ЛОГИКО-ВЕРОЯТНОСТНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ МОНОТОННЫХ И НЕМОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Игорь Алексеевич РЯБИНИН
ryabinin@mail.wp1us.net

Рассматривается математическое понятие различных исчислений (высказываний, классов, предикатов, отношений), в том числе **логико-вероятностного исчисления** (**ЛВИ**). Отмечается возможность ошибок при использовании правильных по форме, но неправильных по содержанию функций алгебры логики (ФАЛ). Приводится поучительный пример исследования системы, описываемой немонотонной, повторной и правильной ФАЛ. Делается заключение, что все формулы, строго выведенные для монотонных ФАЛ, годятся и для немонотонных ФАЛ.

Ключевые слова: исчисление, булева разность, вероятностная функция, правильные логические формулы, алгебра логики и булева алгебра, организационно-техническая система, вероятностная логика и логика вероятностей.

«**Исчисление** – составная часть названия некоторых разделов математики, трактующих правила вычисления и оперирования с объектами того или иного типа, например, **дифференциальное исчисление, вариационное исчисление**» [1, с.252].

Исчисления являются одним из основных аппаратов математической логики. Именно логические исчисления были первыми примерами полностью формализованных дедуктивных систем.

Одной из основных сфер применения общей теории исчисления является **теория алгоритмов**. Это объясняется тем, что понятие **исчисления** имеет такой же фундаментальный характер, как и понятие алгоритма.

В логическом словаре Н.И. Кондакова [2, с.191] даётся следующее объяснение: *«…**Исчисление** – это такая система изучения тех или иных областей объективного мира, в которой предметам какой-либо определённой области ставятся в соответствие материальные знаки (цифры, буквы и др.), с которыми затем по принятым в системе точным правилам производятся операции, необходимые для решения поставленной цели.»*

В математической логике имеется несколько взаимосвязанных **исчислений** (исчисление высказываний, исчисление классов, исчисление предикатов, исчисление отношений).

Исчисление высказываний – первый раздел математической логики, изучающий логические операции с простыми высказываниями, которые объединяются в сложные высказывания с помощью пропозициональных связок, сходных с принятыми в обычной речи союзами: «И» (в математической логике он представлен символом $\wedge$), «ИЛИ» ($\vee$), «если …, то…» ($\rightarrow$), «если … и только если», «тогда и только тогда, когда» (~), а также с отрицанием, обозначаемым «не» ($\rceil$ или черта сверху буквы).

Существуют различные системы исчисления высказываний, которые отличаются друг от друга, в частности, тем, что они берут в качестве исходных различные наборы аксиом.

Немецкий математик, философ и логик Готтлоб Фреге (1848-1925) в книге «Исчисление понятий» (1979) систематически изложил исчисление высказываний. Это было первое систематическое построение логики высказываний, основанное на импликации и отрицании.

Русский математик Иван Иванович Жегалкин (1869-1947) развил **исчисление классов** (1946).

Ирландский математик и логик Джон Буль (1815-1864) в труде «Исследование законов мышления» (1854) писал:

«Назначение настоящего трактата – исследовать основные законы тех операций ума, посредством которых производится рассуждение; выразить их на символическом языке некоторого ***исчисления*** *и на этой основе установить науку логики и построить её* ***метод****; сделать этот метод основой общего применения* ***математической доктрины вероятностей****; и, наконец, собрать из различных элементов истины, выявленных в ходе этих изысканий, некоторые правдоподобные указания относительно природы и строения человеческого ума.»* (Цитата по работе [3, с.51-52], выделения наши).

Некоторым развитием исчисления высказываний является предложенная в работе [4, с.484] характеристика **булева разность**, позволяющая **исчислять** истинность важности аргументов x_i монотонных функций алгебры логики (ФАЛ).

На базе понятия булевой разности в монографии [4, с.486] впервые была дана количественная оценка веса булевой разности по аргументу x_i в виде числа наборов, на которых $\Delta_{X_i} y(x_1,...,x_m)$ принимает значение, равное единице.

В работе [5, с.306] о **вероятности истинности** функции алгебры логики впервые высказался Д.А. Поспелов в его основной теореме 42 вероятностной логики. В работе [6, с. 269] эта функция была названа **вероятностной функцией (ВФ)**, что через 10 лет более подробно было сформулировано в определении 9 [7, с.16]. Авторы [7], учитывая то, что событийная теория вероятностей и математическая логика (в случае исчисления высказываний) являются дистрибутивными структурами и следуя А.Н. Колмогорову [8, с.36], дали такое определение ВФ

$$P\{f(x_1,...,x_n)=1\},$$

где $f(x_1,...,x_n)$ – двоичная ФАЛ от n аргументов.

В дополнении [8, с.116] А.Н. Колмогоров доказал замечательную теорему. Названную им **законом «0 и 1»**. В случае, когда известные **предельные** вероятности с необходимостью равны нулю или единице (например, $P\{\Theta\}=0$ и $P\{\Omega\}=1$), то все формулы теории вероятностей для сложных высказываний $f(x_1,...,x_n)$, являющихся функциями независимых в совокупности событий $x_1,...,x_n$, становятся **правильными логическими формулами** при замене событий на соответствующие высказывания. На стр. 276 монографии [9] это замечательное явление объяснил д.ф-м.н. Н.В.Хованов.

В работе [10] авторы доказали теорему, позволившую впервые соединить дискретную математику с непрерывной для монотонных ФАЛ в виде формулы

$$\boldsymbol{P\{Д_{X_i} f(x_1,...,x_n)=1\} = \frac{\partial P\{f(x_1,...,x_n)=1\}}{\partial P\{x_i=1\}}}. \qquad (1)$$

Иначе говоря, вероятность истинности булевой разности по аргументу x_i равна частной производной вероятности истинности функции $f(x_1,...,x_n)$ по вероятности истинности её аргумента x_i. **Вероятностная интерпретация** математической логики позволила сформулировать в [11] новое понятие (термин) **логико-вероятностного исчисления (ЛВИ)** – как специального раздела дискретной математики, в котором установлены четкие правила замещения логических аргументов (x_i) в функциях алгебры логики $f(x_1,...,x_n)$ вероятностями их истинности $P\{x_i=1\}$ и логических операций арифметическими операциями не только для простых структур (последовательных, параллельных, древовидных), но и структур с повторным составом аргументов (сетевых, циклических и др.).

Первая публикация с определением ЛВИ на русском и английском языках состоялась в июне 2002 года, а более подробное изложение содержится в статье [13].

В работах [12,13] ЛВИ было тесно связано с его использованием в задачах надежности и безопасности.

В энциклопедическом Фонде России [11] это определение было сформулировано с претензией на его применение в математике вообще к решению любых задач, в которых требуется вычислить вероятность функции алгебры логики при заданных вероятностях истинности всех её аргументов, не переходя к полному перебору всех состояний ФАЛ (т.е. не переходя к СДНФ).

В ведении к учебнику [14, с.10] авторы пишут:

«... роль логического исчисления как средства открытия новых истин даже в области математики долгое время оставалась более чем скромной. Зато символический язык математической логики оказался на границе девятнадцатого и двадцатого веков

очень важным подспорьем в изучении логических основ математики, поскольку он позволяет избежать всякой неточности мысли, которая легко проскальзывает при использовании слов обычного языка, смысл которых дается не точным определением, а созданием привычки к принятому словоупотреблению».

Учитывая существующие непонимания разницы между логико-вероятностным исчислением и логико-вероятностными методами (ЛВМ); логикой вероятности (ЛВ) и вероятностной логикой (ВЛ); алгеброй логики (АЛ) и булевой алгеброй (БА), напомним весьма кратко суть этих различий.

Слово алгебра (по традиции) принято употреблять в двух разных смыслах [15, с.39]:

– как обозначение некоторой математической теории (например, алгебра логики) и

– как обозначение некоторого класса аксиоматических объектов (например, булева алгебра).

Различие между ЛВ и ВЛ подробно исследовано в работе [16].

Сходство ЛВИ и ЛВМ состоит в сходстве целей, а именно: как правильно следует заместить логические высказывания (proposition) отдельных аргументов вероятностями их истинности, а логические операции арифметическими операциями, чтобы получить вероятность истинности всей функции алгебры логики, т.е. вероятностную функцию.

Различие начинается с того, что в теории надежности (функции работоспособности системы – ФРС) или в теории безопасности (функции опасности системы – ФОС), являются формализованной записью безотказности или опасности вполне конкретной системы. А в математике вообще – это произвольные ФАЛ, пригодные к решению любых задач.

Говоря о произвольных ФАЛ, следует все же уточнить вопрос об их **правильности и истинности**. Логическая правильность – есть правильность только по форме (соответствие правилам формальной логики), но не по содержанию (т.е. по истинности). Нас интересует как раз не только правильность по форме, но и истинность по содержанию (как соответствие объективной действительности, предметам и явлениям объективного мира). Характерный пример отсутствия интереса к истинности ФАЛ содержится в работе [17, с.410], где рассматривается дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) вида

$$y = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee \bar{x}_1 x_4 \vee x_3 x_4, \qquad (2)$$

не имеющая соответствия объективной действительности.

В работе д.ф.-м.н. С.Г. Гиндикина дано определение 2.16: «Элементарная дизъюнкция называется правильной, если в нее каждая переменная входит не более одного раза (включая её вхождение под знаком отрицания)».

Это определение, сформулированное С.Г.Гиндикиным только для элементарных дизъюнкций, я распространяю на ДНФ, которые устанавливают выражение **всегда**

истинным. Если каждый член дизъюнкции является истинным, то и вся дизъюнкция в целом является истинной. Именно такой ДНФ, правильной по форме и истинностному содержанию, и может быть ФРС (ФОС).

А какую объективную действительность описывает ДНФ (2) трудно даже представить (где одновременно присутствует $\mathbf{x_1}$ и $\bar{\mathbf{x}}_1$)? Тем не менее следует поблагодарить активную участницу МАБР Анастасию Горопашную, взявшую на себя смелость научно разобраться с немонотонными ФАЛ, введенными в инженерный обиход в середине 80-х годов трудами А.С.Можаева [18, 19].

Учитывая отсутствие во всех моих работах (включая и [9]) примеров из области немонотонных структур, призванных для решения проблем безопасности, целесообразно рассмотреть Пример 2 из [19, с.39].

Исследуемая организационно-техническая система (ОТС) состоит их двух элементов $\mathbf{x_1}$ и $\mathbf{x_2}$. Событие $\mathbf{x_3}$ является некоторым поражающим фактором (форс-мажорным воздействием). Событие $\mathbf{x_4}$ и $\mathbf{x_5}$ представляют собой разрушения элементов $\mathbf{x_2}$ и $\mathbf{x_1}$ воздействием $\mathbf{x_3}$. Логико-вероятностная модель устойчивости ОТС с помощью системы логических уравнений

$$y_1 = x_1 \bar{y}_5,\ y_2 = x_2 \bar{y}_4,\ y_3 = x_3,\ y_4 = x_4 y_3,\ y_5 = x_5 y_3, \tag{3}$$

запишется в виде ФАЛ

$$y_c = y_1 \vee y_2 = x_1 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_5 \vee x_2 \bar{x}_3 \vee x_2 \bar{x}_4, \tag{4}$$

которая является немонотонной, повторной и правильной ДНФ (т.к. каждый член дизъюнкции является истинным).

В матричной записи это будет выглядеть так

$$y_c = \left|\begin{array}{c|c} x_1 & \begin{array}{c}\bar{x}_3\\ \bar{x}_5\end{array} \\ x_2 & \begin{array}{c}\bar{x}_3\\ \bar{x}_4\end{array}\end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc|c} \bar{x}_3 & & \begin{array}{c}x_1\\ x_2\end{array} \\ x_1 & \bar{x}_5 & \\ x_2 & \bar{x}_4 & \end{array}\right|. \tag{5}$$

Для перехода к ВФ воспользуемся алгоритмом разрезания [9, с.104] по аргументу $\mathbf{x_3}$. Вынося истинность $(\bar{x}_3 = 1)$ и ложность $(x_3 = 0)$ получим:

$$y_c = \left|\begin{array}{c|c} \bar{x}_3 & \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \\ x_3 & \begin{array}{c} x_1\,\bar{x}_5 \\ x_2\,\bar{x}_4 \end{array} \end{array}\right|. \qquad (6)$$

Заменяя логические аргументы в (6) вероятностями их истинности

$$P\{x_1 = 1\} = p_1; \quad P\{x_2 = 1\} = p_2; \quad P\{x_3 = 1\} = p_3; \quad P\{x_4 = 1\} = p_4; \quad P\{x_5 = 1\} = p_5,$$

получим:

$$P\{y_c = 1\} = p_c = q_3\left[1-(1-p_1)(1-p_2)\right] + p_3\left[1-(1-p_1q_5)(1-p_2q_4)\right] =$$

$$= q_3\,(p_1 + q_1\,p_2) + p_3\,(p_1q_5 + p_2q_4) - p_1\,p_2\,p_3\,q_4\,q_5\,, \qquad (7)$$

которая полностью совпадает с формулой (10) в [19, с.40], полученной каким-то комбинированным методом [18], неизвестным читателям.

Приняв за исходные вероятности

p_1 **= 0,85;** p_2 **= 0,95;** p_3 **= 0,7;** p_4 **= 0,4;** p_5 **= 0,5,** получим p_c **= 0,824675**, что соответствует результату А.С.Можаева 0,825.

Проверка значимости по третьему аргументу по правой части формулы (1)

$$\xi_3 = \frac{\partial P_c}{\partial p_3} = p_1q_5 + p_2q_4 - p_1 - q_1\,p_2 - p_1\,p_2\,q_4\,q_5 \qquad (8)$$

даёт $\xi_3 =$ 0,23975, что соответствует -0,240.

Самое интересное (в случае немонотонных ФАЛ) проверить формулу (1) по её левой части

$$P\left\{\Delta_{x_3}\,y(x_1,\ldots,x_4) = 1\right\}.$$

В соответствии с формулами (2.29) и (2.30) [9, с.35], запишем

$$\Delta_{x_3} y = \underbrace{\left| \begin{array}{l} x_1 \bar{x}_3 \\ x_1 \bar{x}_5 \\ x_2 \bar{x}_3 \\ x_2 \bar{x}_4 \end{array} \right|}_{A} \oplus \underbrace{\left| \begin{array}{l} x_1 x_3 \\ x_1 \bar{x}_5 \\ x_2 x_3 \\ x_2 \bar{x}_4 \end{array} \right|}_{B} =$$

$$= \underbrace{\left| \begin{array}{l} x_1 \bar{x}_3 \\ x_1 \bar{x}_5 \\ x_2 \bar{x}_3 \\ x_2 \bar{x}_4 \end{array} \right|}_{A} \underbrace{\left| \begin{array}{c|c|c|c} \bar{x}_1 & \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & x_5 & \bar{x}_3 & x_4 \end{array} \right|}_{\bar{B}} \vee \underbrace{\left| \begin{array}{c|c|c|c} \bar{x}_1 & \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \bar{x}_2 \\ x_3 & x_5 & x_3 & x_4 \end{array} \right|}_{\bar{A}} \underbrace{\left| \begin{array}{l} x_1 x_3 \\ x_1 \bar{x}_5 \\ x_2 x_3 \\ x_2 x_4 \end{array} \right|}_{B} =$$

$$= \left| \begin{array}{lll} x_1 & \bar{x}_2 & x_5 \\ x_1 & x_4 & x_5 \\ \bar{x}_1 & x_2 & x_4 \\ x_2 & x_4 & x_5 \end{array} \right| . \qquad (9)$$

Ортогонализуя ДНФ (9), получим

$$\Delta_{x_3} y(x_1, ..., x_4) = \left| \begin{array}{llll} x_1 & \bar{x}_2 & x_5 & \\ \bar{x}_1 & x_2 & x_4 & \\ x_1 & x_2 & x_4 & x_5 \end{array} \right| . \qquad (10)$$

$$\xi_3 = P\left\{ \Delta_{x_3} y(x_1, ..., x_4) = 1 \right\} = p_1 q_2 p_5 + q_1 p_2 p_4 + p_1 p_2 p_4 p_5 . \qquad (11)$$

При подстановке вероятностей получаем

$$\xi_3 = 0{,}23975 \quad , \qquad (12)$$

т.е. численное совпадение с результатом по формуле (8), но без «–».

Проверим также формулу (6.80) [9, с.164], записанную в стиле принятых обозначений:

$$\xi_i = P\left\{ y_{c1}^{(i)} = 1 \right\} - P\left\{ y_{c0}^{(i)} = 1 \right\}, \qquad (13)$$

где для $i=3$

$$\left\{ y_{c1}^{(3)}=1 \right\} = \left\{ \begin{vmatrix} x_1 & \begin{vmatrix} 1 \\ \bar{x}_5 \end{vmatrix} \\ x_2 & \begin{vmatrix} 1 \\ \bar{x}_4 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 1 \right\} = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix},$$

$$\left\{ y_{c0}^{(3)}=1 \right\} = \left\{ \begin{vmatrix} x_1 & \begin{vmatrix} 0 \\ \bar{x}_5 \end{vmatrix} \\ x_2 & \begin{vmatrix} 0 \\ \bar{x}_4 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 1 \right\} = \begin{vmatrix} x_1 & \bar{x}_5 \\ x_2 & \bar{x}_4 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \xi_3 &= [\,p_1 + p_2 - p_1 p_2\,] - [\,p_1 q_5 + p_2 q_4 - p_1 p_2 q_4 q_5\,] = \\ &= p_1 + p_2 - p_1 p_2 - p_1 q_5 - p_2 q_4 + p_1 p_2 q_4 q_5 . \end{aligned} \tag{14}$$

При подстановке чисел получаем тот же результат $0,23975$.

Проверим так же формулу (6.70) [9, с.162] для определения веса g_3. Подставив в выражение (11) 0,5 для всех вероятностей, получим $g_3 = 0,3125$

Этот пример свидетельствует о том, что все формулы в [9], строго выведенные для монотонных ФАЛ, годятся и для немонотонных ФАЛ. Но из-за того, что в монотонных ФАЛ логическая конъюнкция $\mathbf{\bar{A}B \equiv 0}$, формулы для немонотонных ФАЛ будут более пространными.

В связи с отсутствием других эталонных решенных примеров из области немонотонных структур, следует надеяться на широкое использование работы [19] в книгах, статьях и диссертациях многими авторами. Первый результат я уже обнаружил в книге [20, с.43–44], где этот пример адаптирован к оценке риска и эффективности при борьбе двух строительных фирм x_4 и x_5 за выгодный подряд на строительство при противодействии третьей строительной фирмы x_3.

Завершая статью, хочу признаться в свой оплошности, связанной в отсутствии ссылок на замечательную книгу Семена Григорьевича Гиндикина [15] в публикациях [7, 9, 12, 13]. В книге [9, с.256] я писал…, «где реликвиинам – чтоб в сущности вспомнить – нужны».

Эта «реликвия» является и учебником, и задачником (с ответами, с указаниям и решениями), и полезным приложением (основные логические операции и равносильности в алгебре логики). Единственное замечание хочу отметить в связи с названием §10. «Элементы вероятностной логики». В этом параграфе дается определение **вероятностной**

булевой алгебры, но нигде не встречаются слова «**вероятностная логика**». Вероятностная логика – это определение алгебры многозначной логики вместе с вероятностью. А так как в §10 рассматривается только двузначная булева алгебра, что в соответствии с моими работами [9, 11, 12, 13] этот параграф следовало бы именовать «Элементы **логики вероятностей**».

В связи с появлением работ [20, 21, 22] в названии которых сознательно подчеркивается логико-вероятностный подход (ЛВП), следует высказать мое современное понимание разницы между ЛВП и логико-вероятностным анализом (ЛВА). Подход – это совокупность способов, приемов в рассмотрении чего-либо, а анализ – это метод научного исследования. Для ЛВП достаточно иметь дело с формальной логикой (причем любой) и вероятностью (также произвольной). В ЛВА используются логика Буля и только вероятности, напрямую связанные с частотой появления того или иного исхода.

Так, например, в работе [21] при исследовании не в области НЖБ (надежности, живучести, безопасности), а в области искусственного интеллекта (ИИ) сделан упор на логику Н. Нильсона и вероятности на пропозициональных формулах.

Необходимость отделить «мух от котлет» заставляет разобраться с разными аббревиатурами на базе ЛВ. Широко известнее публикации, программные комплексы и методы **деревьев** отказов, **деревьев** событий, **деревьев** неисправностей хотя и применяют логические символы и логические операции, но при замещении их вероятностями не испытывают никаких затруднений, т.к. имеют дело с **бесповторными ФАЛ**. Как только функция работоспособности или опасности будет записана в повторной ДНФ, то происходит вынужденная остановка: реальные элементы присутствуют в системе в единственном числе, в ФАЛ они встречаются несколько раз. Возникает вопрос: что делать? Чаще всего такие «неудобные» элементы признаются несущественными или «отсутствующими», и дело сводится опять к деревьям, т.е. простым структурам.

Эти методы нельзя не только отождествлять с ЛВИ (ЛВМ), и называть их этими словами просто за сходство символов алгебры логики и их обозначений на деревьях отказов.

В связи с определенной новизной задач с немонотонными ФАЛ и большой их значимостью при решении проблем живучести, безопасности, устойчивости, эффективности и др., необходимо напомнить математическое и физическое определения **немонотонности** в теории логико-вероятностного анализа.

Функция $f(x_1,...,x_n)$ называется **немонотонной**, если существует такая пара наборов α и β, что $\alpha \prec \beta$, а $f(\alpha) > f(\beta)$.

Немонотонны следующие ФАЛ:

1. $\bar{x}$, т.к. при α=(0), β=(1) имеем $\alpha \prec \beta$, но $\overline{\alpha} \succ \overline{\beta}$;
2. $x \sim y$, т.к. при α=(0; 0), β=(1; 0) имеем $\alpha \prec \beta$, а эквивалентность x и y существует только при наборах (1; 1) и (0; 0);
3. $x \to y$, т.к. при α=(0; 0), β=(1; 0) имеем $\alpha \prec \beta$, но $(0 \to 0) = 1$, а $(1 \to 1) = 0$.

Монотонными являются те и только те функции, которые являются константами $[f(0,...,0) = 0, f(1,...,1) = 1]$ или допускают представление к ДНФ и КНФ, не содержащих отрицаний.

Физическое представление немонотонности в работе [19, с32] дается следующими словами:

…«если модель надежности ***немонотонная****, то в ней обязательно должен быть хотя бы один элемент x_i, увеличение вероятности p_i безотказности работы которого обязательно уменьшает вероятность P_c безотказной работы всего объекта, приводит к ухудшению надежности исследуемой системы в целом».*

Действительно, если увеличить p_3 с 0,7 до 0,9, то P_c=0,776725<0,824675.

Для монотонных ФАЛ при ВФ, записанной однопараметрическим полиномом, при замене $p = 1$ имеем P_c=1.

Для немонотонной ФАЛ (4) после замены $q_i = 1 - p_i$ получим многопараметрический полином:

$$P_c = p_1 + p_2 - p_1 p_2 - p_1 p_3 p_5 - p_2 p_3 p_4 + p_1 p_2 p_3 p_4 + p_1 p_2 p_3 p_5 - p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 . \qquad (15)$$

При равенстве всех $p_i = p$, имеем

$$P_c = 2p - p^2 - 2p^3 + 2p^4 - p^5 . \qquad (16)$$

При $p = 1$ имеем P_c=0.

При переходе к однопараметрическому полиному через q получим

$$P_c = 3q - 5q^2 + 4q^3 - 3q^4 + q^5 , \qquad (17)$$

что при $q = 1$ имеем P_c=0.

Все формулы и свойства в ЛВА [6, 7, 9] были получены на основании доказанной теоремы1 [10]:

«Для всех монотонных ФАЛ множество наборов, на которых нулевая функция по аргументу x_i принимает значение, равное единице, есть подмножество множества наборов, на которых единичная функция по этому же аргументу x_i равна единице, т.е.

$$\{(X) : y_0^{(i)}(X) = 1\} \subset \{(X) : y_1^{(i)}(X) = 1\} \text{».} \qquad (18)$$

Здесь $X = (x_1,...,x_n), y_0^{(i)}(x_1,...,0,...,x_n), y_1^{(i)}(x_1,...,1,...,x_n)$.

Используя $y_{c0}^{(3)} = 1$ и $y_{c1}^{(3)} = 1$, получим число наборов, на которых $y_{c0}^{(3)} = 1$ равно 7, а на $y_{c1}^{(3)} = 1$ будет 12, что не противоречит формуле (18).

Требуется повторить доказательство этой теоремы и для немонотонных ФАЛ. Правда, может быть ничего не требуется и доказывать. Воспользуемся основной операцией, которую можно произвести над функциями алгебры логики, - **суперпозицией** [15, с33].

Как известно, элементарная суперпозиция может быть получена **переименованием** какой-либо из переменных x_i или **подстановкой** некоторой функции вместо какого-то аргумента x_i.

Переименуем в функции (4) аргументы $\bar{x}_3, \bar{x}_4$ и $\bar{x}_5$ следующим образом:

$$\bar{x}_3 = z_3, \bar{x}_4 = z_4, \bar{x}_5 = z_5. \quad (19)$$

Подставив в (4) переименованные переменные, получим

$$y_c = y_1 \vee y_2 = x_1 z_3 \vee x_1 z_5 \vee x_2 z_3 \vee x_2 z_4, \quad (20)$$

которая является уже монотонной ФАЛ.

Переходя к ВФ тем же способом, получим

$$P_c = p_3(p_1 + q_1 p_2) + q_3(p_1 p_5 + p_2 p_4) - p_1 p_2 q_3 p_4 p_5. \quad (21)$$

Возвращаясь к первичным аргументам через ВФ $p_3 = P(\bar{x}_3 = 1) = q_3, p_4 = P(\bar{x}_4 = 1) = q_4, p_5 = P(\bar{x}_5 = 1) = q_5$, получим выражение (7).

Все сказанное выше о возможности вычисления ВФ немонотонных структур с помощью формул, разработанных для монотонных ФАЛ, нисколько не умаляет достоинств технологии **автоматизированного структурно-логического моделирования** НЖБ [23].

Следует согласиться с Александром Сергеевичем, что … «другими известными **монотонными технологиями** и аттестованными программными средствами аналогичного назначения эти задачи в настоящее время не решаются».

Действительно, расчет показателей структурных свойств устойчивости (надежности, стойкости, живучести, безопасности), эффективности и риска функционирования сложных и высокоразмерных систем опасных производственных объектов (ОПО) и объектов использования атомной энергии (ОИАЭ), строго определенных ГОСТ и руководящими документами, позволило поднять на новый уровень теорию и методологию логико-вероятностного анализа систем.

Литература

1. Математический энциклопедический словарь.// М.: Советская энциклопедия, 1988.
2. Кондаков Н.И. Логический словарь.// Изд. «Наука», М., 1971.
3. Беркли Э. Символическая логика и разумные машины.//М., 1961.
4. Ryabinin I. Reliability of engineering systems: Principles and analysis.// M.: Mir, 1976.
5. Поспелов Д.А. Логические методы анализа и синтеза схем.// Изд. «Энергия», М.-Л., 1964.
6. Рябинин И.А. Основы теории и расчета надежности судовых электроэнергетических систем.// Изд. «Судостроение», Л., 2-е издание, 1971.
7. Рябинин И.А., Черкесов Г.Н. Логико-вероятностные методы исследования надежности структурно-сложных систем.// Изд. «Радио и связь», М., 1981.
8. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей.//Изд. «Наука», М., 2-е издание, 1974.
9. Рябинин И.А. Надежность и безопасность структурно-сложных систем.// Изд. С.–Петербургского Университета, СПб, 2-е издание, 2007.
10. Рябинин И.А., Парфенов Ю.М. Определение «веса» и «значимости» отдельных элементов при оценке надежности сложной системы.// Известия АН СССР, Энергетика и транспорт, № 6, 1978, с.22-32.
11. Рябинин И.А. Логико-вероятностное исчисление.// Энциклопедический Фонд России, mre@russika.ru, термин, 2005.
12. Рябинин И.А. Вероятностная логика и логико-вероятностное исчисление (Probabilistic Logoc and The Logical–Probabilistic calculus).// Моделирование и анализ безопасности и риска в сложных системах. Труды международной научной школы МАБР–2002, с. 19-27, Санкт-Петербург, 2-5 июля, 2002 г. / СПб.: «Бизнес-Пресса», 2002.
13. Рябинин И.А. Логико-вероятностное исчисление как аппарат исследования надежности и безопасности структурно-сложных систем.// Автоматика и телемеханика, №7, 2003, с.178-186.
14. Колмогоров А.Н., Драгалин А.Г. Математическая логика.// Изд. 3-е, стереотипное.– М.: Ком. Книга, 2006, 240с. (Классический университетский учебник).
15. Гиндикин С.Г. Алгебра логики в задачах. //Изд-во «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, М: 1972, 288с.
16. Рябинин И.А. Феномен логико-вероятностного исчисления. // International Scientific School. Modeling and Analysis of Safety and Risk in Complex Systems, MA SR-2005, june 28-july, 2005, S.-Petersburg, Russia, p.422, pp.16-26.
17. Горопашная А.В. Адаптация логико-вероятностных методов оценки веса, зависимости, вклада, ущерба и активности элементов для немонотонных логических функций. //International Scientific School. Modeling and Analysis of Safety and Risk in Complex Systems, MA SR-2007, September 4-8, 2007, S.-Petersburg, Russia, p.540, pp.409-412.
18. Можаев А.С. Общий логико-вероятностный метод анализа надежности структурно-сложных систем. //Л.: ВМА, учебное пособие, 1988.
19. Можаев А.С. Современное состояние и некоторые направления развития логико-вероятностных методов анализа систем. //СПб.: Ипмаш. РАН, 1994, «Теория и информационная технология моделирования безопасности сложных систем», Выпуск 1 под редакцией И.А. Рябинина, Препринт 101, с.23-53.
20. Соложенцев Е.Д. Управление риском и эффективностью в экономике. **Логико-вероятностный подход**. //СПб.: 2009, 242с.
21. Тулупьев А.Л., Николенко С.И., Сироткин А.В. Байесовские сети: **Логико-вероятностный подход**. //СПб.: Наука, 2006, 607с.

22. Панин О.А. Анализ безопасности интегрированных систем защиты: **Логико-вероятностный подход**. //Журнал «Специальная техника», №5, 2004, htt://www.st.ess.ru /5-2004/.

23. Можаев А.С. Технология автоматизированного структурно-логического моделирования надежности, живучести, безопасности, эффективности и риска функционирования систем. // В книге «Фундаментальные проблемы безопасности». Сб. статей / Ф94 Вычислительный центр им А.А. Дородницына РАН.-М.: Вузовская книга, 2008.- 568с: с. 174-20