$$\delta^*(x^*) \leqslant \mathrm{cond}(A)\cdot\delta(A_*), \tag{5.27}$$

где $\delta^*(x^*) = \|x - x^*\|/\|x^*\|$, $\delta(A_*) = \|A - A_*\|/\|A\|$.

□ В данном случае невязка r имеет вид $r = b - Ax^* = A_*x^* - Ax^* = (A_* - A)x^*$. Применяя неравенство (5.19), получим цепочку неравенств

$$\delta^*(x^*) = \|x - x^*\|/\|x^*\| \leqslant \|A^{-1}\|\cdot\|(A_* - A)x^*\|/\|x^*\| \leqslant$$

$$\leqslant \|A^{-1}\|\cdot\|A_* - A\|\cdot\|x^*\|/\|x^*\| = \mathrm{cond}(A)\cdot\delta(A_*). \blacksquare$$

Следствие. *В условиях теоремы* 5.2 *справедливо приближенное неравенство*

$$\delta(x^*) \lesssim \mathrm{cond}(A)\cdot\delta(A_*). \tag{5.28}$$

Замечание 1. В случае, когда с погрешностью заданы как правая часть системы, так и матрица (т. е. x^* является решением системы $A_*x^* = b^*$), причем $\mathrm{cond}(A)\cdot\delta(A_*) \ll 1$, можно доказать справедливость неравенства

$$\delta(x^*) \lesssim \mathrm{cond}(A)\,(\delta(b^*) + \delta(A_*)).$$

Замечание 2. Распространенным является представление о том, что по величине определителя матрицы A можно судить о степени близости системы уравнений к вырожденной или об обусловленности системы. Для того чтобы убедиться в ошибочности этого мнения, умножим каждое из уравнений системы (5.1) на постоянную $\alpha \neq 0$. Ясно, что такое преобразование никак не меняет решение системы и его чувствительность к малым относительным ошибкам в данных. Однако определитель умножается на число α^m, и поэтому с помощью выбора α может быть сделан как угодно большим или малым. Подчеркнем, что число обусловленности $\mathrm{cond}(A)$ при таком преобразовании системы не меняется в силу свойства 3^0.

Замечание 3. Вычисление чисел обусловленности $\nu_\delta = \|A^{-1}\|\cdot\|b\|/\|x\|$ и $\mathrm{cond}(A) = \|A^{-1}\|\cdot\|A\|$ непосредственно по указанным формулам предполагает предварительное вычисление обратной матрицы A^{-1}. Вследствие большой трудоемкости этой операции (как показано в § 5.6, для ее выполнения в общем случае требуется примерно $2m^3$ арифметических операций) на практике избегают такого способа вычисления. При этом важно отметить, что в большинстве случаев достаточно лишь грубой оценки числа обусловленности с точностью до порядка. С эффективными методами, дающими оценки величин ν_δ и $\mathrm{cond}(A)$, можно познакомиться в [67], [86].

Проверить чувствительность решения системы $Ax = b$ к погрешностям можно и экспериментально. Для этого достаточно решить задачу несколько раз с несколькими близкими к b правыми частями $b^{(1)}$, $b^{(2)}$, ..., $b^{(n)}$. Можно ожидать, что величина $\tilde{\nu}_\delta = \max\limits_{1\leqslant l\leqslant k} \dfrac{\delta(x^{(l)})}{\delta(b^{(l)})}$ даст оценку значения ν_δ. Во всяком случае эта величина дает оценку снизу, так как $\tilde{\nu}_\delta \leqslant \nu_\delta \leqslant \mathrm{cond}(A)$.

§ 5.5 Метод Гаусса

Рассмотрим один из самых распространенных методов решения систем линейных алгебраических уравнений — *метод Гаусса*[1]. Этот метод (который называют также *методом последовательного исключения неизвестных*) известен в различных вариантах уже более 2000 лет.

Вычисления с помощью метода Гаусса состоят из двух основных этапов, называемых *прямым ходом* и *обратным ходом* (*обратной подстановкой*). Прямой ход метода Гаусса заключается в последовательном исключении неизвестных из системы (5.1) для преобразования ее к эквивалентной системе с верхней треугольной матрицей. Вычисления значений неизвестных производят на этапе обратного хода.

1. Схема единственного деления. Рассмотрим сначала простейший вариант метода Гаусса, называемый *схемой единственного деления*.

Прямой ход состоит из $m - 1$ шагов исключения.

1-й шаг. Целью этого шага является исключение неизвестного x_1 из уравнений с номерами $i = 2, 3, \ldots, m$. Предположим, что коэффициент $a_{11} \neq 0$. Будем называть его *главным* (или *ведущим*) *элементом* 1-*го шага*.

Найдем величины

$$\mu_{i1} = a_{i1}/a_{11} \ (i = 2, 3, \ldots, m), \tag{5.29}$$

называемые *множителями* 1-*го шага*. Вычтем последовательно из второго, третьего, ..., m-го уравнений системы (5.1) первое уравнение, умноженное соответственно на μ_{21}, μ_{31}, ..., μ_{m1}. Это позволит обратить в

---

[1] Карл Фридрих Гаусс (1777—1855) — немецкий математик и физик, работы которого оказали большое влияние на дальнейшее развитие высшей алгебры, геометрии, теории чисел, теории электричества и магнетизма.

нуль коэффициенты при x_1 во всех уравнениях, кроме первого. В результате получим эквивалентную систему

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1m}x_m &= b_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2m}^{(1)}x_m &= b_2^{(1)}, \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{3m}^{(1)}x_m &= b_3^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m2}^{(1)}x_2 + a_{m3}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{mm}^{(1)}x_m &= b_m^{(1)}. \end{aligned} \tag{5.30}$$

в которой $a_{ij}^{(1)}$ и $b_i^{(1)}$ $(i, j = 2, 3, \ldots, m)$ вычисляются по формулам

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \mu_{i1}a_{1j}, \quad b_i^{(1)} = b_i - \mu_{i1}b_1. \tag{5.31}$$

2-й шаг. Целью этого шага является исключение неизвестного x_2 из уравнений с номерами $i = 3, 4, \ldots, m$. Пусть $a_{22}^{(1)} \neq 0$, где $a_{22}^{(1)}$ — коэффициент, называемый *главным* (или *ведущим*) *элементом 2-го шага*. Вычислим множители 2-го шага

$$\mu_{i2} = a_{i2}^{(1)}/a_{22}^{(1)} \quad (i = 3, 4, \ldots, m)$$

и вычтем последовательно из третьего, четвертого, ..., m-го уравнений системы (5.30) второе уравнение, умноженное соответственно на μ_{32}, μ_{42}, ..., μ_{m2}. В результате получим систему

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1m}x_m &= b_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2m}^{(1)}x_m &= b_2^{(1)}, \\ a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3m}^{(2)}x_m &= b_3^{(2)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m3}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{mm}^{(2)}x_m &= b_m^{(2)}. \end{aligned} \tag{5.32}$$

Здесь коэффициенты $a_{ij}^{(2)}$ и $b_i^{(2)}$ $(i, j = 3, 4, \ldots, m)$ вычисляются по формулам

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \mu_{i2}a_{2j}^{(1)}, \quad b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - \mu_{i2}b_2^{(1)}.$$

Аналогично проводятся остальные шаги. Опишем очередной k-й шаг.

k-й шаг. В предположении, что *главный* (*ведущий*) *элемент* k-го шага $a_{kk}^{(k-1)}$ отличен от нуля, вычислим *множители k-го шага*

$$\mu_{ik} = a_{ik}^{(k-1)}/a_{kk}^{(k-1)} \quad (i = k+1, \ldots, m)$$

и вычтем последовательно из $(k+1)$-го, ..., m-го уравнений полученной на предыдущем шаге системы k-е уравнение, умноженное соответственно на $\mu_{k+1,k}$, $\mu_{k+2,k}$, ..., μ_{mk}.

После $(m-1)$-го шага исключения получим систему уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1m}x_m &= b_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2m}^{(1)}x_m &= b_2^{(1)}, \\ a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3m}^{(2)}x_m &= b_3^{(2)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{mm}^{(m-1)}x_m &= b_m^{(m-1)}. \end{aligned} \tag{5.33}$$

матрица $A^{(m-1)}$ которой является верхней треугольной. На этом вычисления прямого хода заканчиваются.

Обратный ход. Из последнего уравнения системы (5.33) находим x_m. Подставляя найденное значение x_m в предпоследнее уравнение, получим x_{m-1}. Осуществляя обратную подстановку, далее последовательно находим x_{m-2}, x_{m-3}, ..., x_1. Вычисления неизвестных здесь проводятся по формулам

$$\begin{aligned} x_m &= b_m^{(m-1)}/a_{mm}^{(m-1)}, \\ x_k &= (b_k^{(k-1)} - a_{k,k+1}^{(k-1)}x_{k+1} - \ldots - a_{km}^{(k-1)}x_m)/a_{kk}^{(k-1)}, \quad (k = m-1, \ldots, 1). \end{aligned} \tag{5.34}$$

Трудоемкость метода. Оценим число арифметических операций, необходимых для реализации схемы единственного деления.

Вычисления 1-го шага исключения по формулам (5.29), (5.31) требуют выполнения $m-1$ деления, $(m-1)m$ умножений и $(m-1)m$ вычитаний, т. е. общее число арифметических операций составляет $Q_1 = 2(m-1)^2 + 3(m-1)$. Аналогично, на 2-м шаге требуется $Q_2 = 2(m-2)^2 + 3(m-2)$ операций, а на k-м шаге — $Q_k = 2(m-k)^2 + 3(m-k)$ операций.

Подсчитаем теперь приближенно общее число Q арифметических операций прямого хода, считая размерность системы m достаточно большой:

$$Q = \sum_{k=1}^{m-1} Q_k = 2\sum_{k=1}^{m-1}(m-k)^2 + 3\sum_{k=1}^{m-1}(m-k) = 2\sum_{k=1}^{m-1}k^2 + 3\sum_{k=1}^{m-1}k =$$

$$= \frac{2(m-1)\,m\,(2m-1)}{6} + \frac{3(m-1)m}{2} \approx \frac{2}{3}m^3.$$

Как нетрудно видеть, для реализации обратного хода по формулам (5.34) нужно всего m^2 операций, что при больших m пренебрежимо мало по сравнению с числом операций прямого хода.

Таким образом, для реализации метода Гаусса требуется примерно $(2/3)m^3$ арифметических операций, причем подавляющее число этих действий совершается на этапе прямого хода.

Пример 5.7. Методом Гаусса решим систему

$$\begin{aligned} 10x_1 + 6x_2 + 2x_3 \qquad\quad &= 25, \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 14, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 &= 10, \\ 6x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 8. \end{aligned} \tag{5.35}$$

Прямой ход. 1-й шаг. Вычислим множители $\mu_{21} = a_{21}/a_{11} = 5/10 = 0.5$, $\mu_{31} = a_{31}/a_{11} = 3/10 = 0.3$, $\mu_{41} = a_{41}/a_{11} = 0/10 = 0$. Вычитая из второго, третьего и четвертого уравнений системы (5.35) первое уравнение, умноженное на μ_{21}, μ_{31} и μ_{41} соответственно получим

$$\begin{aligned} 10x_1 + 6x_2 + 2x_3 \qquad\quad &= 25, \\ -2x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 1.5, \\ 3.2x_2 + 0.4x_3 - x_4 &= 2.5, \\ 6x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 8. \end{aligned} \tag{5.36}$$

2-й шаг. Вычислим множители $\mu_{32} = a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)} = 3.2/(-2) = -1.6$, $\mu_{42} = 6/(-2) = -3$. Вычитая из третьего и четвертого уравнений системы (5.36) второе уравнение, умноженное на μ_{32} и μ_{42} соответственно, приходим к системе

$$\begin{aligned} 10x_1 + 6x_2 + 2x_3 \qquad\quad &= 25, \\ -2x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 1.5, \\ -4.4x_3 + 5.4x_4 &= 4.9, \\ -11x_3 + 14x_4 &= 12.5. \end{aligned} \tag{5.37}$$

3-й шаг. Вычисляя множитель $\mu_{43} = (-11)/(-4.4) = 2.5$ и вычитая из четвертого уравнения системы (5.37) третье уравнение, умноженное на μ_{43}, приводим систему к треугольному виду:

$$\begin{aligned} 10x_1 + 6x_2 + 2x_3 \qquad\quad &= 25, \\ -2x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 1.5, \\ -4.4x_3 + 5.4x_4 &= 4.9, \\ 0.5x_4 &= 0.25. \end{aligned} \tag{5.38}$$

Обратный ход. Из последнего уравнения системы находим $x_4 = 0.5$. Подставляя значение x_4 в третье уравнение, находим $x_3 =$

$= (4.9 - 5.4x_4)/(-4.4) = -0.5$. Продолжая далее обратную подстановку, получаем $x_2 = (1.5 + 3x_3 - 4x_4)/(-2) = 1$, $x_1 = (25 - 6x_2 - 2x_3)/10 = 2$. Итак, $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = -0.5$, $x_4 = 0.5$.

Результаты вычислений можно свести в следующую таблицу.

Таблица 5.2

	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	b_i	μ_{ij}, x_i
Исходная система	10	6	2	0	25	
	5	1	−2	4	14	
	3	5	1	−1	10	
	0	6	−2	2	8	
1-й шаг прямого хода	10	6	2	0	25	
	0	−2	−3	4	1.5	0.5
	0	3.2	0.4	−1	2.5	0.3
	0	6	−2	2	8	0
2-й шаг прямого хода	10	6	2	0	25	
	0	−2	−3	4	1.5	
	0	0	−4.4	5.4	4.9	−1.6
	0	0	−11	14	7.5	−3
3-й шаг прямого хода и обратный ход	10	6	2	0	25	2
	0	−2	−3	4	1.5	1
	0	0	−4.4	5.4	4.9	−0.5
	0	0	0	0.5	0.25	0.5

Необходимость выбора главных элементов. Заметим, что вычисление множителей, а также обратная подстановка требуют деления на главные элементы $a_{kk}^{(k-1)}$. Поэтому если один из главных элементов сказывается равным нулю, то схема единственного деления не может быть реализована. Здравый смысл подсказывает, что и в ситуации, когда все главные элементы отличны от нуля, но среди них есть близкие к нулю, возможен неконтролируемый рост погрешности.

Пример 5.8. Используя метод Гаусса, решим систему уравнений

$$\begin{aligned} 2x_1 - 9x_2 + 5x_3 &= -4, \\ 1.2x_1 - 5.3999x_2 + 6x_3 &= 0.6001, \\ x_1 - x_2 - 7.5x_3 &= -8.5 \end{aligned} \tag{5.39}$$

на 6-разрядной десятичной ЭВМ.