

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОРТОГОНАЛЬНОГО РАСКРОЯ-УПАКОВКИ НА ОСНОВЕ КОНСТРУКТИВНЫХ И НЕЙРОСЕТЕВЫХ ПОДХОДОВ

Оксана Валерьевна Корчевская, к.т.н, доцент

Представлена постановка задачи n -мерной упаковки ($n = 1, 2, 3$). Приведено описание метода плоскостей для решения задачи трёхмерной упаковки. Приведена композиция этого метода для задачи двухмерной упаковки. Для определения нижних границ решения задач раскроя-упаковки применён аппарат нейронных сетей. Разработаны высокоэффективные алгоритмы решения задач двух и трёхмерного раскроя-упаковки, позволяющие быстро строить карты раскроя с коэффициентом раскроя, в среднем, от 85%. Достоверность полученных результатов диссертации подтверждается сравнительным анализом существующих подходов к решению поставленной задачи и результатами экспериментальных данных.

Ключевые слова: задачи раскроя упаковки, оптимизационные задачи, NP-трудные задачи комбинаторной оптимизации.

Введение

Для современного периода производства характерно использование технологических процессов и методов, минимизирующих потери, что особенно актуально на данном этапе развития рыночных отношений в России.

В один из классов задач комбинаторной оптимизации, достаточно часто встречающийся в реальных производственных условиях, выделены задачи раскроя и упаковки. Их объединяет необходимость установления определённого соответствия между двумя группами, как правило, больших и малых объектов.

Задачи раскроя-упаковки имеют различное прикладное толкование. Наиболее часто встречающимися задачами являются ортогональная упаковка и раскрой, где в качестве малых объектов выступают заготовки прямоугольной формы – прямоугольники или ящики различных размеров, а в качестве крупных – материал, поступающий в виде полос, рулонов, прямоугольных листов, стержней или контейнеров различной вместимости.



О.В. Корчевская

Эти задачи представляют собой проблему как теоретического, так и практического плана, которая в течение последних десятилетий привлекает внимание многих исследователей и производителей. Причина растущего интереса к задачам раскроя-упаковки состоит в широкой применимости результатов, их разнообразии и сложности.

Задачи раскроя-упаковки относят к классу NP-трудных задач комбинаторной оптимизации. Это означает, что не существует алгоритмов полиномиальной сложности для поиска оптимального решения, точный результат в общем случае может быть получен только за экспоненциальное время.

В большинстве работ в области раскроя-упаковки рассмотрены вопросы решения задач прямоугольного раскроя. Для сравнения эффективности различных методов на однотипном классе задач определяют коэффициент раскроя. Для задачи двухмерной упаковки – это процентное отношение суммарной площади всех размещённых предметов к площади затраченного материала. Однако важным вопросом при выборе

того или иного метода является время решения, которое в виду NP-полноты и большой размерности задач, может быть значительным.

Для решения задач трёхмерной упаковки используют, в основном, эвристические подходы. Большинство из них базируется на декомпозиции исходной задачи и сведению ее к задачам меньшей размерности путём разбиения на слои и заполнением каждого слоя какой-либо эвристикой. Некоторые алгоритмы используют двухфазные процедуры. На первой фазе происходит упаковка коробок в слои, на второй – процесс обмена коробок внутри слоя для улучшения локального решения. Разбиение параллелепипеда на блоки (слои), с одной стороны, облегчает решение, однако это не гарантирует получение плотной упаковки.

При решении реальных трёхмерных задач раскроя-упаковки и повышения грузовой стабильности необходимо учитывать объединение пустот, которые образуются как внутри слоя, так и между ними. Кроме того, время решения задач трёхмерной упаковки, за счёт улучшения локального решения внутри каждого выделенного слоя последовательными методами приводит к большим временным затратам.

Постановка задачи n -мерной упаковки ($n = 1, 2, 3$)

Входная информация для задач параллелепипедной упаковки в общем виде может быть задана в следующем виде:

$$\langle W, L, H, k, u, M, w, l, h, m, b, \varepsilon, \gamma, g, V \rangle, \quad (1)$$

где $W = (W_1, W_2, \dots, W_k)$ – ширина, $L = (L_1, L_2, \dots, L_k)$ – длина, $H = (H_1, H_2, \dots, H_k)$ – высота параллелепипедов; k – количество типов параллелепипедов; $u = (u_1, u_2, \dots, u_k)$ – количество параллелепипедов определённого вида; $M = (M_1, M_2, \dots, M_k)$ – предельно допустимая масса параллелепипедов; $w = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ – ширина, $l = (l_1, l_2, \dots, l_m)$ – длина, $h = (h_1, h_2, \dots, h_m)$ – высота коробок; m – количество типов коробок; $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ – количество коробок определённого типа; ε – признак направления: $\varepsilon = 1$, если объекты можно поворачивать, $\varepsilon = 0$ в противном случае; γ – признак гильотинности: $\gamma = 1$, если задачу решают с учётом признака гильотинности, и полагают равным 0 в противном случае; $g = (g_1, g_2, \dots, g_m)$ – масса объектов; V – набор технологических ограничений;

$c = \sum_{j=1}^k u_j$ – общее количество параллелепипедов; $n = \sum_{i=1}^m b_i$ – общее количество коробок.

Выходной информацией (в общем виде) является карта раскроя, представленная в виде следующего набора:

$$\langle \Pi, X, Y, Z, P, E \rangle, \quad (2)$$

где Π – преобразованный список коробок; $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ – векторы минимальных координат коробок; P – множество исходных параллелепипедов, в которые упакованы некоторые коробки; $E = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ – признаки поворота, значение которых может принимать одно из 6 значений.

Зададим KPA – коэффициент раскроя (процентное отношение суммарного объёма всех упакованных коробок к занятому объёму параллелепипеда), а τ – время решения задачи.

Математическую модель для задач ортогональной упаковки коробок в параллелепипед с неограниченной длиной можно представить в следующем виде:

$$\langle \Pi, X, Y, Z, E \rangle = \Omega (\langle W, H, M, w, l, h, m, b, \varepsilon, \gamma, g, V \rangle). \quad (3)$$

$$L \rightarrow \min \tau$$

$$\rightarrow \min$$

Необходимо найти такое отображение Ω , которое преобразует входные данные в выходные, причём соблюдаются следующие условия:

- ортогональное размещение коробок в параллелепипеде;
- неперекрывание коробок между собой;
- неперекрывание коробками граней параллелепипедов.

Кроме того, требуется за минимальное время, учитывая ограничения по массе и технологические ограничения, минимизировать длину занятой части параллелепипеда.

Для задач с фиксированными сторонами параллелепипедов, необходимо найти их минимальное количество

$$\langle P, X, Y, Z, P, E \rangle = \Omega (\langle W, L, H, k, u, M, w, l, h, m, b, \varepsilon, \gamma, g, V \rangle), \quad (4)$$

$$\sum_i P_i \rightarrow \min$$

$$KPA \rightarrow 100\% \tau$$

$$\rightarrow \min$$

Таким образом, требуется на множестве допустимых упаковок за минимальное время и с максимальным коэффициентом раскроя, учитывая ограничения по массе и технологические ограничения, минимизировать количество занятых параллелепипедов.

Метод плоскостей для решения трёхмерных задач раскроя-упаковки

Особенностями метода являются:

- непосредственное решение задач, а не сведение их к задачам меньшей размерности;
- использование как слойной, так и бесслойной стратегий; - заполнение по, так называемым, приоритетным осям;
- анализ пустот и рассмотрение способов их объединения;
- допускается использование не одного, а нескольких параллелепипедов.

Слойная стратегия. Метод плоскостей, как и большинство методов, основан на понятии пустого места – области параллелепипеда без коробок, упакованных внутри. Первая коробка определяет слой. Поэтому, алгоритм оценивает все виды коробок и их ориентации, чтобы открыть новый слой. Допустим, что выбрано приоритетное заполнение по оси Z . Как только первая коробка помещена в параллелепипед, она автоматически формирует слой, который будет заполняться по высоте. В зависимости от размеров коробки и параллелепипеда все пространство разбивается на параллелепипедные области.

Для описания размеров пустых областей используются координаты: x_1, y_1, y_2, z_1, z_2 , а также флаг: 0 – область не заполнена; 1 – область полностью заполнена; -1 – игнорировать при заполнении данного слоя; -2 – игнорировать полностью. Запоминать значение координаты x_2 не целесообразно, т.к. для случая слойной стратегии она определяется длиной слоя, для бесслойной – это длина самого параллелепипеда.

Существует восемь случаев размещения коробки в пустую область. В каждом случае вновь образованные области пустот будут разбиваться на одну, две, три, ни одной.

Кроме сохранения файла с координатами пустых областей, динамически создается файл коробок, в котором содержится следующая информация:

– координаты коробок $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ относительно параллелепипеда;

- координаты коробок $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ относительно параллелепипеда;

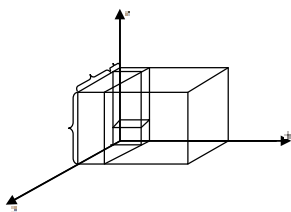


Рис. 1. Разбиения на области, определяемые первой коробкой

- номер коробки из первоначального приоритетного списка; - номер слоя, в котором размещена коробка.

Когда алгоритм отмечает новое место, как «временно отключено», подключается процедура, которая пробует увеличить размер этого места, соединяя его со смежными, которые также были «временно отключены», либо заполнены не полностью. Предусмотрено четырнадцать вариантов, когда пустота может быть объединена с одной или двумя соседними.

С целью сокращения полного перебора вариантов решений в режим оптимизации включены следующие параметры:

- метод сортировки: без сортировки; по невозрастанию объема; по невозрастанию ширины; по невозрастанию массы; по невозрастанию удельного веса;
- шесть способов поворота коробок;
- шесть вариантов заполнения по приоритетным направлениям;
- использование как слоистой, так и бесслоистой стратегий.

После завершения цикла оптимизации будет выведена карта раскроя с максимальным значением коэффициента раскроя.

Бесслоистая стратегия. Процедура с использованием метода без формирования слоёв отличается от рассмотренной выше тем, что толщина слоя принимается равной длине параллелепипеда, т.е. отсутствует блок, отвечающий за формирование слоёв.

Приведённый выше **метод плоскостей** с некоторыми доработками реализован и для решения **задач двухмерной упаковки**.

Для оценки эффективности решения задач двух и трёхмерного ортогонального раскроя-упаковки методом плоскостей проведена серия расчётов на основе методики Г. Вешера и безотходных примеров Е. Норпер.

За основу разбиения на различные классы предметов для задачи трёхмерной упаковки взято: нижнее ограничение длины предметов $-v_1$, верхнее ограничение длины предметов v_2 ($v_1 \cdot W \leq l_i \leq v_2 \cdot W$, $i=1, \dots, n$); нижнее ограничение ширины предметов w_1 , верхнее ограничение ширины предметов w_2 ($w_1 \cdot W \leq w_i \leq w_2 \cdot W$, $i=1, \dots, n$); нижнее ограничение высоты предметов η_1 , верхнее ограничение высоты предметов η_2 ($\eta_1 \cdot W \leq \eta_i \leq \eta_2 \cdot W$, $i=1, \dots, n$).

Серия №1. Целью данного эксперимента была проверка необходимости включения в оптимизацию разбиение на слои для разных групп предметов. Выполнены численные эксперименты, параметрами которых являлись: высота параллелепипеда $H = 150$, его ширина $W = 100$; количество предметов $n = 50, 100, 200, 250, 500, 1000$. Предметы были отсортированы по классам: «мелкие» ($v_1 = 0.1, v_2 = 0.2; w_1 = 0.1, w_2 = 0.2; \eta_1 = 0.2, \eta_2 = 0.25$), «средние» ($v_1 = 0.2, v_2 = 0.4; w_1 = 0.2, w_2 = 0.4; \eta_1 = 0.2, \eta_2 = 0.25$) и «разнородные» ($v_1 = 0.1, v_2 = 0.3; w_1 = 0.1, w_2 = 0.2; \eta_1 = 0.2, \eta_2 = 0.25$). Для каждого класса задач было сгенерировано по 10 тестовых примеров, усредненные значения коэффициентов раскроя приведены на рис. 2.

Таким образом, при тестировании метода плоскостей для задач трёхмерных упаковок на разной группе предметов было выявлено необходимость совместного использования как процедуры формирования слоя, так и бесслоистой процедуры. Это позволяет формировать более плотную упаковку и, следовательно, повышает грузовую стабильность при решении реальных задач. Метод плоскостей показывает лучшие результаты при большом количестве и, в основном, «разнородных» предметов. Время

решения задачи на ПК (Celeron (R) CPU 3.2 GHz, 1Гб ОЗУ) от нескольких секунд до двух минут (для $n = 1000$).

Серия №2.

Выполнены численные эксперименты для анализа различных методов решения задач трёхмерной упаковки, параметрами которой являлись:

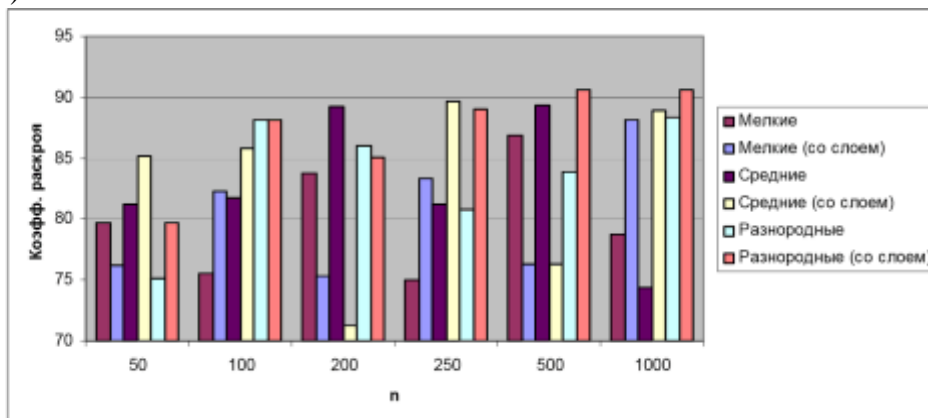


Рис.2. Усредненные значения коэффициентов раскроя для задач трехмерной упаковки (на основе метода плоскостей)

длина параллелепипеда $L =$

150, его ширина $W = 100$; количество предметов $n = 50, 100, 200, 250$.

Предметы были отсортированы по классам:

«мелкие» ($v_1 = 0.1, v_2 = 0.2; w_1 = 0.1, w_2 = 0.2; \eta_1 = 0.1, \eta_2 = 0.25$), «средние»

($v_1 = 0.2, v_2 = 0.1; w_1 = 0.2, w_2 = 0.25; \eta_1 = 0.2, \eta_2 = 0.25$) и «разнородные»

($v_1 = 0.1, v_2 = 0.25; w_1 = 0.1, w_2 = 0.2; \eta_1 = 0.2, \eta_2 = 0.25$).

Значения коэффициентов раскроя приведены в табл. 1.

Таблица 1

Значения коэффициентов раскроя для задач параллелепipedной упаковки при решении различных классов задач

Методы	Мелкие предметы, %	Средние предметы, %	Разнородные предметы, %
<i>MBA</i> - Метод на основе бесслыного алгоритма	<u>77</u>	79	80
<i>EABD</i> - «Наивный» эволюционный алгоритм	74	78	76
<i>GABD</i> - Классический генетический алгоритм	76	77	75
<i>SABD</i> - Метод случайных перестановок	73	74	76
Метод плоскостей	76	<u>82</u>	<u>83</u>

Таким образом, метод плоскостей показывает лучшие результаты в классе «средних» и «разнородных» предметов.

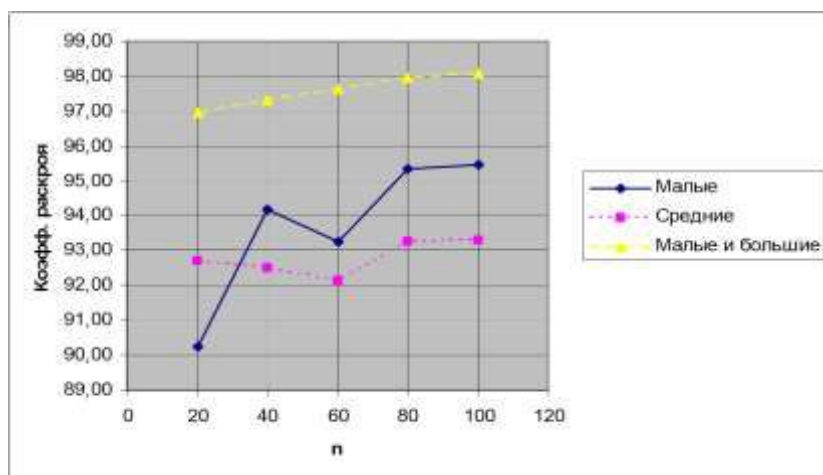
Серия № 3. Метод плоскостей для решения задач двухмерной упаковки был протестированы с помощью безотходных примеров Е.Норрег на определение признака реставрации – способности метода восстанавливать карту раскроя по приоритетному списку. В тестовых примерах в качестве входной информации, кроме размеров прямоугольников и ширины полосы, подавался оптимальный (Опт.) и измененный (Изм.) список (см. табл. 2). В изменённом приоритетном списке случайным образом изменялся порядок следования предметов.

Таблица 2

Результаты решения безотходных задач Е. Норрег серии N и C

Задачи	n	Среднее значение КРА, %		Задачи	n	Среднее значение КРА, %	
		Опт.	Изм.			Опт.	Изм.
N1a – N1e	17	100	92.6	C1	16,17	100	96.0
N2a – N2e	25	100	92.7	C2	25	100	95.4
N3a – N3e	29	100	94.1	C3	28,29	100	93.8
N4a – N4e	49	100	94.0	C4	49	100	95.2
N5a – N5e	73	100	94.9	C5	73	100	97.1
N6a – N6e	97	100	96.7	C6	97	100	96.8
N7a – N7e	197	100	97.0	C7	196,197	100	96.6

Выявлено, что метод плоскостей обладает свойством «реставрации», с его помощью по известному оптимальному приоритетному списку формируется оптимальная безотходная упаковка. В реальных условиях, в связи с отсутствием в



методе схем полного перебора, при подаче изменённого оптимального списка, он позволяет получить упаковку с коэффициентом раскроя более 90%.

Серия № 4. Целью данного эксперимента было сравнение метода плоскостей с алгоритмом рандомизированного динамического перебора (DSR) для решения задач прямоугольной упаковки. Были сгенерированы

следующие

Рис. 3. Усредненные значения коэффициентов раскроя для задач класса задач для $W= 225$: «малых» предметов, полученные методом плоскостей «малые» предметы ($v_1 = 0.05, v_2 = 0.1; w_1 = 0.1, w_2 = 0.15$), «средние» предметы ($v_1 = 0.25, v_2 = 0.35; w_1 = 0.35, w_2 = 0.45$) и «малых и больших» предметы ($v_1 = 0.05, v_2 = 0.25; w_1 = 0.05, w_2 = 0.95$). Для каждого класса задач сгенерировано по 10 тестовых примеров. Критерием оценок также выступал коэффициент раскроя КРА, значения которого приведены на рис. 3.

Согласно данным, приведённым А.Ф. Валеевой для такого же класса задач, значения коэффициентов раскроя, полученных методом DSR, для класса «малых» предметов составляет 92 – 96%; «средних» - 98 – 100%; «малых и больших» - 93 – 95%. Таким образом, метод плоскостей показывает сравнимые результаты для класса «малых» и более лучшие для класса «разнородных» («малых и больших») предметов.

Использование сигмоидных нейронных сетей для определения нижних границ решения задач раскроя-упаковки

На основе тестовых данных, полученных с помощью безотходных двух и трёхмерных алгоритмов, были проведены численные эксперименты по обучению

сигмоидных нейронных сетей в нейроимитаторе NeuroPro 0.25. Структура нейросети: три слоя, каждый из которых содержал по десять нейронов.

Количество прямоугольников/коробок изменялось в диапазоне от 20 до 100, количество примеров для каждой обучающей выборки было сгенерировано в два раза больше количества объектов. Было произведено обучение нейронных сетей, при этом количество правильно решённых примеров составило 100%. В табл. 3 приведены результаты тестирования для задач двухмерной упаковки.

Была исследована зависимость разброса длины и ширины в обучающих примерах на значение ошибки. Выявлено, что при подборе обучающей выборки следует установить фиксированным значение одной из граней полосы на основе известной, например, W , а другое выбрать в диапазоне: $L_{min} = \Sigma S_i / W$; $L_{max} = L_{min} + C_{рзнач}(l_i)$, где ΣS_i – суммарная площадь всех прямоугольников, $C_{рзнач}(l_i)$ – среднее значение длин прямоугольников.

Как обучающие, так и тестовые примеры были сгенерированы на основе безотходных упаковок. Однако известно, что изменение порядка следования прямоугольников приводит, как правило, к получению другой карты раскроя и, соответственно, длины занятой части полосы. В связи с этим для тестовой выборки случайным образом был изменён порядок следования прямоугольников. Было сгенерировано по 10 тестовых примеров для случая $n = 20$. Среднее значение ошибки составило 4.4 %.

Таблица 3

Тестовые данные для задач двухмерной упаковки и полученные значения ошибок

№	Кол-во прямоугольников	Диапазон изменения L	Диапазон изменения W	Средняя ошибка, %	Средняя максимальная ошибка, %
1.	20	100-200	100-200	46.3	127.3
2.	20	100-300	100-300	50.5	127.9
3.	20	278-288	278-288	12.1	32.3
4.	10	100-120	100	6.3	16.1
5.	10	400-440	400	14.9	29.9
6.	40	400-440	400	14.0	32.8
7.	100	400-440	400	13.4	30.5

При обучении сигмоидных нейронных сетей на основе трёхмерных безотходных примеров наблюдались такие же тенденции, что и для задач двухмерных упаковок.

Выводы

Формализована постановка задач раскроя-упаковки и предложены методы их решения. Конструктивный метод плоскостей позволяет существенно повысить коэффициент раскроя и снизить время решения за счёт использования эвристических подходов. Метод плоскостей обладает свойством реставрации и позволяет получить решение для задач большой размерности за приемлемое время.

Для определения нижних границ решения задач раскроя-упаковки впервые применён аппарат нейронных сетей. На основании разработанных безотходных алгоритмов обучены сигмоидные нейронные сети. Результаты тестовых выборок дают конечную оценку с хорошей точностью.

Литература

1. *Dyckhoff H.* Cutting and Packing / H. Dyckhoff, G. Scheithauer, J. Terno // Annotated Bibliographies in Combinatorial Optimization, edited by M.Dell'Amico, F. Maffioli and S.Martello. – John Wiley&Sons, 1997. P. 393-412.
2. *Dyckhoff H.* A typology of cutting and packing problems / H. Dyckhoff // European Journal of Operational research. 1990. Vol. 44. P. 145-159.
3. *Мухачева А.С.* Задачи двухмерной упаковки в контейнеры: новые подходы к разработке методов локального поиска оптимума / А.С. Мухачева, А.Ф. Валеева, В.М. Картак. – М.: МАИ, 2004. – 193 с.
4. *Валеева А.Ф.* Конструктивные методы решения задач ортогональной упаковки и раскроя : автореф. дис. ... д – р. тех. наук: 28.09.2006 / А.Ф. Валеева. – Уфа, 2006. – 32 с.
5. *Moura A.* A grasp approach to the container-loading problem / A. Moura, J.F. Oliveira // IEEE Computer Society. July/August. 2005. P. 50-57
6. *Pisinger D.* Heuristics for the container loading problem / D. Pisinger // European Journal of Operational Research. 2002. № 141. P. 382-392.
7. *Корчевская О.В.* Получение нижних границ для задач двух и трехмерной ортогональной упаковки с помощью нейронных сетей, используя алгоритм безотходной упаковки / О.В. Корчевская, Л.А. Жуков // Электронный журнал «Исследовано в России». 2008. № 62. С. 685-694, URL: <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2008/062.pdf>
8. *Жуков Л.А.* Метод плоскостей: численный эксперимент для задач двух и трехмерной ортогональной упаковки / Л.А.Жуков, О.В. Корчевская // Информационные технологии. 2008. № 11. С. 41-45.