{x} - \frac{\gamma s}{\sqrt{n-1}},\ \bar{x} + \frac{\gamma s}{\sqrt{n-1}}\right]$$

будет накрывать измеряемую величину a с заданной надежностью p_0.

Если пользоваться несмещенной оценкой s_1^2 для σ^2, то доверительный интервал для a имеет вид

$$I = \left[\bar{x} - \frac{\gamma s_1}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + \frac{\gamma s_1}{\sqrt{n}}\right].$$

Оценивание точности измерений с помощью доверительных интервалов излагается ниже.

§ 3. Оценивание точности равноточных измерений

Метод доверительных интервалов позволял нам делать выводы об измеряемой величине на основании повторной выборки наблюдений $x_1, x_2, \ldots, x_n$, распределенных с плотностью вероятности

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp - \frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}. \tag{4.3.1}$$

При этом знание дисперсии наблюдений $\sigma^2 = E(x_i - a)^2$, характеризующей их точность, не было нужно для данного способа оценивания. Однако часто бывает нужно изучать и сам по себе штандарт наблюдений σ. Такой вопрос встает при изучении точности работы измерительных приборов, механизмов на производстве, рассеяния снарядов, даваемого артиллерийскими системами, и т. д.

С точки зрения математической статистики (см. § 2 гл. III), данная задача есть задача оценивания параметра σ на основании повторной выборки наблюдений $(x_1, \ldots, x_n)$.

Как мы знаем (см. § 2 этой главы), статистика

$$s_1^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \tag{4.3.2}$$

будет несмещенной оценкой для σ^2, т. е.

$$E(s_1^2) = \sigma^2. \tag{4.3.3}$$

Исследуя статистику (4.3.2) (например, используя теорему В. Хёфдинга 2.7.2), можно показать, что при данном $\varepsilon > 0$ и $n \to \infty$

$$P\left\{\left|s_1^2 - \sigma^2\right| > \varepsilon\right\} \to 0. \tag{4.3.4}$$

Можно, кроме того, охарактеризовать быстроту такого стремления. Поэтому для больших выборок можно брать $\sigma^2 \approx s_1^2$; $\sigma \approx s_1$ ($\approx$ знак приближенного равенства). Таким образом, получаются приближенные точечные оценки для σ^2 и σ.

Мы, однако, применим более точный способ оценивания с помощью доверительных интервалов. Он будет основан на утверждении, доказанном в § 2 (теорема 4.2.1) о том, что величина $u = \frac{ns^2}{\sigma^2}$ распределена по закону χ^2_{n-1}. Составим доверительный интервал

$$I_\varepsilon = [\gamma_1 s^2, \ \gamma_2 s^2]. \tag{4.3.5}$$

Вероятность того, что этот интервал I_ε накрывает σ^2, равна

$$P\{\gamma_1 s^2 \leqslant \sigma^2 \leqslant \gamma_2 s^2\} = P\left\{\frac{n}{\gamma_2} \leqslant \frac{ns^2}{\sigma^2} \leqslant \frac{n}{\gamma_1}\right\} = P\left\{\frac{n}{\gamma_2} \leqslant \chi^2_{n-1} \leqslant \frac{n}{\gamma_1}\right\}.$$

Обозначим $k_{n-1}(x)$ плотность вероятности для χ^2_{n-1} (см. § 6 гл. II).

Надежность накрытия σ^2 интервалом I_ε равна

$$\int_{\frac{n}{\gamma_2}}^{\frac{n}{\gamma_1}} k_{n-1}(x)\,dx = K_{n-1}\left(\frac{n}{\gamma_1}\right) - K_{n-1}\left(\frac{n}{\gamma_2}\right).$$

Таким образом, чтобы при заданном $\frac{\gamma_2}{\gamma_1}$ получить нужную надежность, нужно иметь таблицы неполной гамма-функции $K_{n-1}(x)$. Можно пользоваться таблицами Е. Е. Слуцкого [45]. Мы не останавливаемся на том, оптимален ли в каком-либо смысле такой метод оценивания.

Для упрощения дела можно выбрать (см. А. Н. Колмогоров [22]) γ_1 и γ_2 так, что

$$K_{n-1}\left(\frac{n}{\gamma_2}\right)=\frac{1-\omega}{2}=P_1;\quad K_{n-1}\left(\frac{n}{\gamma_1}\right)=\frac{1+\omega}{2}=P_2,$$

где ω — заданная надежность. Соответствующие таблицы имеются в статье А. Н. Колмогорова [22].

§ 4. Примеры

Пример 1. При определении величины заряда электрона, равной $e_0\cdot10^{-10}$ единиц *CGSE*, Милликен получил 58 значений величины e_0 (в табл. 7 они обозначены через x_i').

Таблица 7

x_i'	$x_i'-\beta$	$(x_i'-\beta)^2$	x_i'	$x_i'-\beta$	$(x_i'-\beta)^2$
4,781	0,081	0,00656	4,771	0,071	0,00504
4,795	0,095	0,00903	4,809	0,109	0,01188
4,769	0,069	0,00176	4,790	0,090	0,00810
4,792	0,092	0,00846	4,779	0,079	0,00624
4,779	0,079	0,00624	4,788	0,088	0,00774
4,775	0,075	0,00563	4,772	0,072	0,00518
4,772	0,072	0,00518	4,791	0,091	0,00828
4,791	0,091	0,00828	4,788	0,088	0,00774
4,782	0,082	0,00672	4,783	0,083	0,00689
4,767	0,067	0,00449	4,740	0,040	0,00160
4,764	0,064	0,00410	4,775	0,075	0,00563
4,776	0,076	0,00578	4,761	0,061	0,00372
4,771	0,071	0,00504	4,792	0,092	0,00846
4,789	0,089	0,00792	4,758	0,058	0,00336
4,772	0,072	0,00518	4,764	0,064	0,00410
4,789	0,089	0,00792	4,810	0,110	0,01210
4,764	0,064	0,00410	4,799	0,099	0,00980
4,774	0,074	0,00548	4,799	0,099	0,00980
4,778	0,078	0,00608	4,797	0,097	0,00941
4,791	0,091	0,00828	4,790	0,090	0,00810
4,777	0,077	0,00593	4,747	0,047	0,00221
4,765	0,065	0,00423	4,769	0,069	0,00476
4,785	0,085	0,00723	4,806	0,106	0,01124
4,805	0,105	0,01103	4,779	0,079	0,00624
4,768	0,068	0,00462	4,785	0,085	0,00723
4,801	0,101	0,01020	4,790	0,090	0,00810
4,785	0,085	0,00723	4,777	0,077	0,00593
4,783	0,083	0,00689	4,749	0,049	0,00240
4,808	0,108	0,01166	4,781	0,081	0,00656
			Сумма . .	4,687	0,39209