УДК 519.8

С. О. Мащенко, *д.ф.-м.н, профессор,*
Аль-Саммарраи Мохаммед Саад Ибрахим, *аспирант*
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко,
просп. Акад. Глушкова, 4Д, г. Киев, 03127, Украина
msomail@yandex.ua

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА С НЕЧЕТКИМ МНОЖЕСТВОМ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ

Рассматривается транспортная задача, для которой лицо, принимающее решение, может указать нечеткое множество путей сообщения между поставщиками и потребителями продукции. Показано, что множество допустимых перевозок будет нечетким множеством типа 2 (нечеткое множество, функция принадлежности которого принимает нечеткие значения), построена его функция принадлежности. Предложена трехкритериальная задача поиска рационального решения. Рассмотрен подход к получению приближенного решения этой задачи.

Ключевые слова: *транспортная задача, нечеткое множество типа 2, принятие решений.*

Введение. Классическая формулировка транспортной задачи (ТЗ) линейного программирования иногда не вполне удовлетворяет практическим потребностям логистики, поскольку не учитывает нечеткий характер основных параметров модели (спрос, предложение, стоимость транспортировки, множества поставщиков и потребителей, а также пути сообщения между ними). Учет нечеткой природы задачи приводит к необходимости модификации ее формулировки и методов решения. В [1] описан метод решения ТЗ, в котором неопределенность спроса отображается прямоугольными нечеткими числами. Для ее решения используется алгоритм Нелдера-Мида. В [2] рассмотрен обобщенный метод решения нечеткой ТЗ с учетом важности потребителей. В [3] предлагается метод решения ТЗ с нечеткими множествами поставщиков и потребителей. Метод основан на использовании операции пересечения нечеткого множества нечетких множеств. В работе [4] предлагается модель, в которой параметры спроса, предложения и цены перевозок являются нечеткими.

Цель. В указанных выше известных постановках ТЗ нечеткость проявляется как в описании целевой функции, так и в описании спроса и предложения, но не касается множества путей сообщения. Целью настоящей работы будет исследование ТЗ с нечетким множеством путей сообщения.

Постановка задачи. Пусть $I=\{1,...,i^*\}$ – множество пунктов производства, $J=\{1,...,j^*\}$ – множество пунктов потребления, i^* и j^* – соответственно их количества. Обозначим a_i – максимальный объем производства продукта пунктом $i\in I$; b_j – объём продукции, который необходимо доставить j-му пункту потребления, $j\in J$. Пусть $x_{ij}\ge 0$, $i\in I$, $j\in J$, – объемы перевозок от i-го поставщика j-му потребителю. Тогда множество допустимых планов перевозок $x=(x_{ij})_{i\in I, j\in J}$, которое обозначим D, будет задаваться следующими условиями:

$$\sum_{j\in J} x_{ij} \le a_i,\ \ i\in I; \tag{1}$$

$$\sum_{i\in I} x_{ij} \ge b_j,\ \ j\in J; \tag{2}$$

$$x_{ij}\ge 0,\ \ i\in I, j\in J. \tag{3}$$

Пусть $c_{ij}>0$, $i\in I$, $j\in J$, – затраты на перевозку единицы продукции от i-го поставщика j-му потребителю, тогда целевая функция задачи примет вид:

$$g(x)=\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}x_{ij}\to \min. \tag{4}$$

В такой постановке ТЗ пути сообщения между i-м поставщиком и j-м потребителем можно поставить в соответствие пару индексов $(i,j)\in I\times J$. Поэтому далее (i,j) будем называть индексом пути сообщения между i-м поставщиком и j-м потребителем, а множество $S=I\times J$ будем называть универсальным множеством индексов путей сообщения.

Предположим, что лицо, принимающее решение (ЛПР), не может четко сказать, какие пути из множества $S = I \times J$ в действительности могут быть использованы, а может лишь задать функцию принадлежности $s(i, j)$, $(i, j) \in S$, нечеткого множества индексов $\tilde{S} \subseteq S$ путей сообщения, которые, по его мнению, должны быть задействованы. Тогда из (1)–(4) возникает ТЗ с нечетким множеством индексов путей сообщения в следующей постановке:

$$g(x) \to \min,\ x = (x_{ij})_{(i,j)\in S} \in D, \\ x_{ij} > 0,\ (i, j) \in \tilde{S}. \tag{5}$$

Действительно, если путь сообщения с индексом $(i, j) \in S$ должен быть использован, то условие $x_{ij} > 0$ потребует ненулевого объема перевозки продукции от i-го поставщика j-му потребителю, со степенью принадлежности $s(i, j)$. В противном случае получим условие $x_{ij} \le 0$, которое вместе с (3) даст в решении ТЗ значение $x_{ij} = 0$, т.е. нулевой объем перевозки продукции от i-го поставщика j-му потребителю.

Обозначим $D_{ij} = \{x \in D \mid x_{ij} > 0\}$ – множество допустимых планов перевозок, в которых путь сообщения с индексом $(i, j) \in S$ должен быть использован. Тогда задача (5) может быть представлена в виде:

$$g(x) \to \max,\ x \in \tilde{D}, \tag{6}$$

где $\tilde{D} = \bigcap_{(i,j)\in\tilde{S}} D_{ij}$ – множество, представляющее собой пересечение нечеткого подмножества $\tilde{S} \subseteq S$ четких множеств D_{ij}, $(i, j) \in S$. Определим это понятие в соответствии с подходом, который был предложен в [5].

Пересечение нечеткого множества четких множеств. Пусть на некотором множестве X заданы четкие множества F_i, $i \in M$, где $M = \{1,...,m\}$ – множество индексов, m – их количество. Также пусть на множестве индексов M задано нечеткое множество $\tilde{M}$ с функции принадлежности $\mu(i)$, $i \in M$.

Определим понятие $\tilde{F} = \bigcap_{i\in\tilde{M}} F_i$ – пересечения нечеткого множества $\tilde{M}$ четких множеств F_i, $i \in M$. Для этого на множестве X для $i \in M$ определим функцию принадлежности (характеристическую функцию) четкого множества F_i, которую обозначим

$$\phi_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in F_i, \\ 0, & x \notin F_i. \end{cases}$$

Для произвольного $x \in X$ введем отношение доминирования на множестве индексов M. Будем говорить, что множество с индексом $i \in M$ доминирует множество с индексом $j \in M$ для $x \in X$, и обозначать это $i \overset{x}{\succ} j$, если справедливы такие неравенства: $\phi_i(x) \le \phi_j(x)$, $\mu(i) \ge \mu(j)$, и хотя бы одно из них строгое. Обозначим

$$\tilde{\mu}(x,i) = \begin{cases} \mu(i), & i \in PO(x), \\ 0, & i \notin PO(x), \end{cases}$$

где $PO(x) = \{i \in M \mid j \overset{x}{\not\succ} i \ \ \forall j \in M\}$.

Пересечением $\tilde{F} = \bigcap_{i\in\tilde{M}} F_i$ нечеткого множества $\tilde{M}$ четких множеств F_i, $i \in M$ будем называть нечеткое множество типа 2, которое задается тройками $(x, \psi(x, y))$, где

$\psi : X \times Y \to \{0,1\}$ – нечеткое отображение, выполняющее роль нечеткой функции принадлежности и определенное так:

$$\psi(x, y) = \max_{i\in M}\{\tilde{\mu}(x,i) \mid \phi_i(x) = y\},$$

если $\exists i \in M\ \ \phi_i(x) = y$;

$$\psi(x, y) = 0,$$

если $\forall i \in M\ \ \phi_i(x) \ne y$

x – элемент множества X;

y – элемент универсального множества $Y = \{0,1\}$ значений отображения принадлежности $\psi(x, y)$ нечеткого множества $\tilde{F}$ типа 2.

Значения нечеткого отображения принадлежности $\psi(x, y)$ для фиксированной альтернативы $x^0 \in X$ образуют нечеткое подмножество $\Psi_Y(x^0)$ множества $Y = \{0,1\}$ с функцией принадлежности $\psi(x^0, y)$, $y \in \{0,1\}$. Значение $\psi(x^0,1)$ можно понимать как достоверность равенства единице степени принадлежности (иными словами, достоверность установления факта принадлежности) $x^0 \in X$ множеству $\tilde{F}$. Соответственно значение $\psi(x^0,0)$ имеет смысл достоверности установления факта отсутствия принадлежности $x^0 \in X$ множеству $\tilde{F}$.

С другой стороны, если в отображении $\psi(x,y)$ зафиксировать $y=1$, то мы получим нечеткое множество элементов $x\in X$, принадлежащих множеству $\tilde{F}$, с функцией принадлежности $\psi(x,1)$. Обозначим это множество $\Psi_X(1)$. Аналогично для фиксированного значения $y=0$ получим нечеткое множество элементов $x\in X$, не принадлежащих множеству $\tilde{F}$, с функцией принадлежности $\psi(x,0)$. Обозначим его $\Psi_X(0)$. Интересно, что в общем случае $\Psi_X(0)\neq\overline{\Psi_X(1)}$ и $\psi(x,0)\neq 1-\psi(x,1)$. Поэтому, как нечеткое множество $\Psi_X(0)$, так и $\Psi_X(1)$ представляют собой нечеткие множества сечений соответственно при $y=0$ и $y=1$ нечеткого множества $\tilde{F}$ типа 2 и являются его неотъемлемыми составляющими.

Упростить отображение принадлежности $\psi(x,y)$ позволяет следующая теорема [5].

Теорема. Пусть F_i, $i\in M$, – четкие множества, которые заданы на множестве X соответствующими характеристическими функциями $\phi_i(x)$, $x\in X$, $i\in M$; $\mu(i)$, $i\in M$, – функция принадлежности нечеткого множества $\tilde{M}\subseteq M$. Для того чтобы нечеткое множество $\tilde{F}$ типа 2, заданное отображением принадлежности $\psi(x,y)$, $x\in X$, $y\in\{0,1\}$, было пересечением нечеткого множества $\tilde{M}$ четких множеств F_i, $i\in M$, т.е. $\tilde{F}=\bigcap_{i\in\tilde{M}}F_i$, необходимо и достаточно, чтобы для $x\in X$:

$$\psi(x,0)=\begin{cases}\max\limits_{\phi_i(x)=0}\mu(i), & \exists i\in M\ \phi_i(x)=0,\\ 0, & \forall i\in M\ \phi_i(x)=1,\end{cases}$$

$$\psi(x,1)=\begin{cases}\max\limits_{i\in M}\mu(i), & \forall i\in M^*\ \phi_i(x)=1,\\ 0, & \exists i\in M^*\ \phi_i(x)=0,\end{cases}$$

где $M^*=\operatorname{Arg}\max\limits_{j\in M}\mu(j)$.

Теперь становится понятно, что в транспортной задаче с нечетким множеством путей сообщения (6) множество допустимых планов перевозок $\tilde{D}=\bigcap_{(i,j)\in S\setminus\tilde{S}}D_{ij}$ представляет собой нечеткое множество типа 2. Обозначим $\psi_D(x,y)$, $x\in D$, $y\in\{0,1\}$, – его функцию принадлежности. Также обозначим $S^*=\operatorname{Arg}\max\limits_{(i,j)\in S}s(i,j)$. После применения описанной выше операции пересечения нечеткого подмножества $\tilde{S}\subseteq S$ четких множеств D_{ij}, $(i,j)\in S$, согласно теореме получим:

$$\psi_D(x,0)=\begin{cases}\max\limits_{x_{ij}\le 0}s(i,j), & \exists(i,j)\in S\ x_{ij}\le 0,\\ 0, & \forall(i,j)\in S\ x_{ij}>0,\end{cases}$$

– достоверность факта отсутствия принадлежности плана перевозок $x\in D$ множеству $\tilde{D}$;

$$\psi_D(x,1)=\begin{cases}\max\limits_{(i,j)\in S}s(i,j), & \forall(i,j)\in S^*\ x_{ij}>0,\\ 0, & \exists(i,j)\in S^*\ x_{ij}\le 0,\end{cases}\qquad(7)$$

– достоверность факта принадлежности.

Поиск рационального решения. В реальной ситуации принятия решения ЛПР будет стараться минимизировать целевую функцию $g(x)$ и достоверность $\psi_D(x,0)$ непринадлежности плана перевозок $x\in D$ множеству $\tilde{D}$ и максимизировать достоверность $\psi_D(x,1)$ его непринадлежности.

Иными словами, перед ЛПР возникает следующая трехкритериальная задача:

$$g(x)\to\min,\ \psi_D(x,0)\to\min,\quad \psi_D(x,1)\to\max,\quad x\in D.\qquad(8)$$

Обозначим SO – множество слабо оптимальных по Парето (оптимальных по Слейтеру) решений этой задачи. Напомним, что решение $x^*\in D$ называется оптимальным по Слейтеру для задачи вида (8), если $\nexists x\in X$, что выполняются неравенства: $g(x^*)>g(x)$, $\psi_D(x^*,0)>\psi_D(x,0)$, $\psi_D(x^*,1)<\psi_D(x,1)$.

Вполне понятно, что в определение рационального решения задачи (6) следует включать лишь решения из множества SO. Эти рассуждения приводят к следующему определению.

Общим рациональным решением ТЗ (6) с нечетким множеством индексов путей сообщения будем называть нечеткое множество $\tilde{X}$ типа 2 с функцией принадлежности

$$\psi_{\tilde{X}}(x,y)=\begin{cases}\psi_D(x,y), & x\in SO,\\ 0, & x\notin SO,\end{cases}$$

где $y\in Y=\{0,1\}$.

В случае, когда ЛПР интересует конкретное рациональное решение x^*, то его можно выбрать из множества SO с помощью того или иного метода многокритериальной оптимизации, решив задачу (8). Тогда будем его называть рациональным решением задачи (6) с достоверностями $\psi_D(x^*,0)$ и $\psi_D(x^*,1)$ факта соответственно его принадлежности и непринадлежности плану перевозок.

Упростим задачу (8).

Утверждение 1. Если функция принадлежности $s(i,j)$ – нечеткого множества индексов $\tilde{S} \subseteq S$ путей сообщения является нормальной, т.е. $\max\limits_{(i,j)\in S} s(i,j)=1$, то для каждого заданного значения параметра $\xi \in (0,1]$, при котором задача

$$g(x) \to \min,\ 0 < \psi_D(x,0) \le \xi,\ x \in D, \quad (9)$$

$$x_{ij} > 0,\ (i,j) \in S^*, \quad (10)$$

имеет оптимальное решение, это решение будет рациональным для задачи (6) с достоверностью принадлежности плану перевозок, равной единице, и с достоверностью отсутствия принадлежности плану перевозок не больше ξ.

Доказательство. Предположим противное, что $x^* \notin SO$. Тогда $\exists \hat{x}$, удовлетворяющий условиям (9) и (10), что имеют место неравенства: $g(\hat{x}) < g(x^*)$,

$$\psi_D(\hat{x},0) < \psi_D(x^*,0),\ \psi_D(\hat{x},1) > \psi_D(x^*,1). \quad (11)$$

Поскольку x^* – допустимое решение задачи (9), (10), то из (7) следует, что $\psi_D(x^*,1)=1$. Тогда из неравенств (11) следует, что $\psi_D(\hat{x},0) < \psi_D(x^*,0) \le \xi$ и $\psi_D(\hat{x},1) > \psi_D(x^*,1) \ge 1$. Поскольку, согласно (7) $\psi_D(\hat{x},1) \le 1$, то получили противоречие.

Утверждение доказано.

Далее будем считать, что предположения утверждения выполняются, т.е. функция принадлежности $s(i,j)$ нечеткого множества индексов $\tilde{S} \subseteq S$ путей сообщения – нормальна ($\max\limits_{(i,j)\in S} s(i,j)=1$). Посмотрим, как можно упростить решение задачи (9), (10).

Обозначим $S^{\xi} = \{(i,j) \in S \mid \xi \ge s(i,j)\}$ множество индексов ограничений, которые имеют степени принадлежности нечеткому множеству $\tilde{S}$ не больше $\xi \in (0,1]$. Тогда задачу (9), (10) можно записать в виде

$$\min_{(k,l)\in S^{\xi}} \min_{x\in X} g(x); \quad (12)$$

$$x_{kl} \le 0; \quad (13)$$

$$x_{ij} > 0,\ (i,j) \in S^*. \quad (14)$$

Поскольку $\max\limits_{(i,j)\in S} s(i,j)=1$, то очевидно, что при $\xi = 1$ и $(k,l) \in S^*$ ограничения (13) и (14) будут априори не совместны. Поэтому при условии, что максимальная достоверность принадлежности плану перевозок $\xi \in (0,1)$, из утверждения 1 можно получить следующий результат.

Утверждение 2. Если функция принадлежности $s(i,j)$ – нечеткого множества индексов $\tilde{S} \subseteq S$ ограничений является нормальной, то для каждого заданного значения параметра $\xi \in (0,1)$, при котором задача (12)–(14) имеет оптимальное решение, оно будет рациональным решением задачи (6) с достоверностью принадлежности плану перевозок, равной единице, и с достоверностью отсутствия принадлежности плану перевозок не больше ξ.

Таким образом, согласно предложенному подходу для рационального решения ТЗ с нечетким множеством индексов путей сообщения со свойствами, которые заявляются в утверждении, достаточно сделать следующее:

– выбрать число $\xi \in (0,1)$, которое характеризует максимальную для ЛПР достоверность принадлежности плану перевозок;

– построить множество индексов путей сообщения $S^* = \operatorname{Arg}\max\limits_{(i,j)\in S} s(i,j)$, которые должны быть обязательно задействованы (со степенью принадлежности единица);

– построить множество индексов путей сообщения $S^{\xi} = \{(i,j) \in S \mid \xi \ge s(i,j) > 0\}$, которые имеют положительную достоверность принадлежности плану перевозок не больше заданного числа $\xi \in (0,1)$;

– для каждого пути с индексом $(k,l) \in S^{\xi}$ минимизировать стоимость перевозок $g(x)$ на множестве допустимых планов перевозок D при дополнительных ограничениях (14) на обязательно задействованные пути сообщения и еще одном дополнительном ограничении (13), которое запрещает перевозку по выбранному пути сообщения с индексом (k,l), т.е. решить задачу

$$\min_{x\in X} g(x),\ x_{kl} \le 0,\ x_{ij} > 0,\ (i,j) \in S^* \quad (15)$$

(ее решение обозначим $x^{(kl)}$);

– из полученных решений $x^{(kl)}$, $(k,l) \in S^{\xi}$, выбрать рекордное $\hat{x}$ по значению целевой функции, т.е. $\hat{x} = \arg \min_{(k,l)\in S^{\xi}} g(x^{(kl)})$.

Выводы. В заключение следует отметить, что предложенный метод не только расширяет область применения нечеткого математического программирования на случай транспортной задачи с нечетким множеством путей сообщения между поставщиками и потребителями, но и может дать новый поход к решению других постановок нечетких задач оптимизации.

Список литературы

1. Раскин Л. Г. Задачи транспортной логистики на нечетких входных данных / Л. Г. Раскин, О. В. Серая, А. А. Харченко // Вестник НТУ «ХПИ».– Х. : НТУ «ХПИ». – 2003. – № 20. – С. 95–98.
2. Ивохин Е. В. Про подходы к решению транспортной задачи с нечеткими ресурсами / Е. В. Ивохин, Баррак Сухби Камл Алмодарас // Проблемы управления и информатики : междунар. научно-техн. журн – 2014. – № 5. – С. 122–133.
3. Мащенко С. О. Транспортная задача с нечеткими множествами поставщиков и потребителей / С. О. Мащенко, Мохаммед Саад Ибрахим Аль-Саммарраи // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2014. – № 1. – С. 39–53.
4. Lai Y. J. Fuzzy mathematical programming. Lecture notes in economics and mathematical systems / Y. J. Lai, C. L. Hawng. – New York : Springer-Verlag, 1992.
5. Мащенко С. О. Задача математического программирования с нечетким множеством ограничений / С. О. Мащенко // Кибернетика и системный анализ. – 2013. – № 1. – С. 73–81.

References

1. Raskin, L. G., Seraya, O. V. and Harchenko, A. A. (2003) Transport logistic problems on fuzzy input data. *Vestnik NTU «HPI»*, (20), pp. 95–98 [in Russian].
2. Ivohin, E. V. and Almodaras, B. S. (2014) About approaches to the decision of transportation problem with fuzzy resources. *Problemy upravleniya i informatiki*: internat. scient.-techn. journal, (5), pp. 122–133 [in Russian].
3. Mashchenko, S. O., Al-Sammarrai, M. S. (2014) Transportation problem with fuzzy sets of suppliers and demanders. *Zhurnal obchyslyuval'noyi ta prykladnoyi matematyky*, (1), pp. 39–53 [in Russian].
4. Lai, Y. J. and Hawng, C. L. (1992) Fuzzy mathematical programming. Lecture notes in economics and mathematical systems. New York : Springer-Verlag.
5. Mashchenko, S. O. (2013) A mathematical programming problem with the fuzzy set of indices of constraints. *Kibernetika i sistemnyi analiz*, 49 (1), pp. 62–68 [in Russian].

S. O. Mashchenko, *Dr. Phys.-Math. Sci., professor*,
Al-Sammarraie Mohammed Saad Ibrahim, *post-graduate student*
Kyiv National Taras Shevchenko University
akad. Glushkov blvd., 4D, Kyiv, 03127, Ukraine
msomail@yandex.ua

TRANSPORTATION PROBLEM WITH FUZZY SET OF COMMUNICATION LINES

In this work, the transportation problem with fuzzy set of communication lines between suppliers and demanders of products is considered. A need for the solving of such problems arises, when a decision-making person cannot expressly indicate, what communication lines will be active at the moment of decision making. In this case, it can only set the membership function of a fuzzy set of relevant communication lines. It is shown, that the set of feasible transportations will be the fuzzy set of type 2 (the fuzzy set with membership function which has fuzzy values), its membership function is built. The three criteria problem of rational decision search is offered. Decision-making person wants to minimize the cost of products transporting between suppliers and demanders and reliability for *non-feasibility of transportations plan, and also to maximize reliability of its feasibility in this problem. In this paper general solution notion of transportation problem with fuzzy set of communication lines between suppliers and demanders of products is determined. More simple method for rational decision receipt with the reliability of membership to feasible transportations set, equal one, and reliability of its abstention of the no more set number is considered. For this purpose, it is offered to solve the problem of mathematical programming of special kind. The offered method not only extends the application domain of fuzzy mathematical programming in case of transportation problem with fuzzy set of communication lines between suppliers and demanders of products, but also can give a new hike to the decision of other raising of fuzzy optimization problems.*

Keywords: *transportation problem, fuzzy set of type 2, decision making.*

Рецензенти: В. А. Яценко, д.т.н., професор,
Н. В. Семенова, д.т.н., професор