О НЕУСТОЙЧИВОСТИ МЕТОДА НОРМАЛИЗАЦИИ КРИТЕРИЕВ

Наумов Анатолий Александрович[1], Баженов Руслан Иванович[2]
[1]Центр прикладных математических исследований, г.Новосибирск, кандидат технических наук, доцент
[2]Приамурский государственный университет имени Шолом-Алейхема, кандидат педагогических наук, доцент, заведующий кафедрой информатики и вычислительной техники

Аннотация
В работе приведены результаты исследования свойств решений многокритериальных задач найденных методом нормализации критериев (МНКР). Показано, что МНКР находит решения, зависящие от ограничений, которые не образуют Парето-множество задачи и, таким образом, является неустойчивым относительно изменений этих ограничений. Такое свойство сильно отличает метод нормализации критериев от других методов многокритериальной оптимизации. В связи с тем, что при решении многих реальных задач оптимизации систем, а экономических – в особенности, их многокритериальность – характерная их особенность, то отмеченное выше свойство неустойчивости решений приводит к выводу: следует аккуратно относиться к выбору метода для решения задач данного класса и, по возможности, избегать использования МНКР.

Ключевые слова: задачи линейного программирования, метод нормализации критериев,многокритериальные задачи, устойчивость решений

ABOUT INSTABILITY OF NORMALIZATION CRITERIA METHOD

Naumov Anatoly Aleksanrovich[1], Bazhenov Ruslan Ivanovich[2]
[1]Center of Applied Mathematical Research, Novosibirsk, PhD, associate professor
[2]Sholom-Aleichem Priamursky State University, candidate of pedagogical sciences, associate professor, Head of the Department of Computer Science

Abstract
The paper presents the results of a study of multi-criteria decision problems found by the normalization criteria method (NCM). It is shown that the NCM-method finds solutions that depend on the constraints that do not form a Pareto-set of the problem. This property distinguishes the NCM-method in a number of multi-objective optimization methods. In solving of many real optimization problems (and economic as a particular) their multicriteriality is a characteristic feature of them. Therefore the above-noted property of

solutions instability moves to the conclusion that the choice of solutions method for problems of this class should be done carefully.

Keywords: linear programming problems, multicriteria problems, normalization criteria method, sustainability solutions

---

Рубрика: 05.00.00 ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

Библиографическая ссылка на статью:
Наумов А.А., Баженов Р.И. О неустойчивости метода нормализации критериев // Современные научные исследования и инновации. 2014. № 11 [Электронный ресурс]. URL: http://web.snauka.ru/issues/2014/11/40408 (дата обращения: 24.05.2016).

Многокритериальность является свойством многих задач моделирования и управления экономическими системами. Разработкой методов решения многокритериальных задач занимаются многие ученые и практики. Так, наиболее известными и часто используемыми при решении многокритериальных оптимизационных задач являются: метод свертки критериев, метод уступок, метод последовательной оптимизации и многие другие [1-4]). К сожалению, до сих пор не предложено универсальных методов решения таких задач, и в каждом конкретном случае при решении задач данного класса выбирается (причем, достаточно субъективно) тот или иной метод. Все перечисленные выше и хорошо зарекомендовавшие себя на практике методы опираются в своей реализации на простую и ясную идею: искать решение многокритериальной задачи среди элементов Парето-множества [1-4].

В данной работе приведены результаты исследования свойств решений метода нормализации критериев, основы которого подробно изложены в работе [5], и в последнее время используемый при решении экономических задач [6-9].

Рассмотрим метод нормализации критериев.

Пусть необходимо решить многокритериальную задачу линейного программирования, заданную в общем виде:

$$f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \to \max,$$
$$f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \to \max, \qquad (1)$$
$$f_p(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \to \max,$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \le b_1, \\ g_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \le b_2, \\ \dots \\ g_m(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \le b_m. \end{cases} \quad (2)$$

Задача линейного программирования выбрана нами для упрощения выкладок и рассуждений. Сделанные в работе выводы по поводу свойств

решений задач линейного программирования, найденных методом нормализации критериев, справедливы (с некоторыми оговорками) и для решений, найденных этим методом для других классов оптимизационных задач (нелинейного программирования, целочисленного программирования и т.д.).
Предположим, что область допустимых решений задачи (1)-(2) (область D), образованная ограничениями (2), является непустой и ограниченной так, что на этой области существуют решения для каждого из критериев (1).
Идея метода нормализации критериев состоит в переходе от многокритериальной (векторной) задачи (1)-(2) к однокритериальной (скалярной) задаче [5-9]. Для этого сначала критерии (1) нормализуют в соответствии с формальными записями:

$$\lambda_1(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n) = \frac{f_1(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)-f_1^{min}}{f_1^{max}-f_1^{min}},$$

$$\lambda_2(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n) = \frac{f_2(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)-f_2^{min}}{f_2^{max}-f_2^{min}},$$

...

$$\lambda_p(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n) = \frac{f_p(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)-f_p^{min}}{f_p^{max}-f_p^{min}},$$

а затем записывают однокритериальную максиминную задачу в виде:

$$\lambda \to \max, \qquad (3)$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} \lambda - \lambda_1(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n) \le 0, \\ \lambda - \lambda_2(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n) \le 0, \\ \quad\ldots \\ \lambda - \lambda_p(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n) \le 0, \\ g_1(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n) \le b_1, \\ g_2(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n) \le b_2, \\ \quad\ldots \\ g_m(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n) \le b_m. \end{cases} \qquad (4)$$

Здесь $\lambda = \min\left(\lambda_1(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n),\lambda_2(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n),\ldots,\lambda_p(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)\right)$;
f_i^{min}, f_i^{max}, $i = 1,2,3,\ldots,p$, – это наименьшие и наибольшие значения соответствующих критериев из множества (1) на области допустимых решений D, они получаются в результате решения $2p$ скалярных оптимизационных задач. Таким образом, нормализация критериев – это некоторый искусственный прием, сводящий задачу векторной оптимизации (с множеством критериев) к скалярной задаче (с одним критерием). В этом случае новая задача представляет собой, так называемую максиминную задачу линейного программирования (3)-(4).
К сожалению, у данного метода имеется множество недостатков. Перечислим некоторые из них.
1. Нормализованные критерии ($\lambda_i(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)$, $i = 1,2,3,\ldots,p$) не имеют размерностей. Для экономических задач это обстоятельство

представляется очень важным и означает, что происходит обезличивание целевых функций, нивелирование (затушевывание) их особенностей. Нормализованные критерии принимают значения в интервале [0, 1], хотя каждый из исходных критериев может принимать значения как очень большие (например, для показателя прибыли значения могут измеряться в млн. руб.), так и небольшие, меньшие единицы (например, для такого показателя, как коэффициент рентабельности).

2. Переход к нормализованным критериям использует величины f_i^{min}, $i = 1,2,3,\dots,p$, которые оказывают влияние на решение максиминной задачи, но прямого отношения к решению исходной задачи могут не иметь.

Отсюда может быть сделан вывод: использовать метод нормализации критериев для решения экономических задач нежелательно, так как полученные при этом решения не могут быть логично интерпретированы в терминах исходной задачи. Введем основные обозначения и определения для исходной задачи (1)-(2).

Целевые функции задачи (1) в виде вектора обозначим через $F = \left(f_1(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n), f_2(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n),\dots, f_p(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)\right)$, а ограничения (2) – как $S = \{g_1(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n) \le b_1,\ g_2(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n) \le b_2,\dots,\ g_m(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n) \le b_m\}$.

Парето-множество оптимизационной задачи P=<F, S> обозначим через D_π, а множество определяющих его ограничений – через S_π (это множество активных ограничений задачи P). Кроме этого, множество ограничений из S не вошедших во множество S_π назовем пассивными ограничениями задачи P и обозначим это множество как S_p. Очевидно, выполняются равенства: $S = S_\pi \cup S_p$ и $S_\pi \cap S_p = \emptyset$. Задачи P_1 и P_2 являются D_π-эквивалентными, если их Парето-множества совпадают, т.е. выполняется равенство $D_{\pi,P_1} = D_{\pi,P_2}$. Факт эквивалентности задач обозначается как $P_1 \sim_{D_\pi} P_2$. Очевидно, D_π-эквивалентные задачи P_1 и P_2 в общем случае имеют не совпадающие критерии, то есть выполняется неравенство $F_{P_1} \ne F_{P_2}$ и ограничения ($S_{P_1} \ne S_{P_2}$). Аналогично определяются $\langle D_\pi, F\rangle$-, $\langle D_\pi, S\rangle$-, $\langle S_\pi, F\rangle$-эквивалентные задачи. Если множество ограничений S зафиксировано (и, следовательно, область D тоже), то для S_π и D_π выполняются отображения: $S \xrightarrow{F} S_\pi$ и, аналогично, $D \xrightarrow{F} D_\pi$. Эти записи означают, что критерии задачи оптимизации определяют во множествах ее ограничений и области определения Парето-множества S_π и D_π. Назовем методом решения оптимизационной задачи $\langle F, S\rangle$ отображение (M) пары $\langle F, S\rangle$ в некоторую область (точку) x^* области D_π, формально это можно записать как

$\langle F, S\rangle \xrightarrow{M} x^* \in D_\pi$ (для точки x^*).

Метод решения задачи (M) является S_p-устойчивым, если решение задачи не меняется при изменении элементов множества S_p, при этом предполагается, что вектор F и множество D_π являются фиксированными. Формально это свойство можно записать таким образом:

$$\forall_{S_{p_1} \neq S_{p_2}} \left(M: \langle F, S = S_\pi \cup S_{p_1}\rangle \to x_1^* \in D_\pi \;\&\; M: \langle F, S = S_\pi \cup S_{p_2}\rangle \to x_2^* \in D_\pi\right) \Rightarrow x_1^* = x_2^*.$$

Заметим, что большинство методов решения многокритериальных задач оптимизации [1, 2] являются S_p-устойчивыми. Свойство устойчивости методов оптимизации представляется очевидным, так как было бы нелогично, если бы решения задач зависели от множеств их пассивных ограничений S_p.

Рассмотрим пример.

Заданы две задачи линейного программирования с одним и тем же множеством критериев F:

$$f_1(x_1, x_2) \equiv 1000 \cdot x_2 \to \max, \quad (5)$$
$$f_2(x_1, x_2) \equiv 0{,}1 \cdot x_1 \to \max,$$

и отличающиеся своими ограничениями:

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2) \equiv x_1 + x_2 \le 2, \\ 0 \le g_2(x_1, x_2) \equiv x_1 \le 1{,}5, \\ 0 \le g_3(x_1, x_2) \equiv x_2 \le 1{,}5, \end{cases} \quad (6)$$

и

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2) \equiv x_1 + x_2 \le 2, \\ 0 \le g_2(x_1, x_2) \equiv x_1 \le 1{,}5, \\ 0{,}5 \le g_3(x_1, x_2) \equiv x_2 \le 1{,}5. \end{cases} \quad (7)$$

Требуется найти решения двух задач (5), (6) (задача A) и (5), (7) (задача B) методом нормализации критериев.

Прежде всего следует заметить, что ограничения (6) и (7) были подобраны в примере таким образом, чтобы области, которым принадлежат максиминные решения для задач A и B совпадали, а решения этих задач были различны:

$x_{1,A}^* = 1{,}0$, $x_{2,A}^* = 1{,}0$, $f_{1,A}^* = 1000$, $f_{2,A}^* = 0{,}1$ (для задачи A)

и

$x_{1,B}^* = 0{,}9$, $x_{2,B}^* = 1{,}1$, $f_{1,B}^* = 1100$, $f_{2,B}^* = 0{,}09$ (для задачи B).

Этот пример иллюстрирует зависимость решений задач, найденных по методу нормализации критериев, от параметров задачи, которые непосредственно на область их решений (в данном случае – на область максиминных решений) не влияют.

Могут быть доказаны следующие утверждения.

Утверждение 1. Метод нормализации критериев не является S_p-устойчивым [10 -12], то есть является S_p-неустойчивым.

Утверждение 2. Пусть для некоторой многокритериальной задачи линейного программирования P зафиксированы множество критериев F и Парето-множество D_π. Кроме этого, пусть точки области D, соответствующие значениям критериев f_i^{min}, i=1, 2, 3, …, p, не принадлежат D_π. Тогда можно построить бесконечное множество новых задач линейного программирования, для которых эти два множества (F и D_π) будут совпадать, а решения на основе метода нормализации критериев для них будут различны и отличаться от решения исходной задачи P.

Таким образом, решения многокритериальных задач, найденные методом нормализации критериев, являются неустойчивыми по отношению к изменению пассивных (не влияющих на Парето-множество D_π) ограничений этих задач.

Можно сделать следующие выводы:

1. Предложенный в работах [6-9] к практическому использованию для решения многокритериальных экономических задач метод нормализации критериев не является устойчивым по отношению к изменениям ограничений задач, не влияющих на множество их максиминных решений (к изменениям так называемых пассивных ограничений задач).

2. Использование метода нормализации критериев на практике может приводить к решениям, которые трудно интерпретировать в терминах постановок исходных задач.

3. Ни один из хорошо известных и успешно используемых на практике методов решения многокритериальных задач [1-4]) свойствами, отмеченными в пп. 1 и 2, не обладает.

Библиографический список

1. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. М: Радио и связь, 1981. 560 с.
2. Штойер Р. Многокритериальная оптимизация. Теория, вычисления и приложения. М.: Радио и связь, 1992. 504 с.
3. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982. 255 с.
4. Ногин В.Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. М.: Физматлит, 2002. 176 с.
5. Машунин Ю.К. Методы и модели векторной оптимизации. М.: Наука, 1986. 140 с.
6. Кириллов Ю.В., Назимко Е.Н. Многокритериальная модель оптимизации структуры капитала // Экономический анализ: теория и практика. 2011. № 32 (239). С. 57–63.
7. Кириллов Ю.В., Назимко Е.Н. Многокритериальная задача оптимизации структуры капитала и ее решение в системе Maple // Экономика и менеджмент систем управления. 2013. Т. 8. № 2.1. С. 149-160.
8. Кириллов Ю.В., Досужева Е.Е. Многокритериальная экономико-математическая модель оценки коммерческой эффективности

инвестирования// Финансовая аналитика: Проблемы и решения. 2013. № 32. С. 18-24.
9. Кириллов Ю.В., Досужева Е.Е. Экономико-математическая модель поддержки принятия решений по инвестированию в совместные инвестиционные проекты// Финансовая аналитика: Проблемы и решения. 2013. № 27. С. 33-39.
10. Наумов А.А. К проблемам метода нормализации критериев в задачах векторной оптимизации // Theoretical & Applied Science. 2013. № 8 (4). С. 24-27.
11. Наумов А.А. К S_P-неустойчивости метода нормализации критериев решения многокритериальных задач оптимизации // Theoretical & Applied Science. 2013. № 9. С. 14-17.
12. Наумов А.А. К свойству S_P-инвариантности методов решения многокритериальных задач оптимизации // Theoretical & Applied Science. 2013. № 10 (6). С. 1-4.