В.Е. ГМУРМАН

Теория вероятностей и математическая статистика

Издание девятое, стереотипное

Рекомендовано
Министерством образования
Российской Федерации
в качестве учебного пособия
для студентов вузов

Москва
«Высшая школа» 2003

§ 13. Распределение «хи квадрат»

Пусть X_i $(i - 1, 2, \ldots, n)$ — нормальные независимые случайные величины, причем математическое ожидание каждой из них равно нулю, а среднее квадратическое отклонение — единице. Тогда сумма квадратов этих величин

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

распределена по закону χ^2 («хи квадрат») с $k=n$ степенями свободы; если же эти величины связаны одним линейным соотношением, например $\sum X_i = n\overline{X}$, то число степеней свободы $k=n-1$.

Плотность этого распределения

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\leqslant 0, \\ \dfrac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} e^{-x/2} x^{(k/2)-1} & \text{при } x>0, \end{cases}$$

где $\Gamma(x)=\int\limits_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,dt$ — гамма-функция; в частности,

$$\Gamma(n+1)=n!.$$

Отсюда видно, что распределение «хи квадрат» определяется одним параметром — числом степеней свободы k.

С увеличением числа степеней свободы распределение медленно приближается к нормальному.

§ 14. Распределение Стьюдента

Пусть Z — нормальная случайная величина, причем $M(Z)=0$, $\sigma(Z)=1$, а V — независимая от Z величина, которая распределена по закону χ^2 с k степенями свободы. Тогда величина

$$T=\frac{Z}{\sqrt{V/k}} \qquad (*)$$

имеет распределение, которое называют t-распределением или распределением Стьюдента (псевдоним английского статистика В. Госсета), с k степенями свободы.

Итак, отношение нормированной нормальной величины к квадратному корню из независимой случайной величины, распределенной по закону «хи квадрат» с k степенями свободы, деленной на k, распределено по закону Стьюдента с k степенями свободы.

С возрастанием числа степеней свободы распределение Стьюдента быстро приближается к нормальному. Дополнительные сведения об этом распределении приведены далее (см. гл. XVI, § 16).

§ 15. Распределение F Фишера — Снедекора

Если U и V — независимые случайные величины, распределенные по закону χ^2 со степенями свободы k_1 и k_2, то величина

$$F = \frac{U/k_1}{V/k_2} \qquad (*)$$

имеет распределение, которое называют распределением F Фишера — Снедекора со степенями свободы k_1 и k_2 (иногда его обозначают через V^2).

Плотность этого распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ C_0 \dfrac{x^{(k_1-2)/2}}{(k_2+k_1x)^{(k_1+k_2)/2}} & \text{при } x > 0, \end{cases}$$

где

$$C_0 = \frac{\Gamma\left(\dfrac{k_1+k_2}{2}\right) k_1^{k_1/2}\, k_2^{k_2/2}}{\Gamma(k_1/2)\,\Gamma(k_2/2)}.$$

Мы видим, что распределение F определяется двумя параметрами — числами степеней свободы. Дополнительные сведения об этом распределении приведены далее (см. гл. XIX, § 8).